朝倉物理学大系
荒船次郎|江沢 洋|中村孔一|米沢富美子＝編集

5

素粒子標準理論と実験的基礎

長島順清
[著]

朝倉書店

編集

荒船次郎
東京大学教授

江沢　洋
学習院大学教授

中村孔一
明治大学教授

米沢富美子
慶應義塾大学教授

はじめに

1967 年に提案された統一ゲージ理論は非常な成功をおさめ，われわれの知りうるすべての素粒子現象を少なくとも原理的には説明できる．その根幹をなす基礎概念は素粒子論を越えて，宇宙論，原子核理論や物性理論にまで広がりつつある．本書は，素粒子標準理論の概要と実験的基礎についての解説書であり，読者としては素粒子現象を本格的に学ぼうとする大学院学生もしくは研究者を対象とする．本書ではゲージ理論の重要なテーマについての実験的検証に力点を置いたが，各テーマについて重要な概念や式は第 1 原理（ラグランジアン）から導いてあり，教科書として使えるよう配慮した．本シリーズ第 3 巻『素粒子物理学の基礎 I』程度の学習レベル（場の量子論の基礎的知識）があれば，本書に現れる式は高次効果は別として自分で導ける．また，他の本を参照せずとも本書の中で話が閉じるように整合性をもたせた．

本書で扱う現象は，統一ゲージ理論が提案されてから発見された新現象で，標準理論として確立するために直接検証を必要としたテーマである．標準理論以前の現象や，新現象であっても以前の“古典的素粒子論”で説明できる現象は，すでに第 4 巻『素粒子物理学の基礎 II』でとりあげた．

本書の構成は次の通りである．第 1 章の導入の後，第 2 章でゲージ理論のラグランジアンを構築する．本書の最も重要な部分であるが，非常に抽象的で数学的なゲージ理論の概念を，読者が直観的かつ物理的なイメージを描けるよう重力の幾何学的解釈と対比しながら説明する．電弱統一の GWS（グラショウ-ワインバーグ-サラム）理論については，第 4 章，第 6 章で中性カレント現象と W, Z 粒子の発見で理論として確立してゆく過程を描き，第 7 章の Z ボソン生成崩壊過程で高次効果を含めて GWS 理論がデータを完璧に再現しうるこ

と，精密データの中に標準理論以外の効果が入る余地がほとんどないことを示す．

強い相互作用の理論であるQCDに関しては，まず第5章でQCDの基本を習得する．漸近自由と繰り込み群方程式という重要概念を解説し，発展方程式を立てて深非弾性散乱を記述する．次にジェットがパートン(クォークとグルーオン)のハドロン化したものであること，ジェット現象がQCDの処方箋に従う様子を第8，9章で解説し，最後をトップクォーク発見で締めくくる．QCDの前準備として第3章パートンモデルを挿入した．理由は実験では単独のクォークを扱えないので，クォーク複合体の核子を標的とする実験データをパートン現象に翻訳するための枠組みを必要とするからである．既刊の『素粒子物理学の基礎I・II』(本書ではまとめてIと引用する)で解説ずみであるが，本書の中で議論を閉じるために含めた．すでに学習ずみの読者は第3章をスキップしてよい．

全体の構成としては，中性カレント，W, Z の電弱現象をまとめて「上」，QCDとジェット現象をまとめて「下」として分離する方がすっきりするが，W ボソンが実験的にはハドロン現象の中で扱われることが多いため，QCD解説を W ボソンの前に置いた．ただし，W 現象の理解に必要なQCDの知識は多くはないので，そこにこだわらなければ，本書を電弱理論部分とQCD部分とに分離して使うことも可能である．学習目的に応じて適当に取捨選択していただければ幸いである．

本書は，重いクォークの崩壊現象やいわゆる柔らかい過程など，QCD非摂動効果の入る現象は取り扱い範囲外とした．非摂動的QCDは，インスタントン効果など新しい概念を含み，これから発展の見込める重要な分野であるが，現時点では格子ゲージ理論，カイラル摂動論などを使って現象論的に扱わざるをえず，標準理論の検証対象というよりは，標準理論を前提とする研究分野であるという理由による．標準理論の範囲内であっても，小林-益川モデルとヒッグス粒子は，実験の結果次第では標準理論を越える可能性があり，明らかに標準理論を越える現象とともに，現代高エネルギー物理学の最先端分野に位置するので，『高エネルギー物理学の発展』として巻を改めて解説する予定である．

本書を書き始めた段階では，標準理論は確立はしていたものの精密データは集積途上であり，解説書としては数年で時代遅れになる危険性を秘めていた．幸いにして精密データはここ数年で出つくし，学界の動向は今では検証よりはむしろ標準理論からの差異を追求し，新物理を模索する方向に向かっている．本書に収録したトピックは，データの小さな精密化はこれからも続くであろうが，検証には十分な量と精度をすでに出し，理論的にも定着した分野に属する．したがって本書が解説書として時代遅れになることはないであろうと楽観している．再校の段階で大幅に改訂したため，編集部にはご迷惑をおかけしたが，おかげで整合性のある教科書に仕上げられたと自負している．

終わりに，本書を執筆する機会を与えて下さった編者の荒船次郎氏と江沢洋氏に感謝する．特に荒船氏には全編を通して詳細に査読していただき，いろいろコメントをいただいた．しかし，本書の不備な点についての一切の責任は筆者にある．読者にご迷惑をかけないよう祈るばかりである．また，この執筆のため私の研究室スタッフ学生諸氏にはいろいろご協力をいただいた．この場を借りて感謝の意を表させていただく．最後に，本書の刊行に向けご面倒をおかけした朝倉書店の方々に感謝の意を表する．

1999 年 2 月

大阪にて　筆　者

目　　次

1
序　　論

1.1 標準理論

現在，素粒子物理学に関しては，標準理論と呼ばれる理論体系があり，少なくも現時点の実験データに関する限りは矛盾なく説明することに成功している．適用範囲を極端に広げない限り，理論的にも首尾一貫する自己矛盾のない閉じた数学的体系である．標準理論は，公理ともいうべき次の二つの前提からなる．

(1) 物質の究極構成要素としての素粒子は，クォークとレプトンである．これらは，スピン 1/2 をもつフェルミオンで，現在それぞれ 6 種類ずつ知られている (表 1.1).

(2) 素粒子間の力は，ゲージ粒子により媒介され，その数学的枠組みはゲージ理論である．標準理論の取り扱う範囲は，強い相互作用，電磁相互作用，弱い相互作用であり，ゲージ粒子はそれぞれグルーオン，フォトン，W および Z ボソンと呼ばれスピン 1 をもつ (表 1.1). このうち，電磁相互作用と弱い相互作用は統一されていて電弱相互作用と呼ばれ，$SU(2)\times U(1)$ 対称性をもつ．電磁力は電荷が源であり，弱い相互作用はクォークとレプトンのすべてがもつ弱荷 (アイソスピンと超電荷の組み合わせ) が源である．強い相互作用はクォークのもつ 3 種のカラー荷を源とする場の量子論 (Quantum Chromo-Dynamics：略して QCD) に従い，$SU(3)$ 対称性をもつ．

電弱相互作用の理論が現在の形で提案されたのは 1967 年であり，確立したのは 1970 年代後半である．QCD もほぼ同時期に確立された．前提 (1) については，トムソンの電子発見以来，100 年にわたる各種素粒子の発見と試行錯

誤の歴史の積み重ねがあるが，これはいわば標準理論形成の前夜史であるので，標準理論理解のために必要な概略をこの章で述べておくにとどめる．この本の主題は (2) にあり，第2章以後で，標準理論の骨格とさまざまな現象への適用，そして精密検証されている有りさまを記述する．

表 1.1　素粒子の表

物質の構成粒子					
名　称	スピン	電荷	第1世代	第2世代	第3世代
クォーク	$\frac{1}{2}$	$+\frac{2}{3}$	u (アップ)	c (チャーム)	t (トップ)
	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{3}$	d (ダウン)	s (ストレンジ)	b (ボトム)
レプトン	$\frac{1}{2}$	0	ν_e	ν_μ	ν_τ
	$\frac{1}{2}$	-1	e	μ	τ

四つの力と力の媒介粒子					
種　類 源	強い力 色　荷 RGB (3種)	(核力) (核物質)	電磁力 電　荷 (1種)	弱い力 弱荷 (アイソスピン) (2種)	重　力 質　量
強　さ 到達距離 (cm) ポテンシャル	~ 0.1 $k_1\frac{1}{r}+k_2 r$	(10) (10^{-13}) $\frac{\exp(-m_\pi r)^{\$}}{r}$	1/137 ∞ $\frac{1}{r}$	10^{-5} 10^{-16} $\frac{\exp(-m_W r)^{\$}}{r}$	10^{-39} ∞ $\frac{1}{r}$
粒　子　名 (スピン)	グルーオン (1)	(π 中間子) (0)	フォトン (1)	$W^\pm, Z^0$ (1)	グラヴィトン (2)
理　論 ゲージ群	QCD* $SU(3)$	(湯川理論)	QED** GWS#理論 $SU(2)\times U(1)$		一般相対論

$ 　m_π，m_W は，正確には $m_\pi c/\hbar$，$m_W c/\hbar$ である．
* 　Quantum Chromo-Dynamics
** 　Quantum Electro-Dynamics
\# 　Glashow-Weinberg-Salam

1.2　クォークとレプトン

a．クォーク

物質を切り刻んでいくと，物質を構成する最小の単位に到達する．これを物質 (素) 粒子と呼ぼう．物質の性質を保ったままの最小単位は分子であるが，

分子はさらに小さい単位の原子の組み合わせでできている．原子は100余種あるが，原子番号 Z と原子質量 A で分類できる．原子は原子核とそれをとりまく電子の雲よりなり，原子核と電子はクーロン力により束縛されている．原子のサイズは電子雲の広がりで決まり，ほぼ10^{-8}cmである．原子核は Z 個の陽子 (p) と $A-Z$ 個の中性子 (n)（まとめて核子 (N) と呼ぶ）よりなり，大きさは$10^{-13}\text{cm}\times A^{1/3}$程度である．$A$ 個の核子を原子核としてまとめている力は核力と呼ばれる強い相互作用の一形態である．核力の担い手として π メソン（中間子）が，1935年湯川により提案された．同年にはフェルミによる弱い相互作用の理論も提唱されているので，現代素粒子論の歴史はこのときから始まったといってよいであろう．原子核は自然崩壊により相互転換が可能である．α 崩壊は強い相互作用でヘリウムの原子核を放出する崩壊であり，γ 崩壊は電磁相互作用で γ 線を放出するが，電子とニュートリノを放出する β 崩壊は弱い相互作用反応である．加速器で高エネルギーの π メソンやKメソンが大量につくれるようになって，核子と反応させることにより，種々のハドロンが生成されかつ崩壊する過程を観測し，強い力と弱い力の性質が調べられた．ハドロンとは強い相互作用をする粒子の総称でクォークの複合体である．半奇数のスピンをもつバリオンと整数スピンをもつメソンに分けることができる．クォーク数（したがってバリオン数も）は保存する．

核子は陽子電荷を単位として，電荷 $+2/3$ をもつ u クォークと電荷 $-1/3$ をもつ d クォークより構成される．u, d クォークを結び付けるのは，グルーオン交換による色の力であるが，他方において，u, d クォークは対となって（アイソスピン2重項を構成して）弱い相互作用に関与する．さらに高エネルギー加速器が発達してからは，(c, s) と (t, b) の2組の2重項がクォークの仲間に加わった．

b. レプトン

物質を構成する素粒子で，強い相互作用をしない粒子をレプトンと呼ぶ．レプトンはさらに電荷をもつ荷電レプトン（電子e，ミューオン μ，タウ (τ) レプトン）と中性のレプトンに分けられる．中性レプトンはニュートリノと呼ばれ，電子ニュートリノ (ν_e)，ミューニュートリノ (ν_μ)，タウニュートリノ (ν_τ) の3種があって，それぞれ荷電レプトンと対を組んで，アイソスピン2

重項を構成して，弱い相互作用に関与する．レプトンはスピン 1/2 の粒子でありレプトン数（粒子に +1，反粒子に −1 を割り当てる）が保存する．さらに上の 2 重項ごとに，独立にレプトン数が保存することも知られており，香りの保存と呼ばれる．

クォークとレプトンを一緒に並べると，3 世代に縦断できる（表 1.1）．われわれの宇宙は第 1 世代のみで完成させることが可能である．宇宙にある物質の 99.9％以上が第 1 世代の素粒子で構成され，第 2 世代以降は高エネルギー反応で生成されるのみである．第 2，3 世代はほとんど第 1 世代のコピーといってよいくらい同じ性質をもち質量のみが異なる．なぜ世代が存在し，また世代数が 3 であるのかは全く理解できていない．

ニュートリノは長らく実験の測定範囲内で質量がゼロであったので，標準理論ではそのように扱う．しかし，最近スーパーカミオカンデ実験により，ニュートリノが質量をもつことと香りの混合が存在することの双方が確立したので[1)]，実験データについてはすでに一部標準理論の境界を越えたことになる．しかし，標準理論はニュートリノの質量をゼロと設定しただけであって，ゼロであるべしと要求したわけではない．実際 3 個もある量子状態が，すべて質量ゼロ状態であるということは量子力学の常識に照らして不自然であって，ニュートリノが有限質量をもつであろうことは大抵の理論物理学者が予想していたことであった．しかし，ニュートリノの有限質量は，新物理が出現するエネルギースケールと密接に結びついていて，スーパーカミオカンデのデータがどのような意味をもつかは現在活発な研究対象となっている．すなわち，有限質量の正確な位置づけについてはまだ定説ができていない．標準理論からのはみ出し部分があるからといってそれ以外の部分が無効になるわけではないので，そのテーマに関しては次の第 6 巻で取り上げることとし，本書では標準理論の範囲にテーマを絞って解説する．

1.3　クォークとレプトンのサイズ

電子やミューオンなど荷電レプトンが大きさをもたない質点粒子であるという証拠は，どんな高エネルギーであれ，厳密にラザフォード散乱公式（あるいはその相対論的拡張）に従うという単純な事実を指摘するのみで十分であるが，後のためもう少し定量化しておこう．話を簡単化して非相対論的量子力学の範囲で話をすると，ラザフォード散乱断面積公式は，フェルミの黄金律

$$\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega}=\frac{2\pi}{v}|\langle f|H|i\rangle|^2\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}E} \tag{1.1 a}$$

に，相互作用ハミルトニアンとしてクーロンポテンシャル

$$H=V(r)=\frac{\alpha}{r} \tag{1.2 a}$$

を入れてやれば得られる．遷移行列要素

$$\langle f|H|i\rangle=\int\mathrm{d}\boldsymbol{r}\phi_f{}^*H\phi_i=\frac{1}{V}\int\mathrm{d}\boldsymbol{r}V(\boldsymbol{r})\mathrm{e}^{i(\boldsymbol{k}_i-\boldsymbol{k}_f)\cdot\boldsymbol{r}} \tag{1.1 b}$$

は，ポテンシャルの $\boldsymbol{q}(=\boldsymbol{k}_\mathrm{i}-\boldsymbol{k}_\mathrm{f})$ 点におけるフーリエ変換量である．標的が大きさをもてば電荷分布 $\rho(\boldsymbol{r})$ が定義できる．この場合，

$$V(\boldsymbol{r})\to\int\mathrm{d}\boldsymbol{r}'\rho(\boldsymbol{r}')V(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}') \tag{1.2 b}$$

となるから，ラザフォード散乱公式は

$$\langle f|H|i\rangle\to\langle f|H|i\rangle F(\boldsymbol{q}) \tag{1.1 c}$$

$$F(\boldsymbol{q})=\int\mathrm{d}\boldsymbol{r}\rho(\boldsymbol{r})\mathrm{e}^{i\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{r}} \tag{1.3}$$

となって，広がりをもつ電荷による散乱断面積は，点電荷による断面積に形状因子 $|F(\boldsymbol{q})|^2$ を掛けたものとなる．質点粒子では形状因子は定数であるが，広がり（サイズ～a）をもてば，$|\boldsymbol{q}|\gtrsim 1/a$ で形状因子は定数ではなくなり $|\boldsymbol{q}|$ の減少関数となる．したがって，形状因子の振る舞いを調べて標的の大きさや形を測定できる．形状因子は通常，

$$F(q^2)=\frac{\Lambda^2}{q^2+\Lambda^2} \tag{1.4}$$

という形でパラメター化し，$a=1/\Lambda$ をもって大きさと定義する[*1)]．q^2 は $\boldsymbol{q}^2$

の相対論的拡張変数でローレンツ不変量である．Λ は形状因子の切断値 (cut off) とも呼ばれる．

測定対象や実験条件の違いにより形状因子は一つとは限らず，また他の変数をもパラメターとして含むが（この場合は，構造関数という名が一般的である），基本的には，形状因子の q^2 依存性が大きさの目安を与える．高エネルギー (~100 GeV) での電子-陽電子散乱 (Bhabha scattering) 断面積が QED の与える式と一致し，Λ の下限値が $\gtrsim$1TeV ということが，電子の大きさが 10^{-17}cm 以下という根拠を与える[2)]．

物質のもう一つの究極構成要素とされているクォークは，単独に取り出されたうえで，その存在が確認されているわけではない．実験室で検出する段階では，クォークはジェット（多数のハドロンが同一方向に噴出する現象）になると考えられており，この詳細については第8章，第9章（ジェット現象）で解説する．しかし，質点粒子としてのクォークの存在は，状況的証拠が数多くあり疑う余地はない．最も顕著な例は，電子-核子深非弾性散乱である．核子がクォークとグルーオンよりできていると仮定し，電子と陽子の散乱は電子と質点粒子としてのクォーク（グルーオンとクォークをまとめてパートンと呼ぶ）との散乱の和であり（パートンモデル），終状態はクォークのハドロン化した残骸であるという解釈が，実験事実を見事に説明する．ニュートリノ-核子非弾性散乱データとの比較により，クォークが半端電荷をもつことも確認された．これについては，第3章のパートンモデルのところでふれる．さらに，ハドロンのジェット生成断面積が，QCD の与える式に精度よく一致し，Λ の下限値がやはり 1~2 TeV ということが，クォークもレプトンと同じくらいの精度で質点粒子であるということの根拠を与える（第9章）．

---

*1) $\rho(\boldsymbol{r})$ が球対称分布をするとき，$\int\rho(\boldsymbol{r})\mathrm{d}^3r=1$ で規格化すれば，

$$F(Q^2)=1-\frac{\langle r^2\rangle}{6}Q^2+\cdots,\qquad \langle r^2\rangle=\int r^2\rho(\boldsymbol{r})\mathrm{d}^3r$$

であるので，

$$\langle r^2\rangle=-6\frac{\partial F}{\partial Q^2}(0)$$

でもってサイズを定義する場合もある．

1.4　クォークモデルとカラー自由度

1.4.1　クォークモデル

1940 年代，宇宙線の中から発見されたストレンジ粒子に始まり，1960 年代に，加速器と泡箱の発展により集積されたハドロンの数は数百種を超える．これに伴いハドロンをより基本的な構成粒子の複合体とみなす複合モデルが発達した．歴史的に重要なのは坂田モデルである．すべてのハドロンをスピン，アイソスピン，ストレンジネスにより分類し，複合体としてそれらを再現できる最小の単位として 3 個の基本粒子（陽子 p，中性子 n，ラムダ粒子 Λ）が提案された[3]．さらに，池田-大貫-小川は，これら 3 個の基本粒子の質量がほとんど同じであることに注目し，ハドロンの性質は 3 個の基本粒子の入れ替えで変わらないという $SU(3)$ 対称性（IOO 対称）を提案し，メソン 8 重項の存在を予言した[4]．その後 p, n, Λ がバリオン 8 重項のメンバーであることが示されたために，基本粒子の位はクォークにゆずったが，クォークモデルの従う数学的枠組みはクォークモデル出現以前にすでに存在していたのである．

$SU(3)$ 群には，同時対角化可能な演算子の表現行列が 2 個あり，アイソスピンの第 3 成分とハイパーチャージ Y と名付けて，(I_3, Y) のように書く，I_3, Y などクォークやレプトンの種類を区別する量子数を一般に香りと呼ぶ．クォークモデルでは，3 個の基本粒子を $u(+1/2, +1/3)$, $d(-1/2, +1/3)$, $s(0, -2/3)$ とし，バリオン数 1/3 をもたせる．まとめて q_i と書くことにすると，反クォーク（$\bar{q}_i$）は，粒子と逆の量子数をもち，中間子は $q_i\bar{q}_j$，バリオンは $q_iq_jq_k$ の組み合わせとなる．西島-ゲルマンの法則により，粒子のもつ電荷 Q は陽子電荷を単位として

$$Q=I_3+\frac{B+S}{2}=I_3+Y \tag{1.5}$$

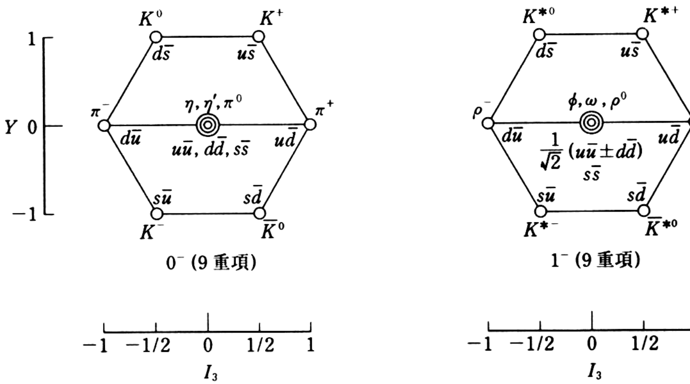
で与えられる．q は $SU(3)$ 表現空間の 3 次元基底ベクトルであるので **3**，$\bar{q}$ を **3*** と表せば，クォークの複合体 $q\bar{q}$ は $3\times3=9$ 次元の基底ベクトルをつくるが，組み合わせの対称性により細分化可能（可約）である．群論の規約に従って既約化すると，

$$3\otimes 3^{*}=1\oplus 8 \tag{1.6 a}$$

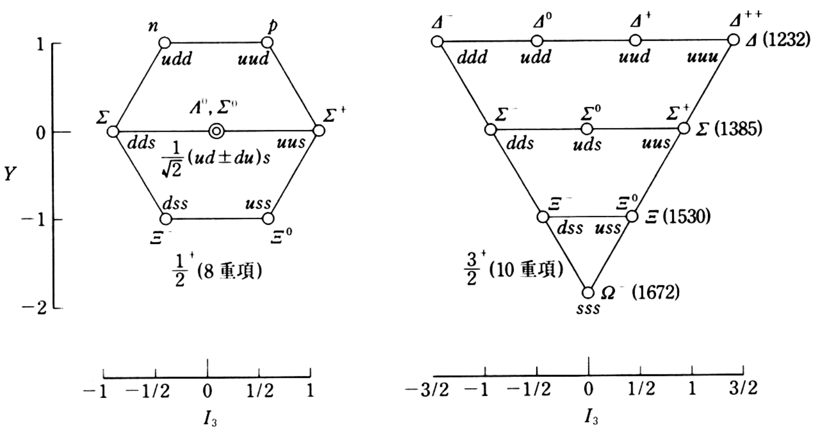
のように分解できる（付録 F）．同様にバリオンは

$$3\otimes 3\otimes 3=1\oplus 8\oplus 8\oplus 10 \tag{1.6 b}$$

と表せる．バリオンの 1 重項は 3 個のクォークの入れ替えに対し完全反対称であり，10 重項は完全対称である．2 組の 8 重項は混合対称性をもつ，クォークには強い相互作用が働いて，複合体としてのハドロンにまとめているとする



(a)



(b)

図 1.1　メソンとバリオンの多重項

(a)　0^- と 1^- の 9 重項が $q_i\bar{q}_j$ でつくれる．

(b)　$q_iq_jq_k$ から $1/2^+$ の 8 重項と $3/2^+$ の 10 重項がつくれる．

と，基底状態は軌道角運動量 $L=0$ の S 状態と考えられる．基底状態は香りとスピンの組み合わせであるから，スピン上向きと下向きのクォークの入れ替えで，$SU(6)$ 対称性が成立するはずである．基底ベクトル

$$(u\uparrow, u\downarrow, d\uparrow, d\downarrow, s\uparrow, s\downarrow)$$

を（香り，スピン）で分けて (3, 1/2) のように表すと，メソンとバリオンはそれぞれ次のような多重項に分類できる．

メソン：　$$\mathbf{6}\otimes\mathbf{6}^* = \mathbf{1}\oplus\mathbf{35} \tag{1.7 a}$$

$$= (1, 0)\oplus(1, 1)\oplus(8, 0)\oplus(8, 1) \tag{1.7 b}$$

バリオン：　$$\mathbf{6}\otimes\mathbf{6}\otimes\mathbf{6} = \mathbf{20}\oplus\mathbf{70}\oplus\mathbf{70}\oplus\mathbf{56} \tag{1.8 a}$$

$$\mathbf{56} = (8, 1/2)\oplus(10, 3/2) \tag{1.8 b}$$

実験的には，スピン 0 と 1 のメソンでは 1 重項と 8 重項が確立しており（合わせて 9 重項という），バリオンでは完全対称な 56 重項，すなわちスピン 1/2 の 8 重項とスピン 3/2 の 10 重項が確立している（図 1.1）．バリオンの **20**, **70** などは混合対称性をもち，$L\neq 0$ の励起状態として，その存在を確認する実験が今日でもなされ，素粒子表改訂作業が続けられている．

1.4.2　カラー自由度

$SU(3)$ の 10 重項は，$\Delta^{++}(1232) = u\uparrow u\uparrow u\uparrow$, $\Omega^- = s\uparrow s\uparrow s\uparrow$ などの配位をもち，同一粒子 3 個の複合体の波動関数が香りとスピンの入れ替えについて完全対称である．クォークはスピン 1/2 のフェルミ粒子であるので，フェルミ統計を満たすためには余分の自由度を導入する必要性があり，カラーと名付けられた．3 個の粒子で全反対称な組み合わせをつくるためには，カラーの自由度は 3 でなければならず，カラー自由度もまた $SU(3)$ に従う．クォークは香りとは独立にカラー自由度をもつことになり，それを R, G, B（赤，緑，青）と名付ければ，クォークの種類は一挙に 3 倍増する．カラー自由度の合成は，香りの自由度の合成と数学的には全く同等であり，式 (1.6) により分類されるので，バリオンでは完全反対称な 1 重項のみが実現されていることになる．カラー1 重項は $q\bar{q}$ の組み合わせでも実現できることは，(1.6 a) から明らかである．

実験的には単独のクォークは発見されていない．またハドロンについては

$q\bar{q}$ と qqq の組み合わせのみが確立されており，qq や $\bar{q}\bar{q}$，$qqqq$ などに相当するハドロンは発見されていない．これらの組み合わせではカラー1重項はつくれないので，どうやらカラー1重項のみが世の中に実現されているらしい(カラーの閉じ込め)．そうとすればクォークが単独で存在できないのも説明できる．$qq\bar{q}\bar{q}, qqqq\bar{q}$ ではカラー1重項がつくれるのでそのようなエキゾティック粒子が存在するはずであるが，実験的にはまだ確立していない．

強い力の源がすべてのクォークが等しくもつカラーであり，そして u, d, s クォークの質量がほぼ等しいならば香りの $SU(3)$ が実現していることの説明がつく．さらにカラースピン交換力（電磁場の磁気能率相互作用に対応するカラー相互作用）を用いた現象論的な質量公式によるハドロン質量スペクトル再現の成功などで，強い力の数学的枠組みとして $SU(3)$ ゲージ理論が浮かび上がってきたのは自然な成りゆきであった．

カラー自由度存在の証拠としては，上に述べた対称性からの要求のほかに，$e\bar{e} \to$ ハドロン反応の R 値（(3.17) 式），$\pi^0 \to 2\gamma$ 崩壊率，ドレル-ヤン (Drell-Yan) 過程（§3.7参照），$W^{\pm}, Z$ のハドロン崩壊幅（第6章，第7章参照）など，数多くの実験的証拠がある．何よりの明白な証拠は，カラーを力の源泉とするQCDが標準理論として，原理的にはすべてのハドロン現象を矛盾なく説明できる事実にある．

1.4.3 閉じ込め

クォークは単独で取り出すことはできない（閉じ込め）と考えられている．その理由づけは以下のように考えられている．カラーの自由度をあらわにもつ(カラー1重項でない) クォーク間に，距離とともにエネルギーの増加するポテンシャルが働けば，無限大の距離（実験的に測定できる程度の距離）には引き離せないであろう．このポテンシャルはクォークをつなぐ紐の役割を果たす(ハドロンの紐モデル)．

この紐の回転エネルギーを考察して，角運動量と全エネルギーとの関係からポテンシャルの形を推察しよう．クォーク間のポテンシャルを

$$U(r) = kr^n \tag{1.9}$$

とする．クォークの質量を無視して，紐が全エネルギーを担っているとする．

古典的に考えると，紐の長さ dr あたり d$U=nkr^{n-1}$dr のエネルギーが蓄えられている．この紐がたわまずに回転すれば，遠心力と紐の張力が釣り合って安定状態をつくる．いま，端 $(r=R)$ では光速で走っているとしよう．この場合，中心から距離 r にある部分の速度 v は r/R であるから，質量（全エネルギー）は，

$$M=\int\frac{\mathrm{d}U}{\sqrt{1-v^2}}=2\int_0^R\frac{nkr^{n-1}\mathrm{d}r}{\sqrt{1-v^2}}=nkR^nI_{n-1} \qquad (1.10\,\mathrm{a})$$

で与えられる．I_n は次式で与えられる定数である．

$$I_n=2\int_0^1\frac{y^n\mathrm{d}y}{\sqrt{1-y^2}}=\begin{cases}\pi & (n=0)\\ \pi/2 & (n=2)\end{cases} \qquad (1.10\,\mathrm{b})$$

一方，角運動量 J は，

$$J=2\int_0^R\frac{nkr^{n-1}\mathrm{d}r(rv)}{\sqrt{1-v^2}}=nkR^{n+1}I_{n+1} \qquad (1.10\,\mathrm{c})$$

となるから，M と J から R を消去すれば

$$J\propto M^{\frac{n+1}{n}} \qquad (1.11)$$

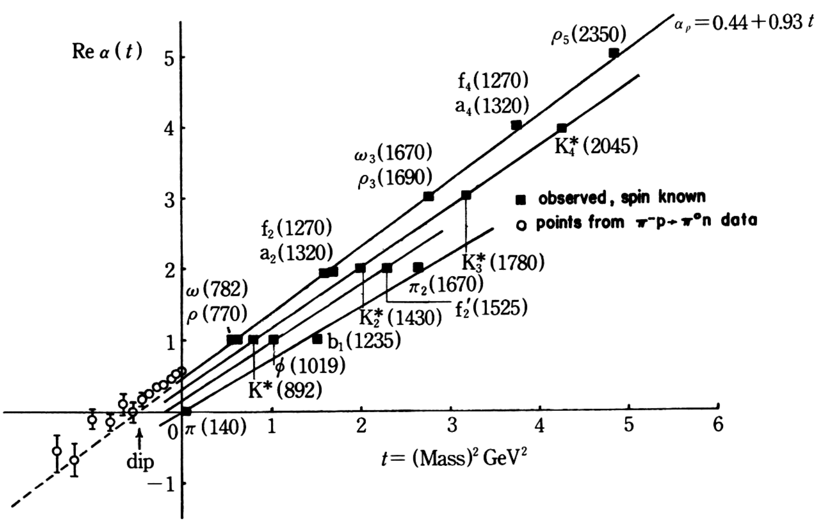


図 1.2 レッジェ軌跡

スピン以外の量子数の等しいハドロンは $J=J_0+\beta M^2$ の関係にある．図で Re $\alpha(t)=J$, $t=M^2$ である．β はどの軌跡でもほぼ 0.93 GeV^{-2} となる．

が得られる．実験的には，$J=J_0+\beta M^2$ ($\beta=0.93\,\mathrm{GeV}^{-2}$) が良い精度で成立しているので (レッジェ軌跡という：図 1.2 参照)．$n=1$ でなければならない．定数 J_0 は量子効果で生じたと見なせる．このときの k を，エネルギーと角運動量の関係式 (1.10) から求め，実験値を入れると

$$
\begin{aligned}
k &= 1/(2\pi\beta\hbar c) \simeq \hbar c/(0.5\,\mathrm{fm})^2 = \hbar c/(0.5\times10^{-15}\,\mathrm{m})^2 \\
&\simeq 0.85\,\mathrm{GeV/fm} = 1.4\times10^5\,\mathrm{Newton} \simeq 14\,\text{トン}
\end{aligned}
\tag{1.12}
$$

すなわち，色荷をもつクォーク同士には，1 fm あたり 1 GeV 程度の力が働く．この力は距離に関係なく一定であるので，巨視的な距離，たとえば 1 m に離すには 14 トン・m もの仕事が必要である．このような莫大なエネルギーをクォーク単体に与えることは不可能であり，閉じ込めが成立する．

閉じ込めの物理的描像は，超伝導体との類推から得られる．磁気力の強さは r^{-2} に比例するが，これは磁極から出る磁束密度が空間的に r^{-2} で広がることに対応している (電気力のクーロン則と同じ：図 1.3 (a) 参照)．磁力線は超伝導体の中には，侵入長 δ 程度しか侵入できないが (マイスナー効果)，太さ δ 程度の束になればより深く侵入できて，超伝導体を貫ける (第 2 種超伝導体)．その磁束 Φ_0 は $2\pi\hbar c/Qe$ の単位で量子化される (§ 2.3 参照)．Qe は超伝導を担う場 (クーパー対) の電荷である．磁束に沿った束の中では超伝導状態は破れている．超伝導体内に N (北極) と S (南極) 2 個のモノポール (磁気単極子) があったとすると，N 極から出た磁束は，他方の S 極に集結する．この磁束のつくる磁場はモノポールから $\lesssim\delta$ 程度の距離では，通常のクーロン則に従うであろう．しかし，2 個のモノポールから十分離れているときは，磁力線は太さ δ の束となる (図 1.3 (b))．このときの磁束密度は磁束に沿って一定であるから，距離とともに減衰しない力すなわち閉じ込めの力が得られる．束となった磁束はあたかも紐のように振る舞い，単位長さあたり一定のエネルギー $k_{sc}\sim\Phi_0{}^2/\pi\delta^2=\hbar c/\alpha\delta^2$ をもつ．

QCD は，カラー自由度に基づくゲージ理論であるから，カラーのつくる場は QED の電磁場と大いなる類似性がある．しかし，ゲージ場の非アーベル性により異なる点もあり，真空は色 (電磁) 場の超伝導相状態になっていると考える．ただし，電気と磁気の役割は入れ換える．超伝導を担うのは色 (電) 荷をもつ場であり，紐は真空を突き抜ける色荷の束である．閉じ込めの働く距離を r_c とす

れば，紐の単位長さあたりのエネルギーは，$k \sim \hbar c / \alpha_s r_c^2$($\alpha_s = g^2/4\pi$ は QCD の結合の強さ）で与えられるであろう．$\alpha_s \simeq 1$ とすれば，(1.12) と比べて $r_c \simeq$ 1fm となる．これはハドロンのサイズである．

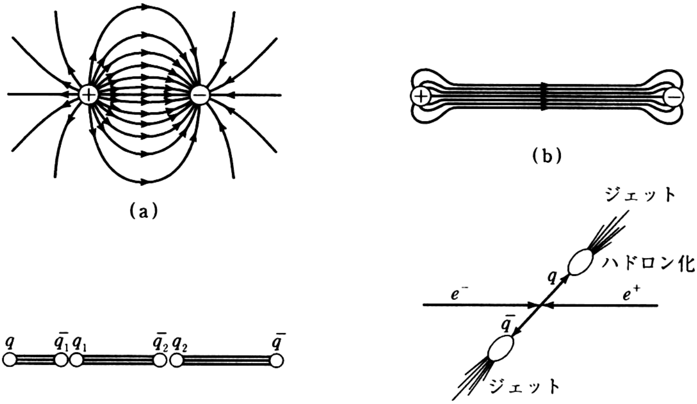


図 1.3 閉じ込めの超伝導モデル

(a) クーロン法則に従う電気力線．電束密度 $\propto r^{-2}$.
(b) 超伝導体内の磁力線．N 極（+）から出た磁力線は束になって S 極（−）につながる．磁束密度は束に沿って一定．
(c) クォーク間には，カラー紐ができ，紐が切れてたくさんのクォーク対（ハドロン）が発生する．
(d) e^-e^+ により発生した高速で 180°方向に飛び去るクォーク対はハドロン化して 2 個のジェットを発生する．

高エネルギーで逆方向に飛ぶ $q\bar{q}$ 対（たとえば電子衝突型加速器の反応：$e\bar{e} \to q\bar{q}$ でつくる）は，高速で伸びつつある紐をつくる．この紐には，~1GeV/fm の膨大なエネルギーが蓄えられる．真空のゆらぎで紐の途中には $q'\bar{q}'$ 対が発生するから，これがもとの q もしくは $\bar{q}$ とカラー1 重項をつくればハドロンとなり，ハドロン間には閉じ込めのポテンシャルは存在しない．逆にいうと，紐がちぎれても単独のクォークは現れず，紐の両端には必ずクォークがついている．これは，棒磁石を切断しても，単独の N 極と S 極は得られずに二つの棒磁石が現れるのに似ている．この結果，クォーク間の距離が~1

fm 程度を超えると，距離を伸ばすよりは真空から $q\bar{q}$ 対を拾い物質化して紐を切ってしまう方がエネルギー的に得するので，もとの $q\bar{q}$ をつなぐ線上に多量のハドロン（1 番軽い π が最もつくられやすい）が発生する（図 1.3 (c)).これらの多数のハドロンはもとのクォークの方向を覚えており，その方向に集中して出るのでジェットとなる（図 1.3 (d)).グルーオンも同じ理由でジェットとして観測される.

QCD をガイドラインとしたジェット発生モンテカルロプログラムは，ジェット現象の多彩な性質をきわめてよく実験的に再現する（第 8 章，第 9 章参照).“クォークの閉じ込め”法則は，理論的に完全な証明はまだできていないが，QCD の非アーベルゲージ理論の性質から導けると信じられている．実際，非摂動論的手法である格子ゲージ理論を使って，閉じ込めの性質を定性的に導くことには成功している．それゆえ，カラー（クォークとグルーオン）の閉じ込めは，今日ほとんど既定の事実として受け入れられている.

参考文献

1) Y. Fukuda *et al.*: *Phys. Lett.*, **B436** (1998) 33, *Phys. Rev. Lett.*, **81** (1998) 1562
2) PDG (Particle Data Group): Review of Particle Properties, *Phys. Rev.*, **D54** (1996) 1, *EPJ.*, **C3** (1998) 1
3) S. Sakata: *Prog. Theor. Phys.*, **16** (1956) 686
4) M. Ikeda, S. Ogawa and Y. Ohnuki: *Prog. Theor. Phys.*, **22** (1959) 715

2
ゲージ理論

2.1 歴史的背景

1970年代からおよそ20年間における高エネルギー物理学の発展は，われわれの物質観を完全に変えた．歴史上はじめてわれわれは物質が何でできているか，それらを支配する法則は何かという疑問に答えられると感じはじめている．ここまでいい切ることは自然に対する謙虚さに欠けるのではないかという感想をもたれるかもしれない．しかし，それほどに高エネルギー物理学界におけるゲージ理論の成功と，素粒子論における意識革命は大きかったのである．物理学史上，相対性理論，量子力学の創成に並ぶエポックメーキングな現象といってよい．ゲージ原理はいまや相対性原理，量子原理とならぶ宇宙の根本原理と見なされている．

しかし，こうして発見されたゲージ原理は，決して新しいものではなかった．マクスウェル理論がゲージ原理を満たすことはよく知られていたし，ワイルが最初のゲージ理論を発表したのは，一般相対性理論の発表直後の1918年であった[1]．ゲージ原理がすべての力を支配する根本的な宇宙原理であると理解するのに，なぜかくも長い年月を必要としたのであろうか？

まず無矛盾な場の量子論を建設するのに大きく時間を費やしたことである．無限大が繰り込みの手法により処理可能であることが示され，QEDが完成したのは1940年代後半であった．QEDはゲージ場量子理論の原型でもある．これを契機にゲージ理論がもっと発展をしてもよかったのであるが，いくつかの要因がそれを妨げた．一つは，繰り込みの手法が“無限大から無限大を引き算して有限項を出す”というプロセスに頼っているため，数学的に洗練された手

法とはいえなかったこと，もう一つは，当時の理解では強い相互作用現象には摂動計算が適用できず，靴紐の理論（基本的な素粒子は存在せず，すべての粒子は同時にまた他のすべての粒子の構成要素ともなっており，すべて同等であるという素粒子民主主義論）などが一時期幅をきかせるなど，場の理論に対する信頼感はそれほど大きくなかった．

さらに，弱い力や強い力による現象が，ゲージ理論ならばもつべきいくつかの特徴を示さなかったことがあげられる．ゲージ原理に従う現象であるならば，第1にクーロン力のように長距離力でなければならないのにどちらも短距離力である．現在は，それぞれ違う原因，弱い力は対称性の自発的破れによって，強い力は閉じ込めによって，本来もつべき特徴が隠されていることがわかっている．こうした現象の本質を把握しえたのは，物質の究極構成要素としてのクォークとレプトンの存在の認識であった．ハドロンの多様なスペクトルと反応現象，弱い相互作用現象などが，わずか2～3種のクォークおよびレプトンで整理することができて，基本的なレベルで力の働く枠組みを見通しよくしたことが，力の本質を見ぬく大きな要因であった．

ゲージ理論の第2の特徴は普遍性にある．重力や電磁力の強さは，それぞれ質量および電荷のみにより，物質の種類形態に無関係である．重力は長距離性，普遍性ともに満たしているが，一般相対性理論の数学的複雑さゆえにこれもまたゲージ理論の一形態であることは，1956年内山[2]が指摘するまで誰も気がつかなかった．

第3にゲージ力の源は保存量である．重力の源である質量（エネルギー），電磁力の源である電荷は厳密に保存することが知られている．これに反して，強い力や弱い力には相当する保存量がなかった．少なくもわれわれの眼には見えなかったのである．その原因は，長距離力が近距離力になるのと同じ理由による．

第4に強い力や弱い力では，力が働くことにより物質の変換が起こる．例えば，陽子と中性子に核力が働くと互いに入れ替わる．このような場合にまでゲージ理論を拡張するヤン-ミルズの定式化[3]があってはじめて，強い力や弱い力もゲージ理論として見直そうという気運ができたのである．

また，ゲージ理論に従う力はカレントにより引き起こされる．カレントとは

電荷および電荷が運動することにより生じる電流を成分とするローレンツベクトルのことであり，これに伴って，相互作用もベクトル型となる[*1)]．弱い相互作用は，普遍性，ベクトル結合の特徴をもつことがヒントとなり，これもまたゲージ理論に違いないとの確信が統一理論としてのGWS理論の発見につながったといってよいであろう．弱相互作用と電磁相互作用には強い類似性があり，CVC仮説[*2)]で見たように共通部分もある．両者の融合は1960年グラショウ[4)]により定式化された．しかし，ゲージ粒子やレプトンなどに質量を付加する機構がなく正しい理論体系としては不完全であったものを，1967年ワインバーグとサラム[5)]が自発的対称性の破れを採り入れて整合性のある理論に組み上げ，それが実際に繰り込み可能であることを，1971年にト・フーフトが証明して[6)]，電弱統一理論が完成したのである．

QCDに関しては誰が発明したかその経緯はあまりはっきりしていない．数学的形式はヤン-ミルズ理論でつきているので，物理現象において，カラーが力の源泉であり，かつ$SU(3)$対称性をもつことに気づきさえすればよかった．歴史的には，まずハドロンスペクトロスコピーにおけるクォークモデルの成功とカラーの発見があり，MIT/SLACの深非弾性散乱におけるスケーリングとパートン描像の成功があった．また，ハン-南部らによるカラーを力の源泉とした$SU(3)$を含む理論の提唱もあった[7)]．転回点は，1973年のグロス-ウィルチェック-ポリッツァーによる漸近自由の発見にあり[8)]，この時点でQCDが強い力の理論として浮上したといえよう．

これからの話は少し長い道のりになるので，いままでの考察の整理をしたうえで，これからの議論，3段構えの論法の筋道を予告しておこう．

---

*1) 重力は力の源が，それ自身ローレンツベクトルであるエネルギー運動量であるため，2階のテンソル型となる．このため力の伝達粒子は通常スピン1をもつが，グラヴィトンはスピン2をもつ．

*2) Conserved Vector Curreut Hypothesis：弱相互作用の荷電カレントは，$J_{W\pm}{}^{\mu}=V_{\pm}{}^{\mu}-A_{\pm}{}^{\mu}$のように極性(polar)ベクトル部分$V_{\pm}{}^{\mu}$と軸性(axial)ベクトルカレント部分$A_{\pm}{}^{\mu}$の和であり，かつともに電荷を変える演算子$(\tau_{\pm})$を含むのでアイソスピンカレントでもある．このうちベクトルカレントが保存する$(\partial_{\mu}V_{\pm}{}^{\mu}=0)$というのがCVC仮説である．一方，電磁相互作用を引き起こす電流$J_{EM}{}^{\mu}$は中性ベクトルカレントであるが，$J_{EM}{}^{\mu}=Y^{\mu}+V_3{}^{\mu}$のようにハイパーチャージカレントとアイソスピンの第3成分τ_3に比例する$V_3{}^{\mu}$との和で書ける．CVC仮説は$V_{\pm}{}^{\mu}$と$V_3{}^{\mu}$が一つのアイソスピンカレントの異なる成分であることを示す．

(1)　まず，数学的で抽象的なゲージ原理の概念に，重力現象との対応をつけることによって幾何学的な解釈を施し見通しをよくする．

(2)　ゲージ対称性をアイソスピンを含む一般ゲージ変換にまで拡張する．(1) の幾何学的解釈を使えば，ヤン-ミルズゲージ理論（非アーベル理論ともいう）が，論理的にかつ自然に導けることを示す．非アーベル理論の定式化により，荷電カレント現象である弱相互作用を，ゲージ理論の枠組みで取り扱うことが可能になった．また，非アーベル理論では漸近自由（近距離で力が弱くなる）が実現するという認識が，強い力のゲージ理論 QCD の形成につながる．

(3)　W 粒子は質量をもち，その結果として弱い力は短距離力となっている．弱相互作用がゲージ理論に従うにせよゲージ対称性は破れており，その結果として繰り込み不可能になっている．ゲージ対称性とゲージ粒子の質量をどう両立させるかという問題を，対称性の自発的破れとヒッグス機構という概念を導入して解決する．

(4)　ゲージ対称性および自発的対称性の破れの繰り込みにおける役割を議論する．

(5)　最後に，電磁力と弱い力を結びつけ，自発的対称性の破れを組み合わせて，無矛盾な電弱統一理論をつくる方法を解説する．

2.2　ゲージ理論の幾何学的解釈

2.2.1　ゲージ原理

ゲージ変換とは場の位相を変える自由度である．抽象的な概念であるので，とりあえず数学的な表現を定義しておいて物理的な解釈は後からつけることにしよう．最も簡単な位相変換は，ψ を複素場，α を任意の実数として

$$\psi \to \psi' = \mathrm{e}^{-i\alpha}\psi, \qquad \psi^\dagger \to \psi'^\dagger = \psi^\dagger \mathrm{e}^{i\alpha} \tag{2.1}$$

で与えられる．このような変換を $U(1)$ ゲージ変換という．$U(1)$ ゲージ変換でラグランジアンが不変であればネーターの定理から保存カレント j^μ が存在し

$$\partial_\mu j^\mu(x) = 0 \tag{2.2}$$

これから，第 0 成分を空間積分した

$$Q=\int j^0 \mathrm{d}^3 x \tag{2.3}$$

は時間によらない保存量であることが導ける．これを一般的に電荷[*3)]と呼ぶことにする．ディラック場でつくる $j^\mu=q\overline{\psi}(x)\gamma^\mu\psi(x)$ はそのような保存カレントであった．場の量子論では Q は演算子であり，式 (2.1) の変換の生成演算子となる．したがって，位相角 α は実は場の電荷量 q に比例するので，以下は $q\alpha$ のように q を抜き出して書くことにする．

位相変換をなぜゲージ変換というのか？　もともとワイルが提案したのは，時空の各点で長さの基準（ゲージ）を変えても物理法則は変わらないという要請であった．この言葉が，今日の位相変換にも転用され定着してしまったという歴史的経緯がある．われわれの遭遇した最初のゲージ変換はマクスウェル方程式のポテンシャルのとりかたの自由度のことであった．しかし，古典電磁気学ではポテンシャルは物理的意味をもたず，時空の 2 点におけるポテンシャルの差つまり微分のみが物理的意味をもち，電場または磁場として観測される量である．ポテンシャルそのものは単なる数学的手段と見なされた．量子力学における波動関数の位相も同じような意味合いをもつ．波動関数は自乗してはじめて確率という物理的意味をもつので，位相そのものは物理的意味をもたない．しかし二つの波動関数の位相の差は干渉という形で観測可能な量である．位相変換不変性から電荷保存則が導かれること，電磁ポテンシャルは電荷が源になっていることを考えると，一見関係ない複素場の位相と電磁ポテンシャルはどこかで結びついていると考えられる．まず，古典電磁気学のゲージ変換は任意の時空点で自由に選べたことを思い起こそう．つまり，α を時空変数 x の関数として

$$A_\mu(x) \longrightarrow A_\mu(x)+\partial_\mu\alpha(x) \tag{2.4}$$

という変換でマクスウェルの方程式は不変であった．そこで場の位相変換の位相 α も任意の時空点で自由に選べる，つまり $\alpha\to\alpha(x)$ としてみよう．このような変換を局所ゲージ変換 (local gauge transformation) という．これに比べて場所によらないゲージ変換を大域 (global) ゲージ変換ということにする．

*3) 通常の電荷と区別したいときは，超電荷（ハイパーチャージ）と呼ぶ．

いま，自由粒子場の従う方程式を

$$\Lambda(\partial_\mu)\psi(x)=0 \tag{2.5 a}$$

のように書くと（$\Lambda(\partial)$ は，通常 ∂ の 2 次までの多項式である），位相変換した場に対する微分演算は，

$$\partial_\mu[\mathrm{e}^{-iq\alpha(x)}\psi(x)]=\mathrm{e}^{-iq\alpha(x)}[\partial_\mu-iq\partial_\mu\alpha(x)]\psi(x) \tag{2.6}$$

となるので，粒子場の運動方程式は局所位相変換に対して不変ではない．一方電磁場と相互作用している系の粒子場の方程式は，解析力学やシュレーディンガー方程式でよく知られているように，微分 ∂_μ を $\partial_\mu+iqA_\mu$ で置き換えて，

$$\Lambda(\partial_\mu+iqA_\mu(x))\psi(x)=0 \tag{2.5 b}$$

として得られる．方程式が (2.5 b) の形をしていれば，ψ の位相変換とポテンシャル A_μ のゲージ変換 (2.4) を同じ $\alpha(x)$ を使って同時に行えば，$\alpha(x)$ の微分から出る項とポテンシャルによる項が相殺され，運動方程式は局所ゲージ変換で不変となる．自由場の方程式 (2.5 a) に (2.5 b) の置き換えをすれば電磁場との相互作用が得られることは，ミニマム相互作用という名で知られる経験的な事実であった．それが局所ゲージ不変性を満たすのは偶然ではないとすれば，力学原理としてのゲージ原理が成り立つはずである．

ゲージ原理：運動法則は局所ゲージ変換で不変である．

共変微分 D_μ を

$$D_\mu=\partial_\mu+iqA_\mu(x) \tag{2.7}$$

で定義し，ψ および D_μ の中の A_μ をゲージ変換したものを ψ', D_μ' とすれば

$$(D_\mu\psi)'=D_\mu'\psi'=\mathrm{e}^{-iq\alpha(x)}D_\mu\psi \tag{2.8 a}$$

$$\therefore\quad \Lambda(D_\mu')\psi'(x)=\mathrm{e}^{-iq\alpha(x)}\Lambda(D_\mu)\psi(x) \tag{2.8 b}$$

である．したがって，ゲージ原理とは自由場の運動方程式

$$\Lambda(\partial_\mu)\psi(x)=0 \tag{2.5 a}$$

が与えられるとき，局所ゲージ不変性を満たす式

$$\Lambda(D_\mu)\psi(x)=0 \tag{2.9}$$

が相互作用をする系の運動方程式であることを要求する．実際，後に述べる電磁気と弱相互作用の統一理論，強い相互作用の QCD はすべてこの原理に立脚する．また内山は，重力の理論である一般相対性理論もまたこのゲージ原理に基づくことを証明したのであった．そのような意味で，ゲージ原理は，相対性

原理，量子原理とならぶ根本原理なのである．ゲージ対称性とは非常に抽象的な概念であるのでなかなか解釈がむずかしい．これまでは数学的操作だけを示してこれがゲージ対称性ですと説明したが，数式の背後にある物理的概念を把握するには何らかの意味づけが必要である．そこで同じゲージ原理に立脚する理論でも，重力理論には直観的にわかりやすい幾何学的意味づけが，すでに一般化しているので，一般相対論との比較をしながらゲージ理論の幾何学的解釈を試みよう．

2.2.2 内 部 空 間

a. 場は内部空間におけるベクトル

物理現象を記述するには座標系を設けなければならないが，現象そのものは座標系のとり方にはよらないはずである．日本で実験してもアメリカで実験しても物理結果は同じであるが，これを座標の並進対称性という．並進対称性からエネルギー運動量保存則が導ける．同じように北を向いて実験しようが東を向いて実験しようが同じ結果がでることを回転対称性といい，これから角運動量保存則が導ける．これに反して，電荷やアイソスピンのような保存則は時空座標とは関係ない内部対称性から導かれると考えられている．上の論法からすれば対応する内部座標がありその座標のとり方によらないことが起源であると考えるのが首尾一貫する．

例えば電荷をもつ粒子は正と負の二つの自由度（粒子と反粒子）をもつ．そこで，場を構成する独立な実場の成分を ϕ_1, ϕ_2 と書くとき，場はこれらを成分にもつ内部空間でのベクトルと考えることができる．この空間での直交基準ベクトルを $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2$ とすると，実場 ϕ は

$$\phi=\phi_1\boldsymbol{e}_1+\phi_2\boldsymbol{e}_2 \tag{2.10}$$

ここで ϕ の表す物理現象が座標系のとり方によらないとすれば，ϕ をこの2次元空間で回転しても物理法則は変わらない．座標軸を α だけ回転すると $\phi\to\phi'$ になるとすると，

$$\phi_1'=\quad\phi_1\cos\alpha+\phi_2\sin\alpha \tag{2.11 a}$$

$$\phi_2'=-\phi_1\sin\alpha+\phi_2\cos\alpha \tag{2.11 b}$$

ここで複素場として，

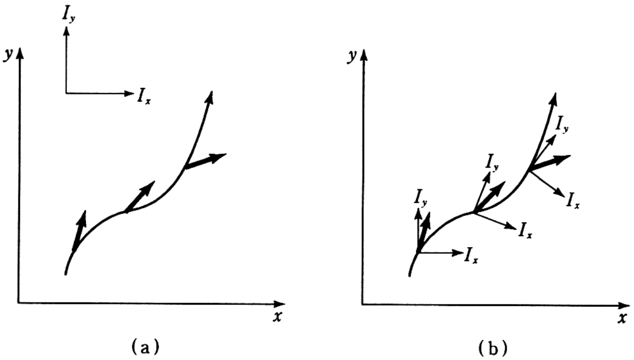


図 2.1 粒子の運動は時間とともに動く一つの軌跡で表せる．そのとき粒子のもつ内部空間でのベクトルの方向も運動とともに変わる．内部空間座標系として一つの全体に共通な座標系（大域座標系）を設定する場合 (a) と，各地点で独立にそれぞれに独立な座標系（局所座標系）を設定する場合 (b) とがある．

$$\psi=(\psi_1+i\psi_2)/\sqrt{2}, \qquad \psi^\dagger=(\psi_1-i\psi_2)/\sqrt{2} \tag{2.12}$$

を定義すれば，

$$\psi'=\mathrm{e}^{-i\alpha}\psi, \qquad \psi^{\dagger\prime}=\psi^\dagger\mathrm{e}^{i\alpha} \tag{2.13}$$

となって，実場の回転は複素場の位相変換に帰着する．

場が内部空間のベクトルであり，運動とともに回転するのであれば，場の運動を指定するためには，時空での軌跡のほかに内部空間でのベクトルの向きを各点で表す必要がある（図 2.1 (a)）．ただし，このベクトルの向きは内部空間の向きであり時空でのベクトルの方向とは関係ないが，ほかにうまい表しようもないので図 2.1 では，内部空間の座標 I_x, I_y も同じ実空間上に描くことにする．大域ゲージ変換は，運動とは関係のないところで時空全体で一斉にベクトルの向きを変えるが，局所ゲージ変換では軌跡の各点で回転角が異なる．このことは，粒子が進行するにつれ局所座標系そのものが回転することを意味する．とはいえ位相は時空の連続関数であるから隣合う点で滑らかにつながることを前提とする．進行につれ回転する座標系とはどのような意味があるのであろうか？　せっかく物理量を座標系を設定して表したのに，次の瞬間には座標系が変わってしまうのでは意味がない．各時空点で異なる座標系を扱うときは両者の比較をする基準を必要とする．

b. 重力の幾何学的解釈

ここで重力の幾何学的解釈を思い起こしてみよう．アインシュタインの一般相対論は，力を受けて軌跡が曲がるという物体の運動を，「物体は直線（厳密には測地線）運動をするが，空間が曲がっているので，曲線運動のように見える」と解釈する．力学を時空の幾何学に置き換えたのである．3次元空間で想像するのはむずかしいので2次元空間で話をすると，図2.2 (a) にあるように物体Aは，他に力を及ぼす物体の存在しないところでは慣性の法則に従い等速直線運動をする．ニュートン力学の解釈では，物体Bがあると引力が働いて物体Aの軌跡が曲がる．アインシュタインの重力理論の解釈では，物体Bがあるとその周りの空間がひずみ，その結果として，物体Aは同じ慣性の

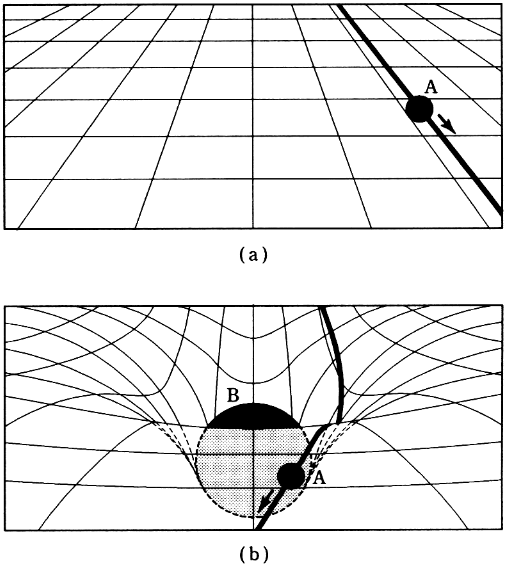


図 2.2 一般相対論における重力の幾何学的解釈

(a) 物体（エネルギー）の存在しない自由空間（図では2次元空間を示す）は平坦で直線直交（デカルト）座標系が存在し，物体Aの運動は等速直線運動をする．

(b) 引力中心の物体Bが存在すると空間がゆがむ．そこにはデカルト座標は存在しない．物体Aはこの空間での直線（測地線）の軌跡を描くが，元のデカルト座標で見ると曲線を描き，物体Aが物体Bの引力を受けて曲がったように見える．

法則に従い等速“直線”運動をしているのにも関わらず，空間のひずみのために軌跡が曲がったように見えると解釈する．その様子を 図2.2 (b) で表す．曲がった空間での直線を定義するときベクトルの平行移動という概念が非常に重要な役割を果たす．

c. ベクトルの並行移動と空間の曲率

平らな平面または空間（ユークリッド空間）であればベクトルの平行移動は非常に明快な概念であるが，曲がった空間での平行移動の理解はいささか努力を要する．円錐面や円筒面は曲がっているが，切って展開すれば平面になるので見かけだけの疑似曲面といえる．円錐面上のベクトルの平行移動は展開面で考えれば理解しやすい．図2.3 (a)，(b) では，平面上の平行ベクトルが円錐面上ではどうなるかを示している．球面上でのベクトルの平行移動は，切り口が中心を通る大円上では理解が容易であるが，それ以外のところではむずかしい．直観的には平らな紙の上に平行なベクトルを墨でたくさん書いておいて，球をこの上で転がせば平行ベクトルがどのように球面上に移されるかの見当が

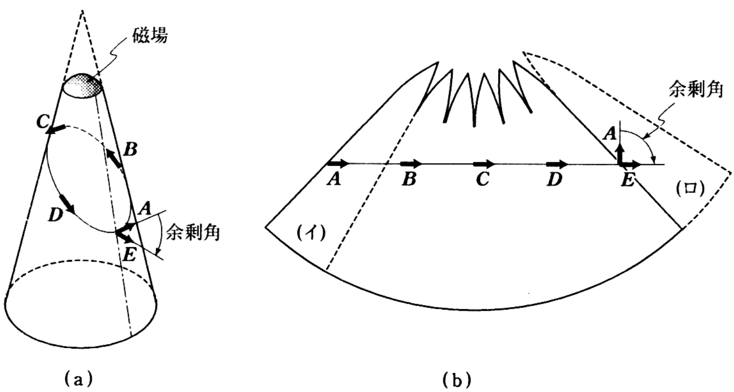


図2.3 曲面上でのベクトルの平行移動．(a) は円錐面，(b) は円錐面を展開したもの．
(a)，(b) ではベクトル $\boldsymbol{A}$～$\boldsymbol{E}$ はすべてベクトル $\boldsymbol{A}$ を直線に沿って平行移動したものである．(b) の点線は円錐面の別の切り口を示す．(イ) の部分が (ロ) に移る．ベクトル $\boldsymbol{A}$～$\boldsymbol{E}$ は至るところ平坦な面上にあるが，領域全体としては曲がっているので，閉曲線を1周したベクトル $\boldsymbol{E}$ は元のベクトル $\boldsymbol{A}$ に一致しない．この差を余剰角という．
アハロノフ-ボーム効果（後述§2.3）は，磁場があるところだけ曲率が0でない先の丸い円錐面に対応する．電子波の通過する道 $\boldsymbol{ABCDE}$ は至るところで曲率が0 ($B=0$) であるが，領域全体としては曲がっているので余剰角（位相差）が生じるのである．

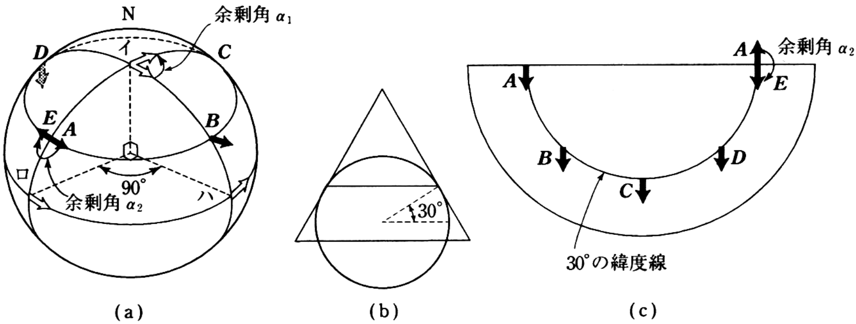


図 2.4　球面上でのベクトルの平行移動

(1)　ベクトル（白ぬき）を，イ（北極）から赤道（ロ → ハ）を通り，再び子午線（ハ → イ）に沿って北極まで平行移動する (a)．大円に沿ってはベクトルの大円に対する角度は変わらないが，元にもどると余剰角 $\alpha_1=90^\circ$ を生じている．イロハイで囲む面積 $\pi R^2/2$ で割れば平均曲率 $1/R^2$ を得る．

(2)　ベクトル（黒塗り）を緯度線に沿って平行移動すると，ベクトルは緯度線に相対的に回転し，1 周すると余剰角 α_2 を生じる．この様子は緯度線に接する円錐 (b) を切り開いて展開面 (c) をつくればわかる．

つく．例えば 30 度の緯度線（図 2.4 (a) の $\boldsymbol{A}$-$\boldsymbol{B}$-$\boldsymbol{C}$-$\boldsymbol{D}$-$\boldsymbol{E}$ の閉曲線）に沿って平行移動するベクトルが，図の黒塗りのベクトルのように回転することは，この緯度線で接する円錐面を切り開いてみれば理解できる（図 2.4 (b), (c)）．これらの図から共通していえることは，曲面上ではある閉曲線に沿ってベクトルを平行移動して元にもどったとき，ベクトルの方向は一般には元にもどらないということである．この角度の差を余剰角[*4)]という．この余剰角が曲面の曲がり具合の目安になる．この余剰角をラジアンで表したものを閉曲線で囲む領域の全曲率といい，領域の面積で割ったものを平均曲率という．

例えば，半径 R の球面を考えよう．図 2.4 (a) で北極点（イ）における白ぬきのベクトルを，まず赤道まで下ろし（イ → ロ），次に赤道に沿って経度にして 90 度動かし（ロ → ハ），そこから子午線に沿って北極点にもどる（ハ → イ）と，元のベクトルとは 90 度ずれた方向を向いていて，イロハイで囲む面積で割ると，平均曲率が $1/R^2$ になることがわかる．円錐面の場合は頂点を囲む閉曲線の場合以外は全曲率が 0 であり，平均曲率も頂点以外は 0 であるので，見かけは曲面でも実際は平らな面であることが曲率の値に正直に現れる．

[*4)] 原語は deficit angle なので，欠損角と訳すのが本筋かもしれない．ここでは余剰角で統一する．

直線（曲がった空間では測地線という）の定義は2点間の最短距離であるが，その軌跡上のすべての接線ベクトルが互いに平行移動によって得られるような軌跡ということもできる．

微分幾何学の教えるところによれば，一般の座標系でA点のベクトル $p^\mu(x)$ を平行移動してB点 $(x+\mathrm{d}x)$ にまでもっていったときのベクトル $p_{/\!/}{}^\mu(x+\mathrm{d}x)$ は，クリストッフェルの接続記号（接続係数）を使い

$$p_{/\!/}{}^\lambda(x+\mathrm{d}x)=p^\lambda(x)-\Gamma^\lambda{}_{\mu\nu}(x)\mathrm{d}x^\mu p^\nu(x) \tag{2.14}$$

と書くことができる．この式を導くときに，p^μ を移動したものはもとの p^μ から線形変換で得られ，短い距離ならば変化量は変位 $\mathrm{d}x$ に比例するという仮定をしている．空間および座標系の性質は $\Gamma^\lambda{}_{\mu\nu}$ の中に入っており，この式で定義した平行移動は任意の空間（曲がった空間）での一般座標系で成立する．というよりは，空間の性質と，座標変換式が与えられればクリストッフェルの接続記号が定まり，ベクトルの平行移動式が（2.14）によって与えられる．このクリストッフェルの接続記号が基準を与えるので，異なる座標系でも論理的に首尾一貫した事象の記述が可能となるのである．

2.2.3　ゲージ場の幾何学的解釈

a.　ゲージ場は接続係数

同様の考察を，われわれの考察する内部空間のベクトルに適用することができる．内部空間ベクトル ϕ を時空内で平行移動したものを接続係数を使って定義できる．一般座標系の接続クリストッフェル記号は4次元時空のベクトル p^μ をつなげるので指標が3個もあり複雑であるが，幸いなことにわれわれの問題にする場の量は内部空間のベクトルではあっても，時空ではスカラー量である．このため時空座標に関しては簡単となり，接続係数 A_μ は指標を一つだけもつ．平行移動の定義は次のようになる．

$$\phi_{/\!/}(x+\mathrm{d}x)=(1-iqA_\mu(x)\mathrm{d}x^\mu)\phi(x) \tag{2.15}$$

こうして接続係数として導入した A_μ が，実は電磁場ポテンシャルにほかならないことはこれからの議論で明らかになる．

接続の意味を考えてみよう．空間がユークリッド空間であり，座標系が直線直交（デカルト）座標系であるときは，ベクトルの成分は平行移動しても変わ

らないので接続係数はあらゆるところで0である．しかし，曲線座標を使うと接続係数が必要となる．一例をあげると，図2.5でA点（座標 $\boldsymbol{x}$）におけるベクトル $\boldsymbol{V}_{\mathrm{A}}=(V_{\mathrm{A1}}, V_{\mathrm{A2}})$ をB点（座標 $\boldsymbol{x}+\mathrm{d}\boldsymbol{x}$）まで平行移動して得られるベクトルを $\boldsymbol{V}_{\mathrm{B}}$ とする．直線直交（デカルト）座標（x, y 方向の単位ベクトル $\boldsymbol{e}_x$, $\boldsymbol{e}_y$ を基底とする）では同じ成分をもつ．

$$(V_{\mathrm{B1}}, V_{\mathrm{B2}})=(V_{\mathrm{A1}}, V_{\mathrm{A2}})\text{：デカルト座標系} \tag{2.16}$$

しかし，極座標を使うと各点での基準座標系（各点での r 方向のベクトル $\boldsymbol{e}_r$ と接線方向のベクトル $\boldsymbol{e}_\phi$ を基底とする）は各点で異なる．すなわち，座標系が移動にともなって回転するので，ベクトル $\boldsymbol{V}_{\mathrm{B}}$ は，各地点で異なった成分をもつ．しかし，式(2.14)のように接続係数を使って $\boldsymbol{V}_{\mathrm{B}}$ を定義しておけば，

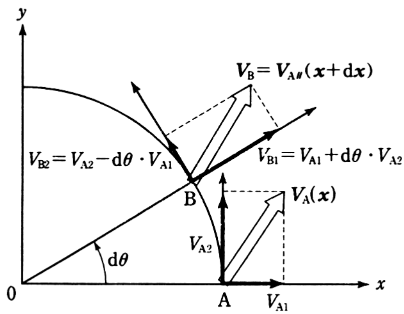


図2.5 曲線座標を使うと接続係数が現れる

A点(x)でのベクトル $\boldsymbol{V}_{\mathrm{A}}$ を，B点($\boldsymbol{x}+\mathrm{d}\boldsymbol{x}$)に平行移動したものを $\boldsymbol{V}_{\mathrm{B}}$ とする．共通の直線直交（デカルト）座標(x, y)を使えば両者の成分は等しい．しかし極座標(r, θ)を使うとA点での基準座標系とB点での基準座標系は $\mathrm{d}\theta$ だけ回転しており成分は等しくない．そこで接続係数を使って平行移動を定義する．上の例ではB点でのベクトルの成分は

$$V_{\mathrm{B1}}=V_{\mathrm{A1}}+\mathrm{d}\theta\cdot V_{\mathrm{A2}}, \qquad V_{\mathrm{B2}}=V_{\mathrm{A2}}-\mathrm{d}\theta\cdot V_{\mathrm{A1}}$$

複素表示にすると

$$\boldsymbol{V}_{\mathrm{B}}=V_{\mathrm{B1}}+iV_{\mathrm{B2}}=\boldsymbol{V}_{\mathrm{A}}-i\mathrm{d}\theta\boldsymbol{V}_{\mathrm{A}}=(1-i\partial_\mu\theta\mathrm{d}x^\mu)\boldsymbol{V}_{\mathrm{A}}$$

したがって，接続係数は

$$A_\mu=\partial_\mu\theta=\left(-\frac{y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}\right)$$

となる．これは平面（という空間の性質）と，その上での回転角を与えられたので，A_μ が計算できた例であるが，一般には A_μ を与えて平行ベクトルを定義する．A_μ のなかに空間の性質情報が含まれている[*5]．

[*5] 微分幾何では一般に，反変ベクトルと共変ベクトルを定義する．基底ベクトルの長さも場所の関数となる．ここでは，極座標の基底ベクトルを単位ベクトルにとって話を簡単化している．

座標系が回転しても $\boldsymbol{V}_{\mathrm{B}}$ が元の $\boldsymbol{V}_{\mathrm{A}}$ と同じ向きをもつベクトルであることが保証される.

各点での基準座標系が,元の座標系に相対的に回転していることが,運動とともに座標系が回転するということの意味である.この例ではもともと平らな平面での違う座標系間の比較であるので,デカルト座標系にもどってみれば,平行の意味は一目瞭然である.しかし,この面が球面であったとすればこの空間はユークリッド幾何学の成立しない曲がった空間であり,そもそもデカルト座標系は存在しえない.

例えば,球面上で同緯度の2点を結ぶ最短距離は,緯度線ではなく2点を結ぶ大円上にあることは,地球儀で航空路をなぞったことのある人は誰でも知っている.接線ベクトルを軌跡に沿って平行移動したものが再び接線ベクトルになっているような軌跡が最短距離の道(測地線)を与えるが,測地線に沿っては緯度線と経度線に基づく座標系は各点で連続的に回転している(回転の大きさと方向は一定ではなく場所の関数である).

座標系は各地点で任意に設定できるものであるが,空間の性質が与えられ,またいったん座標系を設定すると,接続係数はどのように平行移動すればよいか,どのように進めば最短距離となるかを教えてくれる.接続係数が空間の性質の情報を含んでいるとはこのことを意味する.空間が曲がっているとどんな座標変換をもってしても,デカルト座標に移ることはできない.つまり,全空間で接続係数を0にすることはできない.

b. 電磁場は曲率

電磁場ポテンシャルが接続係数としての役割をはたしているならば,接続係数のもつこの幾何学的意味は電磁場が存在すると空間が曲がることを暗示する.ただし,この空間は4次元の時空に内部空間を合わせた超空間である.そこでこの内部空間のベクトルを図2.6の閉曲線に沿って平行移動した場合の余剰角を求めてみよう.$\mathrm{d}x^{\mu}\mathrm{d}x^{\nu}$ のつくる四辺形に沿って回り,ストークスの定理を使えば,

$$\Delta\psi = -iq\oint A_{\mu}\psi \mathrm{d}x^{\mu} \sim -iqF_{\mu\nu}\mathrm{d}x^{\mu}\mathrm{d}x^{\nu}\psi \tag{2.17}$$

$$F_{\mu\nu} = \partial_{\mu}A_{\nu} - \partial_{\nu}A_{\mu}$$

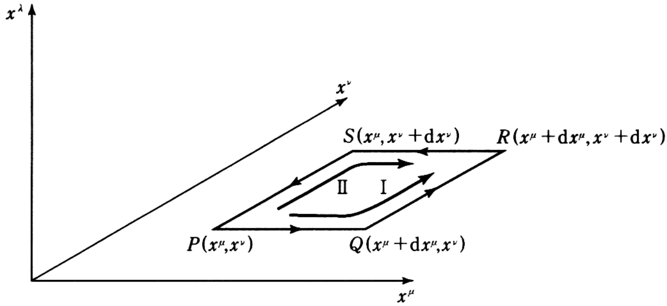


図 2.6 ある点 (x^μ, x^ν) での平均曲率を求めるための閉曲路

である．そのときの余剰角を $\Delta\alpha$, ψ を回転した結果が ψ' になるとすると，$\psi' = \mathrm{e}^{-i\Delta\alpha}\psi = \psi + \Delta\psi$ であるから，$\Delta\alpha = i\ln(\psi'/\psi) \sim i\Delta\psi/\psi$ で与えられる．ゆえに，平均曲率は

$$\Delta\alpha/\mathrm{d}x^\mu\mathrm{d}x^\nu = i\Delta\psi/(\psi\mathrm{d}x^\mu\mathrm{d}x^\nu) = qF_{\mu\nu} \tag{2.18}$$

となり，電磁場はこの超空間での曲率そのものであることがわかる．したがって，電磁場が存在することはこの空間の曲率が有限であること，つまり空間が歪んでいることを意味する．

c. 曲率を決める方程式

マクスウェルの方程式は電荷や電流が存在すると超空間が歪むこと，超空間の曲率が電荷の分布で決まることを意味する．

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = qj^\nu \tag{2.19}$$

そこで，次の解釈が成立する．

> “ゲージ場は時空と内部空間を合わせた超空間での接続係数であり，電磁場はこの超空間の曲率である．この超空間の曲率は電荷分布により決まる．”

上の論理は重力理論に完全に平行している．クリストッフェルの接続を閉曲線上で動かすと，時空の曲率（リーマンの曲率テンソル）を得る．アインシュタインの方程式

$$R^{\mu\nu} - (1/2)g^{\mu\nu}R = -(8\pi G_N/c^4)T^{\mu\nu} \tag{2.20}$$

は，時空の曲率テンソル $R^{\mu\nu}$（と曲率 $R = g_{\mu\nu}R^{\mu\nu}$）を決める方程式であり，決める要因はエネルギー運動量テンソル $T^{\mu\nu}$ すなわち物質の分布である．G_N は

万有引力定数である．$R^{\mu\nu}$ はリッチのテンソルといい，リーマンの曲率から指標を縮約して得られるが，この式の精密な定義[*6)]はこの際重要でない．何が何を決めるという物理的因果関係のみを把握してほしい．重力の方程式は，時空の曲率がエネルギー運動量テンソルつまり物質の分布で決まることを意味する．

2.2.4 等価原理と共変微分

a. アインシュタインの等価原理

再び微分幾何学の教えに習うと，平行移動が定義されれば一般座標系での微分が定義できる．

$$\frac{D\psi}{Dx}=\lim_{\mathrm{d}x\to 0}\frac{\psi(x+\mathrm{d}x)-\psi_{/\!/}(x+\mathrm{d}x)}{\mathrm{d}x} \tag{2.21 a}$$

(2.15) を使えば

$$D_\mu\psi=\partial_\mu\psi+iqA_\mu\psi \tag{2.21 b}$$

これを共変微分という．共変微分は接続係数が 0 の場合（直線直交座標系の場合）通常の微分に一致する．共変微分で書いた方程式は共変である．すなわち，方程式は，任意の一般座標変換で同じ形を保つという一般相対性原理を満たす．このこと自体は幾何学の問題であり物理的内容は何もない．物理は自然の選択する空間が何かを見きわめ，その空間でどのような運動方程式が成り立つかを決めることにある．時空の性質はアインシュタインの方程式で決まる．質点の運動方程式は次のようにして決められる．アインシュタインは，等価原理“重力とは加速系における慣性力である”を要求した．等価原理は，どんな

---

*6) 一般相対論では，時空の計量を，$\mathrm{d}s^2=g_{\mu\nu}(x)\mathrm{d}x^\mu\mathrm{d}x^\nu$ で定義し，$\mathrm{d}s^2$ を不変にする一般座標変換を扱う．クリストッフェルの接続係数は

$$\Gamma^\lambda{}_{\mu\nu}(x)=(1/2)g^{\lambda\rho}(\partial_\mu g_{\rho\nu}+\partial_\nu g_{\rho\mu}-\partial_\rho g_{\mu\nu})$$

で与えられ，ベクトルの平行移動は

$$p_{/\!/}{}^\mu(x+\mathrm{d}x)=p^\mu(x)-\Gamma^\mu{}_{\lambda\nu}(x)\mathrm{d}x^\lambda p^\nu$$

で定義される．行列 $[\Gamma_\mu]^\rho{}_\sigma=\Gamma^\rho{}_{\sigma\mu}$ を導入すると，リーマンの曲率テンソル $R^\rho{}_{\sigma\mu\nu}$ とリッチの曲率テンソル $R_{\mu\nu}$ は，

$$R^\rho{}_{\sigma\mu\nu}\equiv[R_{\mu\nu}]^\rho{}_\sigma=-[\partial_\mu\Gamma_\nu-\partial_\nu\Gamma_\mu+(\Gamma_\mu\Gamma_\nu-\Gamma_\nu\Gamma_\mu)]^\rho{}_\sigma$$

$$R_{\mu\nu}=R^\rho{}_{\mu\rho\nu},\quad R^{\mu\nu}=g^{\mu\rho}g^{\nu\sigma}R_{\rho\sigma},\quad R=R_\mu{}^\mu=g^{\mu\rho}R_{\rho\mu}$$

で定義される．

空間であれ局所的には慣性系（ローレンツ不変性の成立する空間）が必ず実現できること，すなわち接続係数を0にする座標変換が，少なくもある一点では必ず存在することを要求する．必ず実現できることは，数学的にはともかく物理的には次のようにしてわかる．アインシュタインの示唆に従いエレベータに乗ってから綱を切るか，これでは気持ちが悪いという人は人工衛星に乗ればよい．いずれにせよ自由落下状態を実現するわけであり，ここには重力が存在しない（図2.7）．

すなわち慣性系が局所的に実現する．慣性系での運動法則

$$\frac{\mathrm{d}p^{\mu}}{\mathrm{d}\tau}=0 \tag{2.22}$$

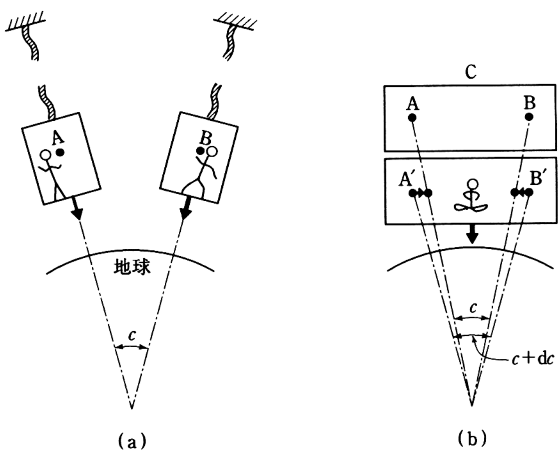


図2.7　等　価　原　理

(a) （クリストッフェルの）接続係数を少なくとも時空の一点（A または B）で0にする座標変換が存在する．エレベータに乗り綱を切ればよい．このエレベータの中は無重力であり，ローレンツ不変性が成立する．

(b) しかし，重力が存在するとき（空間が曲がっているとき），A, B を含む広領域で同時に接続係数を0にする（無重力にする）変換は存在しない．(b) におけるエレベータ内では A 点および B 点にある物体は時間が経つと互いに近よることが観測されるから，慣性系ではない．つまり重力が存在する．このことはローレンツ不変にする座標変換は場所の関数であることを示す．すなわち，局所ローレンツ不変性のみ成立し，大域ローレンツ不変性は成立しない．(a) のエレベータ内では慣性の法則が成立し，それを一般座標変換すれば（エレベータから下りれば）重力下での力学の法則が得られる．

ただし，$p^{\mu}=m(\mathrm{d}x^{\mu}/\mathrm{d}\tau)$ で，τ は固有時 $\mathrm{d}\tau=\mathrm{d}t[1-(v/c)^2]^{1/2}$ は知っているから，ここでの微分を共変微分に置き換えれば一般座標系で成立する運動方程式となる．重力の存在する系にもどるにはエレベータから降りればよい．すなわち，加速度系にもどれば（一般座標変換を施せば）重力が出現する．共変微分で書いてある運動方程式はこの系でも同じ形で成立するから，重力下の運動方程式が得られた．つまり慣性系での運動方程式 (2.22) の微分を共変微分で置き換えた

$$\frac{Dp^{\mu}}{D\tau}=0 \tag{2.23}$$

が重力の存在する空間での運動方程式を与える．これは曲がった空間での測地線を与える．

物質の存在により空間がどのように曲がり，曲がった空間での直線（測地線）がどのようになるかを絵画的に表したのが図 2.2 の絵であった．この曲がった空間で物体は測地線上，慣性系であれば直線であったであろう線上を動く．

b.　ゲージ理論での等価原理

ゲージ理論での等価原理は

> “どんな接続係数（ゲージ場）であれ，ある一点に限れば接続係数（ゲージ場）を 0 にする内部座標変換（ゲージ変換）が必ず存在する”

となる．その条件式は

$$A_{\mu}'(x)=A_{\mu}(x)+i\partial_{\mu}\alpha(x)=0 \tag{2.24}$$

で与えられ，そこでは自由場の方程式

$$\Lambda(\partial_{\mu})\psi(x)=0 \tag{2.25}$$

が成立するから，曲がった空間（電磁場が存在するとき）の方程式は，通常の微分を共変微分で置き換えた

$$\Lambda(D_{\mu})\psi(x)=0 \tag{2.26}$$

でなければならない．すなわちゲージ原理の要求するものと一致する．

いま空間のあらゆるところで接続係数を 0 にできるようなゲージ変換が存在する条件を求めてみよう．式 (2.24) が α について局所的に解ける条件は，α が積分可能であること，すなわち

$$\partial_\mu \partial_\nu \alpha = \partial_\nu \partial_\mu \alpha \tag{2.27}$$

であるので，式 (2.24) とあわせて，

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu(x) - \partial_\nu A_\mu(x) = 0 \tag{2.28}$$

を得る．つまり電磁場の存在しないことが超空間が平坦であることの条件となる．図 2.4 で求めた A_μ はそのような接続係数の例である．この例は，もともとが平坦な空間において人為的に曲線座標を導入した結果として現れた接続係数であるから，適当な座標変換により直線直交座標にもどれること，すなわち全空間で接続係数を 0 にする座標変換が存在することは明白であろう．

c.　重力理論はゲージ理論

重力理論をゲージ理論の立場で再解釈すると，

表 2.1　ゲージ理論と一般相対性理論との対応関係

		ゲージ理論	一般相対論
	対　象	内部 空間	時　　空
大域対称性 (平坦な空間)	座標変換 保存量 運動法則	ゲージ変換 電　　荷 自由場方程式 $\Lambda(\partial)\phi=0$	ローレンツ変換 エネルギー運動量 慣性の法則 $\frac{dp^\mu}{d\tau}=0$ (*)
局所対称性 (曲がった空間)	座標変換	局所ゲージ変換	局所ローレンツ変換 または一般座標変換
	接続係数	ゲージポテンシャル A_μ	クリストッフェル記号 $\Gamma^\lambda{}_{\mu\nu}$
	平行移動	$\phi - iqA_\mu dx^\mu \phi$	$p^\lambda - \Gamma^\lambda{}_{\mu\nu} dx^\mu p^\nu$
	曲　率	電磁場 $F_{\mu\nu}$	リーマン曲率 $R^\lambda{}_{\mu\nu\rho}$
	曲率発生原因	電　荷	エネルギー
	場の方程式	マクスウェル方程式 $\partial_\mu F^{\mu\nu} = qj^\nu$	アインシュタインの方程式 $R^{\mu\nu} - (1/2)g^{\mu\nu}R = -8\pi G_N T^{\mu\nu}$
	運動法則	$\Lambda(D)\phi=0$	$\frac{Dp^\mu}{D\tau}=0$
	等価原理	局所的にポテンシャルの消去が可能	局所的にクリストッフェル接続が消去可能 (局所慣性系の存在)
	全曲率=0 (平坦な空間)	大域的に A_μ の消去可能	直線直交座標の存在 (大域的に $\Gamma^\lambda{}_{\mu\nu}=0$ とできる)

*　τ は固有時を表す．$d\tau = (1-\beta^2)^{1/2} dt$

"慣性系ではローレンツ不変性が成り立つ．ローレンツ変換は位相変換の形をしており，速度と回転角をパラメターとして含む．このパラメターは時空の座標によらないので，大域ゲージ変換に対応する．ローレンツ変換が局所変換であれば，すなわちパラメターが時空の関数であればこれは一般座標変換となる．一般相対性原理は局所ローレンツ不変性といい換えられる．"

重力理論と通常のゲージ理論との大きな違いは，ゲージ変換の場合は平行移動すべき対象が内部空間量であるため，接続係数は時空に関しては指標が1個であり，4成分のベクトルのように振る舞う．また超空間が歪んでもローレンツ不変性は保たれている．重力理論の場合は一般座標変換を施すのでローレンツ不変性が成立しない．すなわち時空が歪む．また，平行移動すべき量が［エネルギー運動量］という時空のベクトルであるため接続係数の指標が三つもある．ただし，重力の場合の接続係数は，時空の計量テンソル $g^{\rho\sigma}(x^\mu)$ の微分として求められ，この計量テンソルが重力ポテンシャルを与えるので，グラヴィトンのスピンは1でなく2である．最後にこれまでのまとめを表2.1に掲げる．

2.3 アハロノフ-ボーム効果

これまでの考察によれば，物質場のゲージ変換の自由度は，内部空間の座標のとり方の自由度と解釈できることがわかった．接続係数 A_μ はゲージ変換で変わる量であり，電磁場の情報はゲージ不変な $F_{\mu\nu}$ に含まれているから，$F_{\mu\nu}$ が真の物理量で，A_μ は単なる補助手段にすぎないように見える．古典的マクスウェル理論ではそう習った．しかしラグランジアンを眺めるとカレントと結合するのは A_μ であり $F_{\mu\nu}$ ではない．実際，量子力学では A_μ が観測可能な物理量であり，かつ $F_{\mu\nu}$ より基本的な役割を果たしていることは，アハロノフ-ボーム効果 (Aharonov-Bohm effect) によって知ることができる．アハロノフ-ボーム効果は，量子効果の典型例として有名な物質波による干渉効果に磁場の効果を加えたものである (図2.8 (a))．

まず電磁場がない場合，R点 (x) における波動関数は，P点 (x_0) で発生し

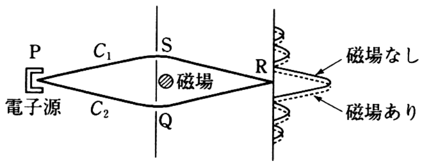
た電子波を，スリット $S(Q)$ を通る道筋を $C_1(C_2)$ とし，それぞれのスリットを通ってきた波動関数を ψ_1, ψ_2，その位相を α_1, α_2 とする．R 点 (x) における粒子分布は，

$$|\psi|^2=|\psi_1+\psi_2|^2=|\psi_2|^2|1+\exp i(\alpha_1-\alpha_2)|\psi_1/\psi_2||^2 \tag{2.29 a}$$

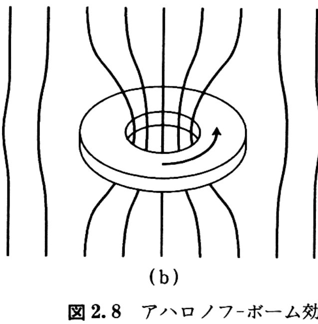
で与えられる．このことから位相の絶対値は観測量ではないが位相差は観測量であることがわかる．

次に，ソレノイド磁場を図のように電子の通行路からはるかに離れたところにおくとしよう．コイルを十分細くし外に磁場が漏れないように十分長くしてやれば，電子が直接磁場を感じることはない．磁場が存在せずとも，ベクトルポテンシャル $A^\mu(x)$ は存在してもかまわない．磁場が存在しないときは，$\boldsymbol{B}(x)=\nabla\times\boldsymbol{A}(x)=0$ の条件から，許されるポテンシャルは，

$$\boldsymbol{A}(x)=\nabla f(x) \tag{2.30 a}$$



(a)



(b)

図 2.8　アハロノフ-ボーム効果

(a)　電子の波動性を示す実験では干渉パターンが現れる．電子の通路から十分離れたところに，漏れのない磁場を設定すると，干渉パターンが変化する．磁場のないところでも電磁ポテンシャルは 0 でなく，電子の位相変化を与えることができることを示す．

(b)　磁束の量子化．超伝導リングの中に周回電流があるとき，リングの内側の磁束は量子化される．

と書ける．ポテンシャルを 0 から式 (2.30 a) に変換すると，ゲージ不変性の要求から，波動関数は，

$$\psi_i \longrightarrow \exp[-iqf_i(x)]\psi_i \tag{2.30 b}$$

となる．式 (2.30) を $f(x)$ について解けば

$$f_i(x)=\int_{Ci}\boldsymbol{A}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{x} \tag{2.30 c}$$

を得る．(2.30) を (2.29 a) に代入すれば，干渉パターンは，

$$|\psi_B|^2=|\psi_2|^2|1+\exp(-iq\oint\boldsymbol{A}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{x}+i(\alpha_1-\alpha_2))|\psi_1/\psi_2||^2 \tag{2.29 b}$$

となる．$\oint$ は，C_1, C_2 で囲む閉回路についての線積分である．どこにも磁場が存在しなければ積分はゼロとなり，干渉パターンは変わらない．しかし，もし道筋 C_1, C_2 で囲む閉回路のどこかに磁場が存在すれば，閉回路の中の磁束はゼロではない．すなわち，

$$\Phi=\int B\mathrm{d}S=\oint\boldsymbol{A}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{x}\neq 0 \tag{2.31}$$

であり，電子は磁場のないところを通過するにも関わらず磁場の存在を感知して干渉パターンが変わるというのが式 (2.29 b) の予告するところである．これは実際に実験的に確かめられている[9]．

もう一つの興味ある応用例は，超伝導体閉回路に定常電流が流れているときである (図 2.8 b)．マイスナー効果により超伝導体の中には磁場は存在しない．しかし，(2.29) により周回している電子の波動関数には，回転するたびに $\exp(ie\Phi)$ だけの余分な位相因子が加わることになる．電子の波動関数が 1 価であるという要求から，

$$\Phi=\frac{2\pi\hbar c}{e}n, \qquad n=0, \pm 1, \pm 2, \cdots \tag{2.32}$$

すなわち，磁束が量子化される．これもまた実験的に確かめられている[10]．ただし，このときの磁束の値は (2.32) の正確に 1/2 であったが，これは超伝導状態が電荷 2 のクーパー対により引き起こされるという BCS 理論と整合している．

位相を内部空間の座標回転角度と見なす幾何学的解釈では，全磁束 Φ はこの閉回路における全曲率という意味づけをもつ．先端を丸くした円錐面を考え

ると (図 2.3 (a)) アハロノフ-ボーム効果の理解が容易である．丸いところは磁場の存在するところでそこは空間が曲がっている．しかし，他のところは平らな空間であり，電子波はこの平らな空間を通る軌跡を描く．しかし，円錐面を切り開いた図で見ればわかるようにCBA，CDEの軌跡が測地線であり，展開面上で測地線に沿った接線ベクトル (接続係数 A の方向) は平行であっても円錐面にもどすと，$A(E)$ 点では道筋により方向が変わり余剰角が生じている．電子は常に平らな空間を通過してきたにもかかわらず全体として空間が曲がっているために電子はそれを感知し，その結果が干渉縞の変化として現れるのである．この場合ベクトルポテンシャル $\boldsymbol{A}$ はコイルの外で0ではないことに注目しよう．全域にわたってポテンシャルを0にできる条件は磁場が0であるときのみであり，少なくもある部分に磁場の存在することが，A を道筋に沿って積分したときに0にならないことを保証している．相対論を認めればすべての動作は近接作用でなければならないから，電子に作用して軌跡を曲げるのは磁場ではなくベクトルポテンシャル $\boldsymbol{A}$ でなければならない．すなわち，電磁場 $F_{\mu\nu}$ のみではアハロノフ-ボーム現象の記述が不十分であり，A_μ を使わなければならない．そのような意味で，A_μ の方がより大きな情報量をもち，したがってより基本的な物理量であるといえる．上の考察からベクトルポテンシャルもまた絶対値は観測不可能であるが，二つのベクトルポテンシャルの差 (曲率) は観測量であることがわかった．この観測量は式 (2.31) の表式からわかるようにゲージ不変量である．

2.4 ヤン-ミルズ場 (非可換ゲージ場)

いままでは内部空間は2次元，あるいは複素1次元として扱ってきた．内部空間の次元数を増やして，n 次元複素空間に拡張しても今までの議論はほとんどそのまま適用できる．ただし，$n \geqq 2$ の複素空間になると，座標変換を二重に施したとき，順序を変えると違う変換になる (非可換になる)．このためゲージ場の満たす方程式が非線形となり，数学的な取扱いがやや複雑になる．内部空間を2次元複素空間に拡張することは，$SU(2)$ (アイソスピン) 対称性を導入することに等しい．強い相互作用においてはアイソスピン不変性が近似

的に成立する．これは u クォークと d クォークの入れ替え対称であり，

$$\begin{bmatrix} u \\ d \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} u' \\ d' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ d \end{bmatrix} \tag{2.33}$$

で表される u', d' を使っても運動方程式は変わらないということである．この変換は，一般性を失うことなく，

$$U = \exp\left(-i\sum_{a=1}^{3} \alpha_a \cdot \frac{\tau_a}{2}\right) = \exp(-i\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\tau}/2) \tag{2.34}$$

と書き直せる．一般に $SU(n)$ 変換は，n^2-1 個の $n\times n$ の無軌跡 (traceless) エルミート行列 τ_a (生成子；generator) と実変数 α_a を使って (2.34) の形に書け，しかも群としての性質は，τ の表示を決めると交換関係

$$\left[\frac{\tau_a}{2}, \frac{\tau_b}{2}\right] = \sum_{c=1}^{n^2-1} i f_{abc} \frac{\tau_c}{2} \equiv i f_{abc} \frac{\tau_c}{2} \tag{2.35}$$

により本質的に決まる．ここに f_{abc} は abc について完全反対称な定数で，構造定数と呼ばれる．$SU(2)$ の場合は

$$f_{abc} = \varepsilon_{abc} \tag{2.36}$$

である．N 次元表現空間の N 個の基底ベクトルでつくるベクトルの座標成分は，(2.35) の交換関係を満たす $N\times N$ の表現行列 t_a により変換 (回転) を受ける．

$$[t_a, t_b] = i f_{abc} t_c \tag{2.37}$$

$N=n(t_a=\tau_a/2)$ のとき基本表現，$N=n^2-1$ の場合を随伴表現 (adjoint representation) といい特に重要である．以下，話は $n=2$ のアイソスピンで進めるが，結論は一般の $SU(n)$ 対称性に適用できる．

行列 τ_a が非可換であるため U もまた非可換である．このような対称群を非可換群または非アーベル群という．式 (2.34) の $SU(2)$ 変換は位相変換の形をしていることに注目しよう．ただし，今度は ψ が N (アイソスピン I をもつときは，$N=2I+1$) 行1列の列ベクトルであり，位相変換演算子もまた行列となっている．$SU(2)$ 変換でラグランジアンが不変であれば，ネーターの定理により保存するアイソスピンカレントしたがって保存量アイソスピンが存在する．アイソスピン変換の生成子の交換関係は角運動量の交換関係とまったく同一であるから，内部空間 (アイソスピン空間) でのアイソスピンの演算

は，時空での角運動量演算と数学的にはまったく同一であり，ゲージ変換の自由度が座標回転の自由度であるという幾何学的解釈は，直観的にはより受け入れられやすい．

ここで，ゲージ変換を局所化すれば相互作用を含むゲージ理論が得られる．$SU(2)$ 群のゲージ場はヤン-ミルズによりはじめて与えられたのでヤン-ミルズ場ともいう．ゲージ場の導入は平行移動の式 (2.15) をそのまま適用すればよい．ただし，今度は ψ が内部空間で N 個の成分をもつので，$\psi_a(a=1\sim N)$ (行列表示のときは $\boldsymbol{\Psi}$ で表す) で表すことにすると，接続係数もまた $N\times N$ の行列 $\mathscr{A}_\mu$ となる．生成子の表現行列 t_a を使って展開すれば，

$$[\mathscr{A}_\mu]_{ab}=\sum_k A_{k\mu}[t_k]_{ab}=\boldsymbol{A}_\mu\cdot\boldsymbol{t}_{ab} \tag{2.38}$$

と表されるから，非アーベル群の場合はゲージ場が生成子の数だけあることになる．$SU(2)$ の場合は 3 個，$SU(3)$ の場合は 8 個である．接続係数 $\mathscr{A}_\mu$ を使えば，平行移動は行列形式で

$$\boldsymbol{\Psi}_{/\!/}(x+\mathrm{d}x)=[1-ig\mathscr{A}_\mu(x)\mathrm{d}x^\mu]\boldsymbol{\Psi}(x) \tag{2.39}$$

と定義できる．ただし，

$$\boldsymbol{\Psi}=\begin{bmatrix}\psi_1\\ \psi_2\\ \vdots\\ \psi_N\end{bmatrix} \tag{2.40}$$

または，成分で書き表せば，

$$\psi_{/\!/a}(x+\mathrm{d}x)=\psi_a(x)-ig\boldsymbol{A}_\mu(x)\cdot\boldsymbol{t}_{ab}\mathrm{d}x^\mu\psi_b \tag{2.41}$$

g は $U(1)$ ゲージ理論の電荷 e に対応するもので，場のもつアイソスピン量子数に比例する結合定数である．対応する共変微分 D_μ は

$$[D_\mu]_{ab}=[\partial_\mu+ig\mathscr{A}_\mu]_{ab}=\delta_{ab}\partial_\mu+ig\boldsymbol{A}_\mu\cdot\boldsymbol{t}_{ab} \tag{2.42}$$

であり，また局所ゲージ変換

$$\boldsymbol{\Psi}(x)\to\boldsymbol{\Psi}'(x)=U(x)\boldsymbol{\Psi}(x)=\exp(-ig\boldsymbol{\alpha}(x)\cdot\boldsymbol{t})\boldsymbol{\Psi}(x) \tag{2.43}$$

に対応するゲージ場の変換は，運動方程式を不変にするという要請から得られる．$D_\mu\to D_\mu{}'$ とするとき，

$$D_\mu{}' \Psi' = D_\mu{}'(U\Psi) = (D_\mu \Psi)' = U(D_\mu \Psi)$$

$$\therefore \quad D_\mu{}' = U D_\mu U^{-1} \tag{2.44}$$

より，$\mathcal{A}_\mu$ の変換性が得られ，

$$\mathcal{A}_\mu{}' = U \mathcal{A}_\mu U^{-1} - \frac{i}{g} U \partial_\mu U^{-1} \tag{2.45}$$

ここで U として微小変換（α を微小量と考える）をとり，$O(\alpha)$ までの項を具体的に成分で書き下ろすと，

$$A_{a\mu}{}' = A_{a\mu} + f_{abc}\alpha_b A_{c\mu} + \partial_\mu \alpha_a(x) + \cdots \tag{2.46}$$

と表現行列 t によらない形となる．内部空間についてベクトル表示にすると

$$\boldsymbol{A}_\mu{}' = \boldsymbol{A}_\mu + (\boldsymbol{\alpha} \times \boldsymbol{A}_\mu) + \partial_\mu \boldsymbol{\alpha}(x) + \cdots \tag{2.47}$$

となる．ただし，$f_{abc}\alpha_b A_{c\mu}$ を $\boldsymbol{\alpha} \times \boldsymbol{A}_\mu$ と表した．この項がアーベルゲージ変換にはなかった新しい項である．この表式の意味はゲージ変換により A_μ が内部空間で回転することを示す．すなわち，ゲージ場 A_μ 自身も内部空間で回転を受ける量，いい換えれば Ψ と同じく内部空間のベクトルとして変換する量であり，アイソスピン 1 をもつことを示す．つまりゲージ場自身，ゲージ変換の対象となること（ゲージ場自身が力の源泉となりうること）を示す．曲率は式 (2.17) と同様に接続係数を小閉曲線（図 2.6）の周りを平行移動して得られる．今度は $\mathcal{A}_\mu$ が行列であり，非可換なので，平行移動の順序に注意して動かす必要がある．簡単のため，x-y 平面で動かすことにし，他の変数（z, t など）を省略して書けば

(1) $P \to Q$ への平行移動

$$\Psi_{/\!/}(x+\mathrm{d}x, y) = [1 - ig\mathcal{A}_x(x, y)\mathrm{d}x]\Psi(x, y) \tag{2.48 a}$$

(2) $Q \to R$ への平行移動

$$\Psi_{/\!/}(x+\mathrm{d}x, y+\mathrm{d}y) = [1 - ig\mathcal{A}_y(x+\mathrm{d}x, y)\mathrm{d}y]\Psi_{/\!/}(x+\mathrm{d}x, y) \tag{2.48 b}$$

$P \to Q \to R$ に沿って平行移動して得られる Ψ を $\Psi_{/\!/}{}^{PQR}$ と書くと

$$\begin{aligned}
&\Psi_{/\!/}{}^{PQR}(x+\mathrm{d}x, y+\mathrm{d}y) \\
&= [1 - ig\mathcal{A}_y(x+\mathrm{d}x, y)\mathrm{d}y] \times [1 - ig\mathcal{A}_x(x, y)\mathrm{d}x]\Psi(x, y) \\
&\fallingdotseq [1 - ig\{\mathcal{A}_y(x, y)\mathrm{d}y + \mathcal{A}_x(x, y)\mathrm{d}x + \partial_x \mathcal{A}_y(x, y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\} \\
&\quad - g^2 \mathcal{A}_y(x, y)\mathcal{A}_x(x, y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y]\Psi(x, y)
\end{aligned} \tag{2.49}$$

$R \to S \to P$ の移動は，$P \to S \to R$ の移動の符号を逆にして得られ，$P \to S$

$\to R$ の移動は，$P\to Q\to R$ の移動の式 (2.49) から $x\leftrightarrow y$ の交換で得られる．結局，

$$\oint\Psi_{/\!/}(x,y)=\Psi_{/\!/}{}^{PQR}-\Psi_{/\!/}{}^{PSR}$$
$$=-ig\{\partial_x\mathcal{A}_y-\partial_y\mathcal{A}_x+ig(\mathcal{A}_x\mathcal{A}_y-\mathcal{A}_y\mathcal{A}_x)\}\Psi\mathrm{d}x\mathrm{d}y \qquad (2.50)$$

(2.17) と比較して，アーベル群の電磁場 $F_{\mu\nu}$ に対応する量は，

$$\mathcal{F}_{\mu\nu}=\partial_\mu\mathcal{A}_\nu-\partial_\nu\mathcal{A}_\mu+ig[\mathcal{A}_\mu,\mathcal{A}_\nu]=\frac{1}{ig}[D_\mu,D_\nu] \qquad (2.51)$$

となる．第2番目の等式は実際に演算を実行してみれば証明できる．最右辺の式は見かけ上は微分演算子を含むが，交換関係をとったものは微分演算を含まない．可換群の場合は $[\mathcal{A}_\mu,\mathcal{A}_\nu]=0$ であるので電磁場の式に帰着する．

$$[\mathcal{A}_\mu,\mathcal{A}_\nu]=[A_{a\mu}t_a,\mathcal{A}_{b\nu}t_b]=i(\boldsymbol{A}_\mu\times\boldsymbol{A}_\nu)\cdot\boldsymbol{t} \qquad (2.52)$$

であるので，$\mathcal{F}_{\mu\nu}$ もまた t_a で展開できて，

$$\mathcal{F}_{\mu\nu}=F_{a\mu\nu}t_a=\boldsymbol{F}_{\mu\nu}\cdot\boldsymbol{t} \qquad (2.53\,\mathrm{a})$$
$$\boldsymbol{F}_{\mu\nu}=\partial_\mu\boldsymbol{A}_\nu-\partial_\nu\boldsymbol{A}_\mu-g\boldsymbol{A}_\mu\times\boldsymbol{A}_\nu \qquad (2.53\,\mathrm{b})$$

となる．$\mathcal{F}$ のゲージ変換式は (2.51) より，

$$\mathcal{F}_{\mu\nu}'=\frac{1}{ig}[D_\mu',D_\nu']=\frac{1}{ig}U[D_\mu,D_\nu]U^{-1}=U\mathcal{F}_{\mu\nu}U^{-1} \qquad (2.54)$$

$\mathcal{F}_{\mu\nu}$ は行列であるので，$\mathcal{F}_{\mu\nu}$ と $\mathcal{F}_{\mu\nu}'$ は等しくない．すなわち，非アーベル場の $\mathcal{F}_{\mu\nu}$ はゲージ不変量ではない．ゲージ不変なラグランジアンをつくるときは

$$Tr[\mathcal{F}_{\mu\nu}\mathcal{F}^{\mu\nu}]\sim\boldsymbol{F}_{\mu\nu}\cdot\boldsymbol{F}^{\mu\nu} \qquad (2.55)$$

を用いればよい．テンソル場の共変微分は，図2.9のような経路に沿って Ψ を平行移動してやればよく，結果は

$$D_\lambda\mathcal{F}_{\mu\nu}=\partial_\lambda\mathcal{F}_{\mu\nu}+ig[\mathcal{A}_\lambda,\mathcal{F}_{\mu\nu}]=[D_\lambda,\mathcal{F}_{\mu\nu}] \qquad (2.56)$$

となる．第2の等式は実際に演算してみればわかる．

場を決める方程式はマクスウェルの方程式に習って

$$D_\mu\mathcal{F}^{\mu\nu}=\partial_\mu\mathcal{F}^{\mu\nu}+ig[\mathcal{A}_\mu,\mathcal{F}^{\mu\nu}]=g\mathcal{J}^\nu \qquad (2.57\,\mathrm{a})$$

とすればよい．ただし

$$\mathcal{J}^\nu=j_a{}^\nu t_a=\boldsymbol{j}^\nu\cdot\boldsymbol{t} \qquad (2.58)$$

は，場を生み出すアイソスピンカレントである．表現行列 t_a を分離すると

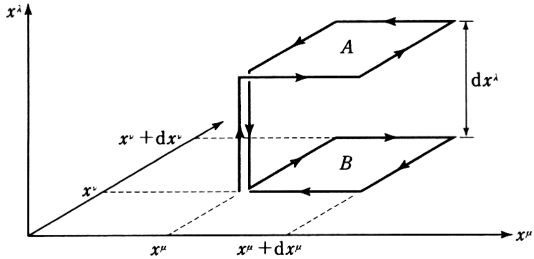


図 2.9　$\mathcal{F}_{\mu\nu}$ の共変微分 $D_\lambda\mathcal{F}_{\mu\nu}$ を得るための径路
A を囲む径路で $\mathcal{F}_{\mu\nu}(x_\mu, x_\nu, x_\lambda+dx_\lambda)$ が得られ，B を囲む径路で $-\mathcal{F}_{\mu\nu}(x_\mu, x_\nu, x_\lambda)$ が得られる．
図のような順序で Ψ を平行移動していけば，$\mathcal{F}_{\mu\nu}$ の共変微分が得られる．

$$\partial_\mu \boldsymbol{F}^{\mu\nu} - g\boldsymbol{A}_\mu \times \boldsymbol{F}^{\mu\nu} = g\boldsymbol{j}^\nu \tag{2.57 b}$$

となる．ヤコビの恒等式

$$[D_\mu, [D_\nu, D_\lambda]] + [D_\nu, [D_\lambda, D_\mu]] + [D_\lambda, [D_\mu, D_\nu]] = 0 \tag{2.59}$$

に (2.56) を入れれば

$$D_\mu\mathcal{F}_{\nu\lambda} + D_\nu\mathcal{F}_{\lambda\mu} + D_\lambda\mathcal{F}_{\mu\nu} = 0 \tag{2.60}$$

が恒常的に成立する．これは，実際に源があるなしにかかわらず成立する．運動方程式 (2.57) を導くラグランジアン密度は

$$\mathcal{L} = -(1/4)\boldsymbol{F}_{\mu\nu}\cdot\boldsymbol{F}^{\mu\nu} - g\boldsymbol{j}_\mu\cdot\boldsymbol{A}^\mu \tag{2.61}$$

である．これでマクスウェルの方程式に対応する $SU(2)$ ゲージ場の方程式が揃ったことになる．ゲージ場のラグランジアン (2.61) には，電磁場と同じように質量項は存在しない．注意すべきことは (2.53), (2.57) には A_μ の 2 次，3 次の項が存在し非線形の方程式となっていることである．これはゲージ場自身がアイソスピンカレントを担い，自分自身で場をつくり出せることに対応する．フォトン（電磁場）は電気的には中性で，自身では場（フォトン）をつくりだせなかったのと大きな違いである．

強い相互作用は，クォークのもつカラーが原因として発生する．カラーの自由度は 3 であるから，量子化されたカラー力学 (QCD: quantum chromo dynamics) は，$SU(3)$ 群に基づいた非アーベルゲージ理論である．その構造については，いままで議論してきたことがそのまま適用できる．違いは $n=2$

が3になること，その結果8個のゲージ粒子（グルーオン）が存在すること，アイソスピン構造定数 ε_{abc} の代わりに $SU(3)$ の構造定数 f_{abc} を使わなければならないなどである．QCDの議論は第5章で詳しく述べることとするが，ゲージ粒子であるグルーオンは正確に質量が0であると見なされており，この章で記述した非アーベルゲージ場のラグランジアンが理論の出発点となる．QCDの特徴である漸近自由（クォーク間の力は遠距離で強いが，短距離では弱くなること）は，カラー場が上に述べた非アーベルゲージ場であることに原因がある．またクォークの閉じ込め（クォーク間のポテンシャルエネルギーは距離とともに増大するので，引き離して自由クォークを取り出すことはできないこと）も同じ原因からの帰結であると見なされている．これに反して，GWS理論では非アーベル群としての性質を表だって使うところは少なく，むしろ次節で述べるように，ゲージ粒子が質量をもつ原因となる対称性の自発的破れに特徴がある．

最後に $SU(2)$ 対称に従う物質場（アイソスピン1/2）とゲージ場（アイソスピン1）のラグランジアンをまとめておく．

$$\boldsymbol{\Psi}=\begin{bmatrix}\psi_1\\ \psi_2\end{bmatrix},\qquad \boldsymbol{W}^\mu=(W_1{}^\mu,\ W_2{}^\mu,\ W_3{}^\mu) \tag{2.62 a}$$

$$F_i^{\mu\nu}=\partial^\mu W_i^\nu-\partial^\nu W_i^\mu-g\varepsilon_{ijk}W_j^\mu W_k^\nu \tag{2.62 b}$$

として，ラグランジアンは

$$\mathscr{L}=\overline{\Psi}i\gamma^\mu\left(\partial_\mu+ig\boldsymbol{W}_\mu\cdot\frac{\boldsymbol{\tau}}{2}\right)\Psi-\frac{1}{4}\boldsymbol{F}^{\mu\nu}\cdot\boldsymbol{F}_{\mu\nu} \tag{2.63}$$

特に相互作用部分は

$$-\mathscr{L}_{\mathrm{INT}}=g\overline{\Psi}\gamma^\mu\frac{\boldsymbol{\tau}}{2}\Psi\boldsymbol{W}_\mu$$

$$=\frac{g}{\sqrt{2}}\overline{\Psi}\gamma^\mu[\tau_+W^+{}_\mu+\tau_-W^-{}_\mu]\Psi+g\overline{\Psi}\gamma^\mu\frac{\tau_3}{2}W^0{}_\mu\Psi \tag{2.64 a}$$

$$W^\mp=\frac{1}{\sqrt{2}}(W_1\pm iW_2),\qquad W^0=W_3 \tag{2.64 b}$$

これから導かれる運動方程式は，

$$i\gamma^\mu\partial_\mu\Psi=-ig\boldsymbol{W}_\mu\cdot(\boldsymbol{\tau}/2)\Psi \tag{2.65 a}$$

$$\partial_\mu\boldsymbol{F}^{\mu\nu}-g\boldsymbol{W}_\mu\times\boldsymbol{F}^{\mu\nu}=g\overline{\Psi}\gamma^\nu(\boldsymbol{\tau}/2)\Psi \tag{2.65 b}$$

となる．第2式右辺が，アイソスピンカレントと呼ばれる量である．

2.5 隠された対称性

2.5.1 自発的対称性の破れ

弱相互作用がゲージ原理に従うとしても，W 粒子が質量をもつという事実はゲージ不変性が破れていることを意味する．質量を与える一つの方法は起源は問わずラグランジアンの中に質量項 $\mu^2 W_\mu W^\mu$ を入れてやり，あらわにゲージ不変性を破ることである．これは対称性が大体は成立していて，余分に入れた項が摂動と見なせるときはうまくいくかもしれない．しかし，80 GeV という W 粒子の質量は強い相互作用をする陽子の質量の100倍近くもある．強い相互作用は弱い相互作用の100万倍も強いので，このような大きな質量は摂動とは考えにくい．そこで対称性の自発的破れという考え方が登場する．対称性のよい方程式には同じ対称性をもつ解が存在するが，これが必ずしも安定な解とは限らない．たとえば，長い棒を水平面に垂直に立て真上から力を加える場合，棒の周りの回転対称性は成り立っているが，真っ直ぐに縮む解は不安定でどちらかの方向にたわむ．つまり成立した解は回転対称性を破っている．ただし，どの方向を選んでも同じエネルギー状態となっているところに回転対称性のなごりがある．

場の理論に応用のできる例として強磁性体を考える．スピンをもつ原子は磁気能率をもち，通常は熱運動でばらばらの方向を向いているが，磁場をかけるとスピンの方向が揃って磁化される．磁化の方向は外場の方向に一致し回転対称性を破るが，これは外から回転対称性を破る外場を加えたからである．温度がキュリー点以下になると，磁性体は外場を与えなくてもスピンが揃い永久磁石となる．これは磁気能率同士間に相互作用があるからで，スピンの揃う方がエネルギーが低く，十分温度が低ければ熱エネルギーに勝つからである．このとき磁化すべき特別な方向は存在しないが，実現した基底状態では磁化はある一定の方向を向いている．どの方向でもエネルギーは同じなのでこれは無限に縮退している状態である．このように自由度が大きい系で，方程式は対称性をもつにもかかわらず実現した基底状態ではその対称性が破れているとき，対称

性が自発的に破れたという．先の棒と状況は同じであるが，違うのは自由度が大きいことである．このため違う二つの基底状態を結びつける要素がなく，遷移が不可能である．すなわち，エネルギー的には縮退しているにもかかわらずいったん選んだ方向が固定されてしまう．すべての現象はこの基底状態からの励起として観測されるので，この世界に住む人間にとっては磁化の方向は特別な意味をもち，回転対称性は破れていると見なすであろう．このように巨視的に多数の粒子を含む系がある温度を境に一つの秩序状態に移行する現象は物性の世界では始終見られることであり，相転移と呼ばれる．

2.5.2 相転移の定式化

以上のような相転移は系のエネルギー V が，問題にする物理量 ϕ の関数として

$$V(\phi)=\lambda\left(|\phi|^2+\frac{\mu^2}{2\lambda}\right)^2, \qquad \lambda>0 \tag{2.66}$$

のような形をしていると起こる．ϕ は物性論では秩序パラメターと呼ばれる量で，強磁性体の場合は磁化の強さ（正確にはその期待値）を表す．高温では $\mu^2>0$ で，エネルギーは $\phi=0$ のときに最低値をとる（図 2.10 (a)）．低温では $\mu^2<0$ となり V は W 字型となり，ϕ が有限の値をとるところがエネルギーの最低状態となる（図 2.10 (b)）．場の理論に焼き直すには複素スカラー場 $\phi=(\phi_1+i\phi_2)/\sqrt{2}$ が存在し，ラグランジアンが

$$\mathcal{L}_G=(\partial_\mu\phi)^\dagger(\partial^\mu\phi)-V(\phi) \tag{2.67}$$

で与えられるケースを考えればよい．このラグランジアンは実の内部座標 ϕ_1, ϕ_2 の回転に対し，または同じことであるが $\phi\to\exp(-i\theta)\phi$, $\phi^\dagger\to\phi^\dagger\exp(i\theta)$ という位相変換に対し不変という連続対称性をもつ．$\mu^2>0$ のときは，ラグランジアンの中の $|\phi|^2$ 項は質量項を表し，μ は質量を表す（運動方程式をつくってみればわかる）．ϕ^4 の項は自己相互作用またはポテンシャルと解釈される．低温で $\mu^2<0$ になると μ は質量という意味を失い，$V(\phi)$ 全体をポテンシャルと見なさなければならない．ϕ は演算子であるので古典的対応を考えるときには期待値をとる必要がある．基底状態を真空と読み替えれば，自発的対称性の破れが起きると ϕ は 0 でない真空期待値をもつ．

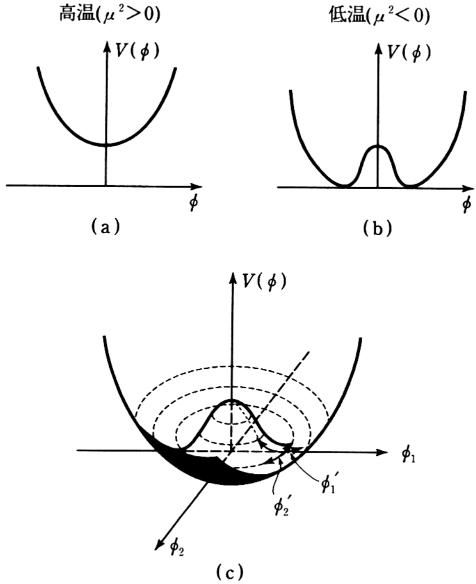


図 2.10 ゴールドストーン定理（対称性の自発的破れ）

(a) 高温ではポテンシャルがおわん型をしており，$\phi=0$ が基底状態となる．

(b) 低温 ($\mu^2<0$) になるとポテンシャルが W 字型をして，ϕ の有限なところが基底状態となる．

(c) ポテンシャル $V(\phi)$ が，$|\phi|=[|\phi_1|^2+|\phi_2|^2]^{1/2}$ の関数であれば (ϕ_1, ϕ_2) 空間で回転対称性をもち，エネルギーの最低な状態（真空）が連続無限個存在する．現実にはある一点 ($\phi_1>0$, $\phi_2=0$ と定義) を選んでそこに真空が固定されるので，回転対称性が破れる．これを対称性の自発的破れという．この真空から二つの励起モード (ϕ_1', ϕ_2') が可能である．ϕ_1' を励起するには有限エネルギーが必要であるが，ϕ_2' を励起するには無限小のエネルギーで可能である．これが質量 0 のゴールドストーンモードである．

$$\langle\phi\rangle=\frac{v}{\sqrt{2}}, \qquad v=\sqrt{-\frac{\mu^2}{\lambda}} \tag{2.68}$$

このとき ϕ_1, ϕ_2 空間での回転角または位相（ゲージ）の選択は任意である．しかし，場の自由度は無限大であるので一度選択した回転角は固定される．

2.5.3 南部–ゴールドストーンボソン

自発的対称性の破れは余分な外力をもち込まずに対称性を壊せるのでなかな

か魅力的な考えであるが，実は厄介な荷物がある．系の秩序化が起こるためその秩序からのずれという，以前は存在しなかった励起モードが出現する．強磁性体の例でいうと，基底状態ではスピンがすべて平行となり，ある軸（磁化の方向）の周りを首振り運動している．いま，何らかの原因で1カ所に乱れが生じるとスピン相互作用のためにこの乱れが伝播する（図2.11）．スピン波（量子化してマグノンと呼ぶ）の発生である．このスピン波の長波長極限が元の基底状態に一致することは容易にわかるであろう．$\lambda=\infty(k=0)$ でエネルギー $\omega=0$ であるということは，$\omega^2=k^2+m^2$ という表式によってマグノンの質量が0であることを意味する．このように連続な対称性の自発的破れが起きると質量0の粒子（南部-ゴールドストーンボソン）が発生することは一般にいえることで，これをゴールドストーン定理という．連続無限の可能な秩序状態の中からある特定の状態を選んだことの代償といえる．この状況が場の理論ではどう表されるかを眺めてみよう．

$\mu^2<0$ となって自発的対称性の破れが起こると，ϕ が有限な真空期待値をとるところが安定な基底状態となる．安定角 θ は任意に選べるのでこれを0とおく．ϕ という場の振動（励起）は安定点を中心に起きるから，

$$\phi_1=v+\phi_1', \quad \phi_2=\phi_2', \quad |\phi'|^2=|\phi_1'|^2+|\phi_2'|^2 \tag{2.69}$$

とおくと，

$$\langle\phi_1'\rangle=0, \qquad \langle\phi_2'\rangle=0 \tag{2.70}$$

となる．(2.67) を ϕ_1', ϕ_2' で書き直すと

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_G=&(1/2)[\partial_\mu\phi_1'\partial^\mu\phi_1'-(-2\mu^2)\phi_1'^2]+(1/2)[\partial_\mu\phi_2'\partial^\mu\phi_2']\\&-[\lambda v\phi_1'|\phi'|^2+(\lambda/4)|\phi'|^4]\end{aligned} \tag{2.71}$$

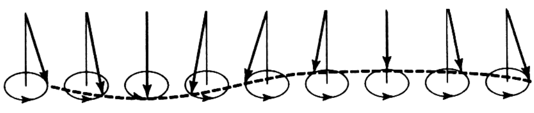


図 2.11 南部-ゴールドストーンボソンの一例，スピン波の存在
安定状態では，スピンはすべて平行で，ある軸（磁化軸）のまわりを首振り運動をしている．乱れが生じると隣接のスピンとの間に働く相互作用により，この乱れが伝播してスピン波が生じる．長波長の極限では再び平行になるので，基底状態であり振動エネルギーは0となる．

となる．第1項は質量 $\sqrt{(-2\mu^2)}$ をもつ場 ϕ_1'，第2項は質量0の場 ϕ_2' を表し，第3項は両者の相互作用を表す．このときポテンシャルは，図2.10 (c)で示される．比喩的にいえば，ϕ_1' は動径方向の振動を表し安定点から動かすにはポテンシャルの坂を上らなければならないのに反し，ϕ_2' は接線方向の振動成分でポテンシャルは平らであり，動かすのに何らの慣性力を必要としない．この ϕ_2' が質量0のゴールドストーンボソンである*7)．

2.5.4　ヒッグス機構

自然界にはゲージ粒子のほかには質量0の粒子は存在しない（ニュートリノは有限質量をもつと考えられている）．したがって，対称性が自発的に破れていると考えるには難があった．ところがゴールドストーン定理には抜け穴があって，長距離力（ゲージ場）があるときはこの定理が成立しない．このときは遠くに離れている粒子が歩調を合わせて運動するという協同現象を起こし，その結果遮蔽効果が現れる．例えば，プラズマの中でクーロン力が働くと，巨視的なスケールでプラズマ振動という縦波の音波が生じる．これがクーロン力を遮蔽する結果，クーロン力を短い距離しか届かない短距離力に変えてしまう．つまりフォトンが質量をもつプラズモンに変身する．同じことが超伝導現象にも起きる．これは直接場の理論に応用が可能である．

このときの秩序パラメターはクーパー対の波動関数である．クーパー対とは結晶の格子振動（フォノン）を介して，フェルミ面近傍の運動量およびスピンが逆向きの電子対に引力が働き束縛状態をつくったものである．温度が十分低くなると対をつくる方がエネルギー的に得するので非常にたくさんのクーパー対が発生する．これをクーパー対の凝縮という．この結果，相転移が起こり超伝導状態となる．このクーパー対をつくるための束縛エネルギーは非常に低く波動関数は 10^{-4}cm くらいに広がり，この中には $\sim 10^6$ 個くらいのクーパー対

---

*7)　ゴールドストーンボソンのもつもう一つの特徴として，$k^\mu \to 0$ の極限で相互作用が消滅する（アドラーゼロ）ことがあげられる．(2.71) からは自明でないが，自発的に対称性が破れて $\phi = \exp(i\phi_2'/v)(v+\phi_1')/\sqrt{2}$ の形になるとすると，ラグランジアンは

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial_\mu\phi_2'\partial^\mu\phi_2'\left(1+\frac{\phi_1'}{v}\right)^2 + \frac{1}{2}\partial_\mu\phi_1'\partial^\mu\phi_1' + V(|v+\phi_1'|)$$

の形をとり，$k^\mu \to 0$ で相互作用がゼロになることが証明できる．

が入る．多くの波動関数が重なるため位相が固定され多数の粒子が同位相で協力運動をする．量子力学的効果がマクロなスケールで現れる一つの例である．この結果，磁場が超伝導体に侵入するとそれを打ち消すような表面渦電流をクーパー対が発生させ，磁場は $\lambda \fallingdotseq 10^{-6}$cm くらいの深さ以上には浸透できない．これをマイスナー効果といい，磁性体に対する反発力の原因となる．JR のリニアモーターカーはこのマイスナー効果を利用して浮上させようというものである．本来長距離力であった電磁力が到達距離 λ の短距離力となるわけである．このとき，すべての電子に一定のエネルギーが付加されることが知られている．

これを場の理論で表現してみよう．自発的対称性の破れを起こせるポテンシャルをもつ荷電（複素）スカラー場 (2.67) に電磁場 $F_{\mu\nu}$ を共存させる．両者の相互作用を求めるには，ゲージ原理に従って，$\partial_\mu \to D_\mu$ とすればよい．

$$\mathscr{L} = -(1/4)F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} + (D_\mu\phi)^\dagger(D^\mu\phi) - V(\phi) \tag{2.72}$$

これは相対論的に表現しているが，これからハミルトニアンをつくって非相対論近似で書き直せばギンツブルグ-ランダウの自由エネルギーとして物性ではよく知られた式となる[11]．相転移が起きて $\mu^2<0$ になったとして，ここで (2.69) の置き換えを行うと（以下 ϕ_1', ϕ_2' を改めて ϕ_1, ϕ_2 とおく），

$$\begin{aligned}\mathscr{L} = &-(1/4)F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + (1/2)[\partial_\mu\phi_1\partial^\mu\phi_1 - (-2\mu^2)\phi_1{}^2] \\ &+ \frac{(ev)^2}{2}\left(A_\mu + \frac{1}{ev}\partial_\mu\phi_2\right)\left(A^\mu + \frac{1}{ev}\partial^\mu\phi_2\right) + \cdots\end{aligned} \tag{2.73}$$

となる．…は相互作用の項である．ここで，

$$B_\mu = A_\mu + \frac{1}{ev}\partial_\mu\phi_2, \qquad F_{B\mu\nu} \equiv \partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \tag{2.74}$$

と書き直すと，

$$\mathscr{L} = -\frac{1}{4}F_{B\mu\nu}F_B{}^{\mu\nu} + \frac{(ev)^2}{2}B_\mu B^\mu + \frac{1}{2}[\partial_\mu\phi_1\partial^\mu\phi_1 - (-2\mu^2)\phi_1{}^2] + \cdots \tag{2.75}$$

となる．これは質量 $m_B = ev$ をもつベクトル場と質量 $m_\phi = \sqrt{(-2\mu^2)}$ をもつスカラー場の方程式である．高次の効果を無視すれば，ϕ_2 はどこにも現れない（高次の項を含めて完全に ϕ_2 を消すには，後述 (2.76) のような変換を施す）．式 (2.73) を眺めれば，ϕ_2 はベクトル場の運動量方向成分に化けたことがわかる．

質量 0 のベクトル場 A_μ は横波成分のみをもつので，独立な成分は 2 個である．有限質量となると 3 成分をもつが，ϕ を含めた全体の独立成分の数は変わっていない．このようにゴールドストーンボソンが現れずにゲージ場が質量をもつようになるからくりをヒッグス機構という．ヒッグス機構を採用することはわれわれをとりまく真空が超伝導相にあると見なすことに等しい．

ヒッグス機構では式 (2.66) のような自己相互作用をもつスカラー場の存在が不可欠である．ヒッグス機構が働いても自由度の数は変わらないから，ゲージ場に質量をもたせるには少なくもゲージ粒子の数に最低 1 を加えた数のスカラー場が必要である．この最後の粒子は対称性の自発的破れの結果質量を獲得し，ヒッグススカラーと呼ばれる．

こうして，ゲージ場に質量をもたせるからくりが得られた．このとき，対称性は破れたというよりも隠されたというべきであろう．実際，式 (2.75) は，(2.72) で，

$$\phi \longrightarrow \phi' = \exp(-i(\phi_2/v))\phi = (1/\sqrt{2})(v+\phi_1) \tag{2.76}$$

$$A_\mu \longrightarrow A_\mu + \frac{1}{ev}\partial_\mu \phi_2 \tag{2.77}$$

というゲージ変換により，ϕ_2 を取り去って，ゲージの中に取り込んだ形をしている．質量を得たのはゲージ不変性が破れたからではなくゲージが固定されたためである．式 (2.76), (2.77) で与えられるゲージをユニタリーゲージという．

ここで，後のために $SU(2)$ 群に従うゲージ場とヒッグス場を考察しておこう．この場合，$SU(2)$ 変換で二重項として振る舞うヒッグス粒子 ϕ とそのゲージ変換形 ϕ'

$$\phi = \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{bmatrix}, \qquad \phi \rightarrow \phi' = \exp(-i\boldsymbol{\alpha}(x)\cdot\boldsymbol{\tau}/2)\phi \tag{2.78}$$

を考える．ϕ_1, ϕ_2 はともに複素スカラー場であり，それぞれ 2 成分をもつ．ゲージ不変なラグランジアンは，

$$\mathcal{L} = \left[\left(\partial_\mu + ig\frac{\boldsymbol{\tau}}{2}\cdot\boldsymbol{A}_\mu\right)\phi\right]^\dagger \cdot \left[\left(\partial^\mu + ig\frac{\boldsymbol{\tau}}{2}\cdot\boldsymbol{A}^\mu\right)\phi\right] - \frac{1}{4}(\partial_\mu \boldsymbol{A}_\nu - \partial_\nu \boldsymbol{A}_\mu - g\boldsymbol{A}_\mu \times \boldsymbol{A}_\nu)^2 - V(\phi) \tag{2.79}$$

となる．ただし，$V(\phi)$ の中の $|\phi|^2=|\phi_1|^2+|\phi_2|^2$ とする．$\boldsymbol{A}_\mu$ はアイソスピン 1 をもつゲージ場である．ここで対称性を自発的に破り，ϕ_2 が真空期待値 $(v/\sqrt{2})$ をもつとすれば，

$$\phi=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}(\omega_2+i\omega_1)/2\\ v+\varphi-i\omega_3/2\end{bmatrix} \tag{2.80}$$

という形になるが，一般性を失わずに

$$\phi=\exp(i\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{\tau}/2v)\begin{bmatrix}0\\ \dfrac{v+\varphi}{\sqrt{2}}\end{bmatrix} \tag{2.81}$$

と書き直せる．実際 $|\omega|$, $|\varphi|\ll v$ の近似で両式は一致する．そこで，式 (2.78) で $\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\omega}/v$ とおいたゲージ変換

$$\phi'=U\phi=\exp[-i\boldsymbol{\omega}(x)\cdot\boldsymbol{\tau}/(2v)]\phi \tag{2.82 a}$$

を行って位相 $\boldsymbol{\omega}$ を取り除き，ϕ' を改めて ϕ とおくと，

$$\phi=\begin{bmatrix}0\\ \dfrac{v+\varphi}{\sqrt{2}}\end{bmatrix} \tag{2.82 b}$$

となり，ラグランジアンは，

$$\mathcal{L}=\frac{1}{2}[\partial_\mu\varphi\partial^\mu\varphi+2\mu^2\varphi\varphi]-\left[\lambda v\varphi^3+\frac{\lambda\varphi^4}{4}\right]$$
$$-\frac{1}{4}\boldsymbol{F}_{\mu\nu}\cdot\boldsymbol{F}^{\mu\nu}+\frac{1}{2}\left(\frac{gv+g\varphi}{2}\right)^2\boldsymbol{W}_\mu\cdot\boldsymbol{W}^\mu \tag{2.83 a}$$

$$\boldsymbol{W}_\mu\cdot\boldsymbol{t}=U\boldsymbol{A}_\mu\cdot\boldsymbol{t}U^{-1}-\frac{i}{g}U\partial_\mu U^{-1} \tag{2.83 b}$$

$$\boldsymbol{F}_{\mu\nu}=\partial_\mu\boldsymbol{W}_\nu-\partial_\nu\boldsymbol{W}_\mu-g\boldsymbol{W}_\mu\times\boldsymbol{W}_\nu \tag{2.83 c}$$

と書き直せる．$\boldsymbol{W}_\mu$ はアイソスピン 1 のベクトル場で，質量 $m_W=(gv/2)$ をもち，ヒッグススカラーとは質量項の m_W を $m_W+g\varphi/2$ で置き換えた形の相互作用をする．

2.6　繰り込みとゲージ不変性

2.6.1　中性ボソンの役割

QEDで明らかなように，ゲージ不変性があれば繰り込み可能である可能性がある．弱い相互作用もゲージ理論に従うとして，$SU(2)$ 対称性を要求して，W の質量はヒッグス機構によるものとしてみよう．$SU(2)$ 不変性を要求するとこれまでの $W^{\pm}$ のほかに中性の W^0 が現れる．この W^0 の繰り込みにおける役割を考察してみよう．例として $\nu\bar{\nu} \to W^+W^-$ 生成反応を考える（図2.12

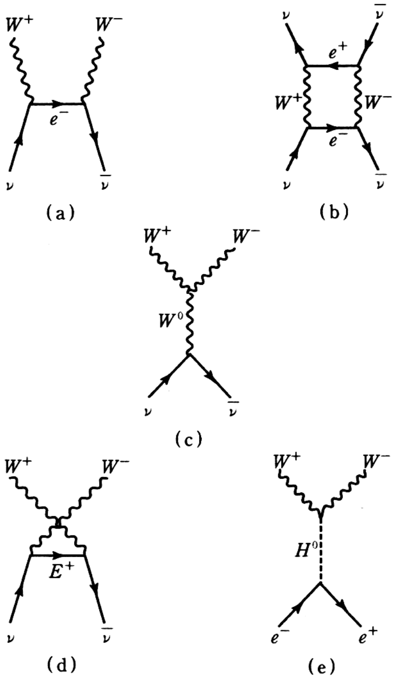


図 2.12　非アーベル場における種々の過程の役割

(a)　$\nu\bar{\nu} \to W^+W^-$ 生成断面積はエネルギーの自乗 (s) に比例して増大する．

(b)　(a)の理由により(b)の中間状態に現れる $W^{\pm}$ の中間状態を積分すると悪質な発散積分が現れる．ゲージ理論では中性の W^0 ゲージボソン(c)または重いフェルミオン (E^+)(d)の寄与があり，(b)の発散を相殺する．

(c)　フェルミオンが質量をもつと（ニュートリノの代わりに電子がある場合），右巻き成分によって $J=0$ の成分が現れるが，ヒッグス粒子の寄与(e)により相殺される．

(a)). 断面積を計算してみると系のエネルギー E の自乗に比例して増える. これは W 粒子の縦波成分からくるので, $m_W=0$ であればこのようなことは起こらない*8). この事実により $\nu\bar{\nu}\to\nu\bar{\nu}$ 弾性散乱において高次の補正項 (図2.12 (b)) に発散積分が現れる.

図2.12 (b) を中央で切断すればわかるように, この図は $\nu\bar{\nu}\to WW$ 散乱振幅の自乗すなわち断面積に比例する. ところがこの W は外には現れないから, エネルギーについては積分しなければならず, $\int(E/m_W)^2(\mathrm{d}E/E)$ のような項が出て発散する. そこでこの効果を相殺するために高エネルギーで図2.12 (a) と同じ振る舞いをする過程として, W^0 もしくは ν と同じ量子数をもつ重いレプトン E^+ を仲介にして $W^\pm$ を発生する機構を考える (図2.2 (c), (d)). エネルギーの高いところで図2.12 (a) の寄与を相殺するように結合定

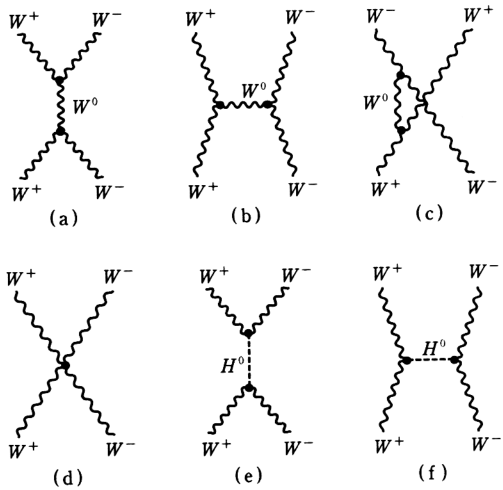


図 2.13 非アベール場のゲージボソンは自己相互作用をするので (a)~(d) のような過程が存在する. これらは質量が有限な場合エネルギーとともに増大する寄与を与えるが, ヒッグス粒子が存在すれば (e), (f) によって相殺され, 繰り込み可能となる.

---

*8) W 粒子の運動量方向の偏極ベクトルは, 運動量方向を z 軸にとると, 静止系での縦偏極ベクトル $\varepsilon^\mu(0)=(0;0,0,1)$ をローレンツ変換した $\varepsilon^\mu(0)=(|\boldsymbol{k}|/M;0,0,\omega/M)$, $\omega=\sqrt{\boldsymbol{k}^2+M^2}$ である. したがって W^M の偏極和 $\sum_\lambda\varepsilon^\mu(\lambda)\varepsilon^\nu(\lambda)^*$ は $k^\mu k^\nu$ に比例する項を含む.

数を決めると，それがちょうど $SU(2)$ ゲージ理論から要請されるものと一致することが示せる．W^0 を採用するか，E^+ を使うかはゲージ理論内でのモデルの違いとなるので選択は実験によらねばならない．

2.6.2 繰り込みにおけるヒッグスの役割

次にフェルミオンが質量をもつと（$\nu\bar{\nu} \to WW$ の代わりに $e\bar{e} \to WW$ を考える）一度は消せたと思った発散が再び現れる．この理由は質量をもつフェルミオンには逆のヘリシティ成分が存在するので，$e\bar{e}$ 系には $J=1$ 成分のほかに $J=0$ 成分が混入するためである．スピン 1 の W^0 では $J=0$ 成分が相殺できないので，スピン 0 のスカラー粒子を考える必要がある（図 2.12 (e)）．平面波の中の逆のヘリシティ成分は $1-\beta \sim \mathrm{m}/E$ の形で存在し質量に比例する（付録 (B.16) 参照）．つまりスカラー粒子のフェルミオンとの相互作用結合定数は質量に比例しないといけないが，自発的に対称性の破れた理論ではヒッグスとフェルミオンの相互作用がまさにそうなっている（後述 (2.99)）．

また，非アーベル場は自己相互作用をもつので，W は図 2.13 (a)～(d) に書いたような散乱過程をもつ．これはやはり高エネルギーでの振る舞いが悪い．散乱振幅の部分波を計算してみると，$O(s^2)+O(s)+O(\ln s)$ の発散が存在する．

$O(s^2)$ の発散は，非アーベルゲージ理論であることにより，W^0 交換図などによりゲージ理論であれば自動的に相殺するようになっている．$O(s)$ は，スカラー粒子を導入してこれらの発散積分を相殺することを考えると（図 2.13 (e)，(f)），スカラー粒子が W と式 (2.83 a) 第 4 項で与えられるような相互作用をすればよいことが示せる．最終的には $O(\ln s)$ の対数発散のみ残り，繰り込み可能となる．

つまり自発的に対称性が破れた場合のゲージ理論は，いろいろな粒子の結合が発散をちょうどうまく相殺するようにできている[6]．逆に質量のあるベクトル場でいろいろな発散積分を，別の粒子を導入して相殺メカニズムが働くように，粒子の種類，結合定数，質量を決めていくと必ず自発的対称性の破れたゲージ理論に行き着く[12]．質量のあるベクトル場の介在する理論で繰り込み可能なのは自発的に対称性が破れたゲージ理論だけであるという結論に到達す

る．このとき，対称性は破れたのでなく隠されただけと考えるべきであろう．ヒッグスを含む全体を考えればゲージ不変性が成立しているので，発散の相殺が保証されるのである．

***U* ゲージと *R* ゲージ**

ゲージ不変性が繰り込み可能性を保証するならば，最終的な結果の物理量はゲージのとり方によらないはずである．物理的描像がよくわかるゲージ（ユニタリーゲージ）にゲージを固定してもヒッグスを含む全体を考えれば，物理量はゲージのとり方によらず同じ結果を与えるのであり，繰り込みが容易に示せるようなゲージでの結論と変わらない．トフーフトは，ξ をパラメターとする巧妙なゲージを考えた．このゲージではベクトルボソンの伝播関数を

$$\left[-g^{\mu\nu}+\frac{(1-\xi)k^{\mu}k^{\nu}}{k^2-\xi m^2}\right]\frac{1}{k^2-m^2} \tag{2.84}$$

と表す．質量 m を 0 にもっていけばフォトンの伝播関数が得られ，そこで $\xi=1$ とおくと QED でお馴染みのファインマンゲージとなる．通常の有限質量の伝播関数は $\xi\to\infty$ で実現できる．しかし，そうしたゲージでは，注意深く計算しないと高エネルギーでの発散が出てくるので計算は容易ではない．一方 ξ を有限に止めておく限り，悪さをする縦波成分は見通しよく相殺できるので，質量 0 のゲージ場と同じ振る舞いになり，せいぜい対数発散が現れるのみである（繰り込み可能なゲージ＝R ゲージ）．ただしこのゲージでは不条理な粒子（ゴースト）が現れたり $k^2=\xi m^2$ というようなパラメターに依存するところに極が出たりと物理条件には合わない．物理的にはユニタリーゲージ（U ゲージ）が最も合理的な物理的解釈がつけやすい．こうしてゲージ理論ならば繰り込み可能になるのではないかというワインバーグ-サラムの期待が的中し，またゲージ不変性をこわさずに質量を発生する方法も学んだので統一理論をつくるべき道具類はすべて揃ったことになる．

2.7 G W S 理 論

2.7.1 $SU(2)\times U(1)$

いままでの考察で，$W^{\pm}$ のように粒子が何種類かある場合のゲージ理論のつ

くり方（非アーベル場のゲージ理論）や，ゲージ粒子に質量をもたせる機構を学んだが，弱い相互作用をゲージ理論として仕立てるにはもう少し工夫が必要である．第1に弱い相互作用と電磁相互作用は一部を共有する．したがって，何らかの形で電磁相互作用と，弱い相互作用は関連している．しかし，電磁相互作用はパリティを保存するのに反し弱相互作用はパリティを最高度に破っている．これは，弱カレントが左巻きの粒子によってのみ構成されることに原因がある．そこで両者に関係をつけようとすれば，何らかの形でこの左右のアンバランスを調整する必要がある．電磁カレントにはアイソスピン τ_3 に比例する部分と1に比例する部分がある（脚注2参照）．1に比例する部分も保存カレントであるからこれも何らかのゲージ不変性から生じたとすれば電磁カレントにはアイソスピン（$SU(2)$ 対称性）のほかにもう一つの対称性をもつ成分があるに違いない．一番簡単な仮定はこれが $U(1)$ 対称性に基づくとすることである．$SU(2)$ 対称性を満たすラグランジアンは $\overline{\Psi}O\Psi$（O は 2×2 行列）の形をしているので，これが $SU(2)$ 対称性を満たすならば $U(1)$ 対称性は自動的に満たされる．そこで $U(1)$ 対称性から導かれる保存量を Y（超電荷＝hyper charge）と名づけ，二者のアンバランスの調整に使うこととしよう．$SU(2)$ 対称性から導かれる保存量を I および I_3 として，強い相互作用で成立している西島-ゲルマンの法則と同様の規則が弱い相互作用でも成立すると仮定する．すなわち

$$Q=I_3+Y/2 \tag{2.85}$$

ただし，Q は陽子の電荷 e を単位とする．とりあえずニュートリノと電子のみを考えるとすれば，対象となる粒子の種類は ν_L, ν_R, e_L, e_R の4種類である．この四者について議論を閉じることができれば，他の粒子も同様に議論ができるであろう．弱相互作用では ν_L と e_L とは常に組となって荷電カレントを構成するので，まとめて

$$\Psi_L=\begin{bmatrix}\nu_L\\ e_L\end{bmatrix} \tag{2.86}$$

とすれば，アイソスピン1/2の2重項を構成する．$m_\nu=0$ として2成分理論を採用すれば ν_R は存在しないから，e_R はアイソスピン $I=I_3=0$ をもたなければならない．すなわち

$$I_3(\nu_L)=1/2, \qquad I_3(e_L)=-1/2, \qquad I_3(e_R)=0 \tag{2.87}$$

ここで法則 (2.85) を適用すれば，超電荷は

$$Y_L\equiv Y(\Psi_L)=-1, \qquad Y_R\equiv Y(e_R)=-2 \tag{2.88}$$

であることがわかる．ヒッグススカラーは，

$$\boldsymbol{\Phi}=\begin{bmatrix}\varphi^+\\ \varphi^0\end{bmatrix} \tag{2.89}$$

であるので，アイソスピン 1/2 をもつ．アイソスピンを 1/2 とする理由は，アイソスピン0にすると1個のゲージボソンにしか質量をもたせられないが，1/2 にすれば 3 個のゲージボソンに質量をもたせられるからである．アイソスピンが 1 またはそれ以上の値が必要かどうかは別の議論（モデルの選択）となる．以下は話を最も簡単な場合 $I=1/2$ に限る．真空期待値をもつ φ^0 が真空と同じ量子数すなわち $Q=0$ をもつように選べば，$Q(\varphi^+)=+1$ であり，$Y(\boldsymbol{\Phi})=1$ となる．そこで以下のゲージ変換（$SU(2)\times U(1)$ 変換という）

$$\Psi=\begin{bmatrix}\nu\\ e\end{bmatrix}, \qquad \Psi\rightarrow\Psi'=\exp[-i\boldsymbol{\omega}(x)\cdot\boldsymbol{t}-iY\alpha(x)]\Psi \tag{2.90}$$

に対応して，共変微分

$$D_\mu=\partial_\mu+ig_W\boldsymbol{W}_\mu\cdot\boldsymbol{t}+i(g_B/2)B_\mu\cdot Y \tag{2.91}$$

を定義して運動方程式のゲージ不変性を要求する（ゲージ化するという）．$\boldsymbol{W}_\mu$ はアイソスピン 1 の $SU(2)$ 群のゲージ場，B_μ は $U(1)$ ゲージ群のゲージ場である．g_B にかかる 1/2 は後の便宜のためである．アイソスピンとハイパーチャージが粒子ごとに違うことを考慮して $\boldsymbol{t}$ と Y を演算子として表に出して書いた．

2.7.2 フェルミオンの質量項

ここで注意しなければならないのはフェルミオンの質量項である．ラグランジアンの中の質量項は，

$$e=\left[\frac{1-\gamma^5}{2}+\frac{1+\gamma^5}{2}\right]e=e_L+e_R \tag{2.92 a}$$

$$\gamma^0\gamma^5=-\gamma^5\gamma^0 \tag{2.92 b}$$

に注意すれば

$$-m_e\bar{e}e = -m_e(\bar{e}_R e_L + \bar{e}_L e_R) \tag{2.93}$$

と書けるが，e_L がアイソスピン 1/2，e_R がアイソスピン 0 をもつことを考慮すると，質量項はアイソスピン 0 ではない．つまり $SU(2)$ 変換で不変な量ではない．このことは注意すべき事柄である．左と右が対称でない世界で $SU(2)$ 対称性を実現させるためには，質量項は存在してはならないことを意味する．現実の世界では電子は質量をもつので，$SU(2)$ 対称性と両立させるためには，電子の質量もまたヒッグス機構で発生したと考え，電子とヒッグスの相互作用を導入する．Ψ と Φ はともにアイソスピン 1/2 をもつから，アイソスピン回転で不変な組み合わせ $(\Psi^\dagger\Phi)$ および $(\Phi^\dagger\Psi)$ にアイソスピン 0 の e_R をつければ，$SU(2)$ 不変かつローレンツ不変なヒッグスとの相互作用がつくれる．Φ と電子の相互作用は湯川型の

$$\mathscr{L}_{\text{MASS}} = -G_e[\bar{e}_R(\Phi^\dagger\Psi) + (\bar{\Psi}\Phi)e_R] \tag{2.94}$$

$$= -G_e[\bar{e}_R(\varphi^{+\dagger}\nu_L + \varphi^{0\dagger}e_L) + (\bar{\nu}_L\varphi^+ + \bar{e}_L\varphi^0)e_R] \tag{2.95}$$

とする．ヒッグス凝縮によって相転移が起これば

$$\varphi^+ \longrightarrow 0, \qquad \varphi^0 \longrightarrow (v+\varphi)/\sqrt{2} \tag{2.96}$$

となる．すぐ後に示すように $\varphi^+(\varphi^-)$ は $W^+(W^-)$ の縦波成分となり，φ^0 の虚部は Z の縦波成分になるのでヒッグススカラーとしては消滅する．この結果 (2.95) は

$$\mathscr{L}_{\text{MASS}} = -\frac{G_e v}{\sqrt{2}}(\bar{e}_R e_L + \bar{e}_L e_R) - \frac{G_e}{\sqrt{2}}(\bar{e}_R e_L + \bar{e}_L e_R)\varphi \tag{2.97}$$

と変形される．第 1 項は望む質量項の形をしている．ここで副産物として，電子とヒッグス粒子との相互作用が発生してしまった．しかし

$$m_e = G_e v/\sqrt{2} \tag{2.98}$$

であるので，

$$G_e = \sqrt{2}m_e/v \tag{2.99}$$

となり，電子（より一般的にはフェルミオン）とヒッグスとの相互作用の強さは，フェルミオンの質量に比例することになる．しかし，これこそ質量をもつベクトル場の理論が繰り込み可能であるための必要条件の一つであった．

以上の考察より，物質場であるフェルミオンおよびゲージボソンは，本来は質量をもたない粒子であると考えると論理が首尾一貫する．質量とはヒッグス

場が凝縮して相転移が起きたために，仮に粒子に備わった性質の一つなのである．われわれの住む世界は非常な低温状態であるために超伝導相となって質量が生じているのであり，十分高温になれば消滅するべき性質のものである．いまのところこのような高温状態は人工ではつくれないが，ビッグバン直後の初期宇宙はこのような状態であったと考えられる．なおつけ加えておくとクォークにはQCD相転移のため余分の質量がさらに加わる．

2.7.3 ワインバーグ角

電子とニュートリノについて，$SU(2)\times U(1)$ 対称性を満たす全ラグランジアンを書き下ろすと，

$$
\begin{aligned}
\mathscr{L}=&-\frac{1}{4}\boldsymbol{F}_{\mu\nu}\cdot\boldsymbol{F}^{\mu\nu}-\frac{1}{4}B_{\mu\nu}B^{\mu\nu}+\overline{\Psi}i\gamma^{\mu}D_{\mu}\Psi\\
&+(D_{\mu}\Phi)^{\dagger}(D^{\mu}\Phi)-V(\Phi)-G_e[\,\bar{e}_R(\Phi^{\dagger}\Psi_L)+(\overline{\Psi}_L\Phi)e_R]\\
&D_{\mu}=\partial_{\mu}+ig_W\boldsymbol{W}_{\mu}\cdot\boldsymbol{t}+i(g_B/2)B_{\mu}\cdot Y\\
&\boldsymbol{F}_{\mu\nu}=\partial_{\mu}\boldsymbol{W}_{\nu}-\partial_{\nu}\boldsymbol{W}_{\mu}-g_W\boldsymbol{W}_{\mu}\times\boldsymbol{W}_{\nu}\\
&B_{\mu\nu}=\partial_{\mu}B_{\nu}-\partial_{\nu}B_{\mu}\\
&V(\Phi)=\lambda\left(|\Phi|^2+\frac{\mu^2}{2\lambda}\right)^2
\end{aligned}
\tag{2.100}
$$

となる．上式の第1行をゲージセクターといい，第2行をヒッグスセクターと呼ぶことにする．ここでヒッグス場を凝縮させて対称性を自発的に破れば，ゲージ場が質量をもつことは前と同じであるが，中性ベクトルは電磁場を含むようにしなければならないので若干調整が必要である．(2.100) で，中性のベクトル場とフェルミオン場との相互作用項（第3項の D_{μ} の中の $W_{\mu}{}^0$ と B_{μ} を含む項）を抜き出して，ν と e をあらわに書くと，

$$
\begin{aligned}
\mathscr{L}_{\mathrm{INT}}&=-\overline{\Psi}\gamma^{\mu}(g_W W_{\mu}{}^0 I_3+(g_B/2)B_{\mu}Y)\Psi\\
&=-\bar{\nu}_L\gamma^{\mu}\left(\frac{g_W}{2}W_{\mu}{}^0-\frac{g_B}{2}B_{\mu}\right)\nu_L\\
&\quad+\bar{e}_L\gamma^{\mu}\left(\frac{g_W}{2}W_{\mu}{}^0+\frac{g_B}{2}B_{\mu}\right)e_L+\bar{e}_R\gamma^{\mu}(g_B B_{\mu})e_R
\end{aligned}
\tag{2.101}
$$

ただし，$Y_L=-1$，$Y_R=-2$ を，またアイソスピンに関して $I_3=\tau_3/2$ を使った．ニュートリノは電磁カレントに結合してはならないから，第1項のニュー

トリノに結合する部分を弱相互作用の中性ベクトルボソン $Z_\mu{}^0$ とし，それに直交する成分を電磁場 A_μ と定義する．

$$Z_\mu{}^0=\frac{1}{\sqrt{g_W{}^2+g_B{}^2}}(-g_B B_\mu+g_W W_\mu{}^0)\equiv-\sin\theta_W B_\mu+\cos\theta_W W_\mu{}^0$$

$$A_\mu=\frac{1}{\sqrt{g_W{}^2+g_B{}^2}}(g_W B_\mu+g_B W_\mu{}^0)\quad\equiv\cos\theta_W B_\mu+\sin\theta_W W_\mu{}^0$$

$$\sin\theta_W=\frac{g_B}{\sqrt{g_W{}^2+g_B{}^2}} \tag{2.102}$$

こうして定義した A_μ, $Z_\mu{}^0$を代入しさらに $Q=I_3+(Y/2)$ を使って整理すると

$$\mathscr{L}_{\text{INT}}=-[e\overline{\Psi}\gamma^\mu A_\mu Q\Psi+g_Z\overline{\Psi}\gamma^\mu Z_\mu{}^0(I_{3L}-Q\sin^2\theta_W)\Psi]$$

$$g_Z=\sqrt{g_W{}^2+g_B{}^2},\qquad e=g_Z\sin\theta_W\cos\theta_W=g_W\sin\theta_W \tag{2.103}$$

となる．$Q_\nu=0$, $Q_e=-1$ であり，かつ左右対称であるので，電磁場との結合はまさに望む形をしている．ここに I_{3L} と書いたのは，この部分が Ψ_L 部分のみに作用することを意味する．弱相互作用の中性カレントは荷電カレントと違い左巻き成分に作用するアイソスピンカレントのほかに，左右を区別しない電磁カレントを含むことに注意しよう．この混合の割合を決めるのが θ_W で，ワインバーグ角と呼ばれる．

2.7.4 W, Z の 質 量

W, Z の質量については (2.100) の $(D^\mu\Phi)^\dagger(D_\mu\Phi)$ の項を書き下ろすと，

$$(D^\mu\Phi)^\dagger(D_\mu\Phi)\sim\Phi^\dagger\left(-ig_W\boldsymbol{W}\cdot\boldsymbol{t}-\frac{ig_B}{2}B\cdot Y\right)\left(ig_W\boldsymbol{W}\cdot\boldsymbol{t}+\frac{ig_B}{2}B\cdot Y\right)\Phi \tag{2.104 a}$$

ここで，$t=\tau/2$, $Y_\phi=1$ を使い，Φ を真空期待値で置き換えると

$$(D^\mu\Phi)^\dagger(D_\mu\Phi)\sim(0,\ v/\sqrt{2})(1/2)^2\begin{bmatrix}g_W W^0+g_B B, & \sqrt{2}g_W W^+\\ \sqrt{2}g_W W^-, & -g_W W^0+g_B B\end{bmatrix}^2\begin{bmatrix}0\\ v/\sqrt{2}\end{bmatrix}$$

$$=\frac{v^2}{8}[2g_W{}^2W^-W^++(-g_W W^0+g_B B)^2]$$

$$=\frac{g_W{}^2v^2}{4}W^-W^++\frac{g_Z{}^2v^2}{8}Z^0Z^0 \tag{2.104 b}$$

荷電ボソンと中性ボソンでは質量項の因子が 1/2 違うことを考慮すると，質量

は

$$m_W=\frac{g_W v}{2}, \qquad m_Z=\frac{g_Z v}{2} \tag{2.105}$$

となる．W と Z が違う質量をもつことに注意しよう．荷電カレントが $W^\pm$ を介して相互作用する項は，

$$\mathscr{L}=-\frac{g_W}{\sqrt{2}}\bar{\Psi}_L\gamma^\mu[\tau_+ W^+{}_\mu+\tau_- W^-{}_\mu]\Psi_L \tag{2.106}$$

であり，これからフェルミオン散乱（例えば $\nu_L e_L \to \nu_L e_L$）の実効ラグランジアンをつくると

$$\mathscr{L}=-\frac{g_W{}^2}{8}[\bar{\nu}\gamma^\mu(1-\gamma^5)\nu]\frac{g_{\mu\nu}-\dfrac{q_\mu q_\nu}{m_W{}^2}}{q^2-m_W{}^2}[\bar{e}\gamma^\nu(1-\gamma^5)e] \tag{2.107}$$

となる．ここで，$\bar{\nu}_L\gamma^\mu\nu_L=(1/2)\bar{\nu}\gamma^\mu(1-\gamma^5)\nu$ などを使った．

$q^2\to 0$ の極限で 4 フェルミ相互作用に等しいとおくと

$$\frac{G_F}{\sqrt{2}}=\frac{g_W{}^2}{8m_W{}^2}=\frac{e^2}{8m_W{}^2\sin^2\theta_W}=\frac{1}{2v^2} \tag{2.108}$$

となるから

$$m_W{}^2=\frac{\sqrt{2}e^2}{8G_F\sin^2\theta_W}=\left(\frac{37.5\ \mathrm{GeV}}{\sin\theta_W}\right)^2 \tag{2.109 a}$$

$$m_Z=\frac{g_Z}{g_W}m_W=\frac{m_W}{\cos\theta_W} \tag{2.109 b}$$

$$v=\frac{1}{\sqrt{\sqrt{2}G_F}}=246\ \mathrm{GeV} \tag{2.109 c}$$

が導ける．質量が出現するのは Φ が真空期待値をもつことによりゲージが固定されるからであった．その結果として $SU(2)$ 不変性は破れる．しかし，フォトンの質量は 0 のままである．それは次のようにして見ることができる．$SU(2)$ 群の生成演算子 τ_a と $U(1)$ 群の生成演算子 Y は

$$\tau_a\langle\Phi\rangle=\tau_a\begin{bmatrix}0\\ \dfrac{v}{\sqrt{2}}\end{bmatrix}\neq 0, \qquad Y\langle\Phi\rangle=\langle\Phi\rangle\neq 0 \tag{2.110}$$

を満たす．ところが $Q=I_3+Y/2$ は，$Y(\Phi)=1$ であることから，$Q=(1+\tau_3)/2$ となり，

$$Q\langle \Phi \rangle = 0 \tag{2.111}$$

したがって，ゲージ変換

$$U = \exp(-iQ\alpha(x)) \tag{2.112}$$

により真空期待値は変わらないから，ゲージは固定されず演算操作 Q に対応するベクトル場 A_μ にはゲージ変換の自由度が残っていて，質量は0のままである．もともと四つのベクトル場 $W^a{}_\mu$ と B_μ より出発して，質量を与えるのに四つの自由度をもつヒッグス場 Φ を導入した．四つのスカラー場のうち，1個は有限質量のヒッグス粒子として残るから，Φ が質量を与えることができるのは3個に限られている．1個は質量0のまま残るのは勘定にあっている．

ここでゲージボソンとフェルミオンの質量はともにヒッグスセクターの中で発生したことを再度強調しておく．ゲージセクター，ヒッグスセクターともにゲージ不変性を満たすが，質量項のみを取り出しゲージセクターに付けたものはゲージ不変性を破るのである．ゲージボソンを介したフェルミオンの相互作用を扱うときトリーレベルでは有限な振幅を与えるが，高次効果を含めるときはヒッグスセクター全体を考慮に入れないと破碇するということである．

2.7.5　GWS 理論の特徴

以上の考察によって，電磁相互作用と弱相互作用を単一のラグランジアンから導く統一理論ができ上がったことになる．これは少なくも既知のフェルミ相互作用を低エネルギー近似として含み，QED も入っている．理論は繰り込み可能で，原理的には任意の精度であらゆる過程の物理量が計算可能である．しかし，この理論が発表されたときはほとんど注目を引かなかったということは興味ある事実である．科学引用文献集によると，1967年にこの論文が発表された後数年間の被引用数は，1967年0，1968年0，1969年0，1970年1，1971年4，1972年64，1973年162[13]となっている．これはワインバーグ自身の引用を含む．これほど画期的な理論がかくも無視されたのはなぜであろうか？この理由はこの理論が発表されたときは，繰り込み可能かどうかが不明だったことによる．この裏づけのない理論に対してはうんかのように輩出するその他大勢のモデルと区別する理由が何もなかったのであった．ワインバーグとサラムは，自発的に対称性が破れているゲージ理論は多分繰り込み可能であろうと

予想はしていたものの，証明はできずアイデアのみ発表していたのである．この証明は1971年末にト・フーフト[6]により行われ，それ以降急速に脚光をあびたことは上の統計から明らかである．

GWS (Glashow-Weinberg-Salam) 理論は，いろいろな意味で斬新なアイデアを含む．そのいくつかを以下に列挙しておこう．

(1) 電弱統一理論である．

(2) 繰り込み可能であり，どんな過程でも原理的には任意の精度で計算可能である．

(3) 中性カレントの存在を予想し，その強さが荷電カレントと同程度であることを予言した．

(4) $W^{\pm}, Z^0$ の質量を定量的に予言した．

(5) すべての素粒子が $SU(2)\times U(1)$ 群により分類できることを示した．現在，標準理論と呼ばれているものの範疇には，次の3世代6種類のクォークとレプトンが存在する．

$$\begin{bmatrix} \nu_{eL} \\ e_L{}^- \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \nu_{\mu L} \\ \mu_L{}^- \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \nu_{\tau L} \\ \tau_L{}^- \end{bmatrix}, \quad e_R,\ \mu_R,\ \tau_R$$

$$\begin{bmatrix} u_L \\ d_L{}' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_L \\ s_L{}' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t_L \\ b_L{}' \end{bmatrix}, \quad u_R,\ d_R{}',\ c_R,\ s_R{}',\ t_R,\ b_R{}' \tag{2.113}$$

ここには，d', s', b' は，弱い相互作用をするときの固有状態で，質量固有状態の d, s, b とは小林-益川行列で結びついている量である．また，すべてのニュートリノの質量は0であるという仮定を含む．

(6) 質量発生機構に相転移という新しいアイデアを導入した．このことは，すべての素粒子は本来質量をもたないにもかかわらず，ある臨界温度($T_c \sim v \sim 246$ GeV)以下の世界では質量が発生するということである．この相転移発生原因としてヒッグス粒子の存在を必要とする．

(7) エネルギーの高いところ($E \gg v = 246$ GeV)では，弱相互作用と電磁相互作用は統一されており，結合定数は同程度である．

現代の高エネルギー物理学における現象は，強い相互作用はQCDで，電弱相互作用はワインバーグ-サラム理論で記述される．次章以降でこれらの理論がいかに実験事実に適合するかを解説するが，現在のところ，これらの理論に

矛盾する実験事実は存在しない．その意味で，QCD と GWS 理論があらゆる議論の出発点であり，両者を合わせて標準理論と呼ばれる*9)．

参考文献

1) H. Weyl and K. Preuss : *Akad. Wiss.*, **433** (1918)
2) R. Utiyama : *Phys. Rev.*, **101** (1956) 1957
3) C.N. Yang and R.L. Mills : *Phys. Rev.*, **96** (1954) 191
4) S.L. Glashow : *Nucl. Phys.*, **22** (1961) 579
5) S. Weinberg : *Phys. Rev. Lett.*, **19** (1967) 1264
A. Salam : Elementary Particle Theory, Proc. 8th Nobel Symp., N. Svartholm, ed., Wiley-Interscience (1968)
6) G. t'Hooft : *Nucl. Phys.*, **B33** (1971) 173 ; **B35** (1971) 167
7) M. Han and Y. Nambu : *Phys. Rev.*, **139B** (1965) 1006
8) D. Gross and F. Wilczek : *Phys. Rev. Lett.*, **30** (1973) 1343
H.D. Politzer : *Phys. Rev. Lett.*, **30** (1973) 1346
9) A. Tonomura *et al.* : *Phys. Rev. Lett.*, **48** (1982) 1443, 外村　彰：物理, **37** (1982) 569, A. Tonomura *et al.* : *Phys. Rev. Lett.*, **51** (1983) 331, また，Proc. Int. Symp., Foundations of Quantum Mechanics, Tokyo (1983) を参照
10) B.S. Deaver and W. Fairbank : *Phys. Rev. Lett.*, **7** (1961) 43
11) 例えば，中嶋貞雄：超伝導入門，培風館 (1971)
12) C.H. Lewellyn-Smith : *Phys. Lett.*, **46B** (1973) 233
J.M. Cornwall *et al.* : *Phys. Rev. Lett.*, **30** (1973) 1268 ; *Phys. Rev.*, **D10** (1974) 1145
13) S. Coleman : *Science*, **206** (1979) 1290

*9) 単に GWS 理論を指して標準理論ということもしばしばある．

3
パートンモデル*[1)]

標準理論のラグランジアンはクォークとレプトン，ゲージボソンおよびヒッグス粒子の間の相互作用として書かれている．クォークとグルーオンは，閉じ込め効果によって単独の粒子として観測されることはなく，ジェットとして現れる．ジェット現象については第8章，第9章で議論するが，ハドロンの関与する現象は，一般的にハドロンの中にあるクォークとグルーオン（まとめてパートンと呼ぶ）の相互作用として記述できる．したがって標準理論を検証するためには，クォークやグルーオンの相互作用を，ハドロン現象に翻訳する枠組みが必要であり，それがパートンモデルである．パートンとは，もともとは核子の中に存在する点状の粒子という意味の命名であった．高エネルギー大角散乱（運動量遷移 Q が核子質量 M_{N} に比べて相当に大きい散乱）反応においては，ハドロンをパートンの複合体とみなし，ハドロンの反応率はパートン反応率の和で書けるというのがパートンモデルである．この章の主眼は，後の議論のための準備としてパートンモデルの公式を導いておくことであるが，モデルを正しく理解するには，基本となるレプトンとクォーク間の相互作用，すなわちスピン 1/2 をもつ質点粒子（ディラック粒子）間の電磁相互作用および弱い相互作用による反応断面積を書き下ろしておく必要がある．このため，フェルミオン-フェルミオン相互作用の例として電子（e）とミューオン（μ）の電磁相互作用による散乱とニュートリノ（ν_e）とクォークによる弱相互作用による散乱公式をまず導いておく，次に e, μ, ν による深非弾性散乱の一般公式を導いて，ハドロンを標的とする反応がパートンの散乱公式でどのように書き直せるかを見ることにする．最後にパートンモデルをハドロン-ハドロン反応へ

*1) この章の内容は，第3, 4巻『素粒子物理学の基礎 I・II』の第5章，第12章の内容と重複するので，第3, 4巻を学習した人は省略してかまわない．

拡張する．

3.1　フェルミオン 2 体散乱

3.1.1　運動学と断面積

2 体散乱の運動学変数と，相対論的なマンデルシュタム変数を次のように定義する．

$$粒子\ 1(p_1)+粒子\ 2(p_2) \longrightarrow 粒子\ 3(p_3)+粒子\ 4(p_4) \tag{3.1}$$

$$s=(p_1+p_2)^2$$
$$=\begin{cases} m_1{}^2+m_2{}^2+2E_1m_2 \simeq 2E_1m_2 & 実験室系\ (\mathrm{LAB}) \\ (E_1{}^*+E_2{}^*)^2 \simeq 4p^{*2} & 重心系\ (\mathrm{CM}) \end{cases} \tag{3.2 a}$$

$$t=(p_1-p_3)^2$$
$$=\begin{cases} m_1{}^2+m_3{}^2-2(E_1E_3-p_1p_3\cos\theta) & \mathrm{LAB} \\ \simeq -2E_1E_3(1-\cos\theta) & \\ \simeq -2p^{*2}(1-\cos\theta^*) & \mathrm{CM} \end{cases} \tag{3.2 b}$$

$$u=(p_1-p_4)^2=(p_2-p_3)^2$$
$$=\begin{cases} m_2{}^2+m_3{}^2-2m_2E_3 & \mathrm{LAB} \\ \simeq -2p^{*2}(1+\cos\theta^*) & \mathrm{CM} \end{cases} \tag{3.2 c}$$

$$s+t+u=\sum m_i{}^2 \tag{3.2 d}$$

$\simeq$ は高エネルギーで質量を無視したときの近似式である．p^*, p'^* は散乱前後の重心系 (CM) での運動量，また，実験室系とは標的が静止している系のことである．

散乱行列 S を次式で定義する．

$$S=T\exp\left(i\int\mathscr{L}\mathrm{d}^4x\right)$$
$$=1+i\int\mathscr{L}\mathrm{d}^4x+\frac{i^2}{2!}\int T(\mathscr{L}(t_1)\mathscr{L}(t_2))\mathrm{d}^4x_1\mathrm{d}^4x_2+\cdots \tag{3.3 a}$$

$\mathscr{L}$ は相互作用表示での相互作用ラグランジアンであり，T は時間の順序に並べる T 積である．始状態 i と終状態 f を指定して，遷移行列要素を次のように展開する．

$$\langle f|S|i\rangle = \delta_{fi} - iT_{fi} = \delta_{fi} - i(2\pi)^4\delta^4(p_1+p_2-p_3-p_4)\mathcal{M}_{fi} \tag{3.3 b}$$

このとき断面積は次式で与えられる．

$$\mathrm{d}\sigma = |\mathcal{M}_{fi}|^2 \frac{\mathrm{d}LIPS}{F} \tag{3.4 a}$$

$$F = 4E_1E_2v_{12} = 4[(p_1\cdot p_2)^2 - m_1{}^2m_2{}^2]^{1/2} = 2s\lambda(1, x_1, x_2) \tag{3.4 b}$$

$$\lambda(x, y, z) = (x^2+y^2+z^2-2xy-2yz-2zx)^{1/2}, \qquad x_i = m_i{}^2/s$$

$$\mathrm{d}LIPS = (2\pi)^4\delta^4(p_1+p_2-\sum p_f)\frac{1}{m!}\prod_f \frac{\mathrm{d}^3p_f}{(2\pi)^3 2E_f} \tag{3.4 c}$$

で与えられる．$\mathcal{M}_{fi}$ はローレンツ不変な遷移行列要素，F は入射フラックス，v_{12} は相対速度，d$LIPS$ はローレンツ不変な位相体積であり，$m!$ は同一粒子が存在する場合の補正因子である．

3.1.2　eμ　散　乱

ここで，典型的なスピン 1/2 のフェルミオン同士の散乱として，$e\mu$ 散乱を考える．各粒子の運動学変数を次式で定義する．

$$e(p_1) + \mu(p_2) \longrightarrow e(p_3) + \mu(p_4)$$

電子の質量は 0 と近似し，μ の質量を M と書く，電子，μ のつくる電磁カレントを次のように定義する．

$$\begin{aligned} e\langle p_3|j_l{}^\mu(x)|p_1\rangle &= -e\langle p_3|\,\bar{l}(x)\gamma^\mu l(x)|p_1\rangle = ej_l{}^\mu(0)\mathrm{e}^{-i(p_1-p_3)\cdot x} \\ &= -e\bar{u}_b(p_3)\gamma^\mu u_a(p_1)e^{-iq\cdot x} \end{aligned} \tag{3.5}$$

ここに，$l(x)$, $\bar{l}(x)$ はレプトンの量子化された場であり，$q = p_1 - p_3 = p_4 - p_2$, $u_a(p)$ は運動量 p, スピン成分 a のディラック平面波波動関数である．$e\mu$ 散乱の不変行列要素は

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{fi} &= e^2\langle p_4|j_m{}^\mu(0)|p_2\rangle\frac{-g_{\mu\nu}}{q^2}\langle p_3|j_e{}^\nu(0)|p_1\rangle \\ &= e^2\bar{u}_d(p_4)\gamma_\mu u_c(p_2)\frac{-1}{q^2}\bar{u}_b(p_3)\gamma^\mu u_a(p_1) \end{aligned} \tag{3.6}$$

で与えられる．不変行列要素の自乗を（3.4 a）式に入れれば断面積が得られるが，スピン状態を観測しないときは，スピンの始状態について平均を終状態については和をとらねばならない．これを $|\overline{\mathcal{M}}_{fi}|^2$ と書くことにする．付録（B.20），（B.21）を参照し，$m_1 = m_3 = m$, $m_2 = m_4 = M$ と置いて

$$K_V{}^{\mu\nu}(p_i, p_f) \equiv \sum_{a,b} \bar{u}_b(p_f)\gamma^\mu u_a(p_i)\{\bar{u}_b(p_f)\gamma^\nu u_a(p_i)\}^*$$
$$= 4[p_f{}^\mu p_i{}^\nu + p_f{}^\nu p_i{}^\mu + (q^2/2)g^{\mu\nu}] \tag{3.7}$$

$$K_V{}^{\mu\nu}(p_1, p_3)K_{V\mu\nu}(p_2, p_4)$$
$$= 16[2(p_1p_2)(p_3p_4) + 2(p_1p_4)(p_2p_3) + \{(p_1p_3) + (p_2p_4)\}t + t^2]$$
$$= 8[(s - m^2 - M^2)^2 + (u - m^2 - M^2)^2 + 2t(m^2 + M^2)] \tag{3.8}$$

さらに $m=0$ とすれば

$$|\overline{\mathcal{M}}_{fi}|^2 = \frac{2e^4}{q^4}[(s-M^2)^2 + (u-M^2)^2 + 2tM^2]$$
$$= \frac{4e^4}{q^4}[(s-M^2)(M^2-u) + tM^2 + t^2/2] \tag{3.9}$$

実験室系での $s-M^2=2E_1M$, $M^2-u=2E_3M$, $t=q^2=-2E_1E_3(1-\cos\theta)$ を入れて (C.18) を使えば

$$\frac{d\sigma}{d\Omega_{LAB}} = \sigma_M \frac{E_3}{E_1}\left[1 - \frac{q^2}{2M^2}\tan^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\right] \tag{3.10 a}$$

$$\sigma_M = \sigma_{MOTT} = \frac{4\alpha^2}{q^4}E_3{}^2\cos^2\frac{\theta}{2} \tag{3.10 b}$$

重心系断面積は，(C.12) により

$$\frac{d\sigma}{d\Omega_{CM}} = \left(\frac{p_f}{p_i}\right)\frac{1}{64\pi^2 s}|\mathcal{M}_{fi}|^2 \tag{3.11}$$

で与えられるので，M^2 の無視できる高エネルギー極限では，

$$\frac{d\sigma}{d\Omega_{CM}}(e\mu \to e\mu) = \frac{\alpha^2}{t^2}\left[\frac{s^2+u^2}{2s}\right] = \frac{\alpha^2}{t^2}s\left[\frac{1+\left(\frac{1+\cos\theta^*}{2}\right)^2}{2}\right] \tag{3.12}$$

3.1.3　$e^+e^- \to \mu^+\mu^-$ 反応の断面積

$e\mu$ 散乱振幅において，図 3.1 を参照して $p_2 \to -p_2$, $p_3 \to -p_3$ とすれば，$e\bar{e} \to \mu\bar{\mu}$ 散乱の振幅が得られる．$e^- \to \mu^-$ の散乱角を θ とし，新しい反応での s, t, u を，t チャネルという意味で，t の添え字を付ければ，

$$s = (p_1+p_2)^2 \qquad \longrightarrow (p_1-p_2)^2 = u_t$$
$$t = (p_1-p_3)^2 = q^2 \longrightarrow (p_1+p_3)^2 = s_t$$
$$u = (p_1-p_4)^2 \qquad \longrightarrow (p_1-p_4)^2 = t_t \tag{3.13}$$

$e\mu$ の散乱行列要素（の自乗のスピン平均）は，

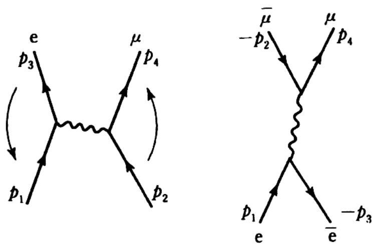


図 3.1 $e^-\mu^- \to e^-\mu^-$ 散乱より，交叉によって $e^-e^+ \to \mu\mu^-$ を得る．散乱振幅 $\mathcal{M}(e^-\mu^- \to e^-\mu^-)$ の変数 (p_1, p_2, p_3, p_4) を $\to (p_1, -p_2, -p_3, p_4)$ とすれば $\mathcal{M}(e^-e^+ \to \mu^-\mu^+)$ が得られる．すなわち $\mathcal{M}(e^-e^+ \to \mu^-\mu^+; s, t, u) = \mathcal{M}(e^-\mu^- \to e^-\mu^-; t, u, s)$

$$|\overline{\mathcal{M}}_{fi}|^2 \sim \frac{(s^2+u^2)}{t^2} \longrightarrow \frac{({t_t}^2+{u_t}^2)}{{s_t}^2} \tag{3.14}$$

となるので，t の添え字を落として書き直すと，$e\bar{e} \to \mu\bar{\mu}$ の散乱断面積は，

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\alpha^2}{s^2}\frac{(t^2+u^2)}{2s} = \frac{4\pi\alpha^2}{3s}\left[\frac{3}{16\pi}(1+\cos^2\theta)\right] \tag{3.15}$$

$$\sigma_\mu \equiv \sigma_{TOT} = \int d\sigma = \frac{4\pi\alpha^2}{3s} = \frac{87}{s} nb^{*2)} \tag{3.16}$$

ただし，s は GeV^2 を単位とする．これは，$e\bar{e}$ 衝突型加速器実験での基礎になる断面積である．

***R* 値**：　e^-e^+ 衝突実験における全ハドロン断面積を μ 対生成断面積で割った値を R 値と呼ぶ．生成されたクォークは100%ハドロン化するものとすると，ハドロン生成全断面積は，すべてのクォーク対生成断面積に等しいから，クォークの電荷を $\lambda_i e$ とすれば

$$R \equiv \frac{\sigma(e^-e^+ \to \text{ハドロン})}{\sigma(e^-e^+) \to \mu^-\mu^+} = \frac{\sum\sigma(e^-e^+ \to q_i\bar{q}_i)}{\sigma(e^-e^+ \to \mu^-\mu^+)} = 3\sum{\lambda_i}^2$$

$$= 2(q=u, d, s),\ 10/3(q=u, d, s, c),\ 11/3(q=u, d, s, c, b) \tag{3.17}$$

因子3はカラーの自由度からくるもので，これがないと実験に合わせられない．また，R の実験値は $\sqrt{s} < 3$ GeV（$c\bar{c}$ のしきい値）で～2，$\sqrt{s} \gg 3$ GeVで～10/3，$\sqrt{s} \gg 10$ GeV（$b\bar{b}$ のしきい値）で～11/3と，予想とよく合う（図3.2）[1]．ただし，上式は摂動の最低次の計算であり，データとの比較には電弱相互作用およびQCDの放射補正を含める．

---

*2)　1 nb $= 10^{-9}$ barn $= 10^{-33}$ cm^2

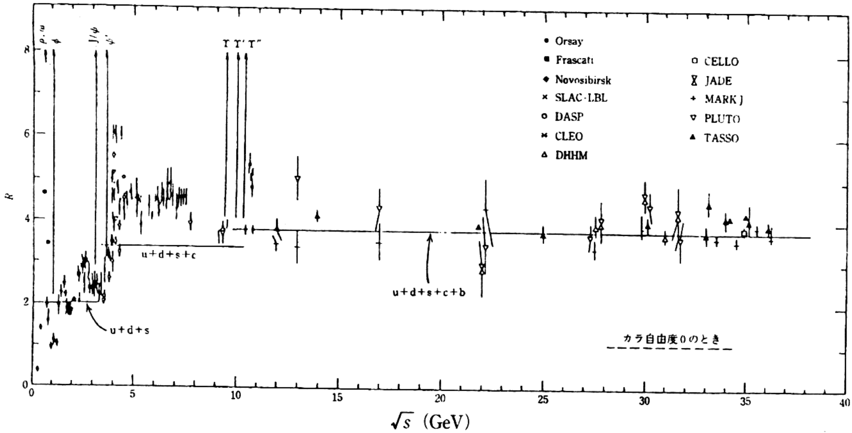


図 3.2 $R=\sigma(e^+e^-\to$ ハドロン$)/\sigma(e^+e^-\to\mu\mu)$[1)]

ハドロンはクォークからできており，e^+e^- 反応でクォーク対がつくられ，クォークが100%ハドロン化するとすれば，R 値はクォークモデルの予想値と正確に合う．鋭い山は $\rho, J/\psi, \Upsilon$ などの狭い共鳴生成を示す．横線は生成されるクォークの種類と数により決まる R 値の計算値．

3.1.4 偏極 $e\mu$ 散乱

ここで，後の便宜のため偏極している $e\mu$ 散乱断面積を計算しておく，

$$\psi=\frac{1-\gamma^5}{2}\psi+\frac{1+\gamma^5}{2}\psi=\psi_L+\psi_R \tag{3.18}$$

と，場をカイラリティによって分割する．$\Gamma=\gamma^\mu, \gamma^5\gamma^\mu$ とすれば，

$$\bar{\psi}\Gamma^\mu\psi=\bar{\psi}_R\Gamma^\mu\psi_R+\bar{\psi}_L\Gamma^\mu\psi_L$$

$$\bar{\psi}_L\Gamma^\mu\psi_R=\bar{\psi}_R\Gamma^\mu\psi_L=0 \tag{3.19}$$

であるので，カイラリティはベクトル形の相互作用によっては変わらない．偏極していない $e\mu$ 散乱をカイラリティ状態で書き直せば

$e\mu$ 散乱$\sim(e_L+e_R)(\mu_L+\mu_R)$ 散乱

$\sim e_L\mu_L$ 散乱$+e_L\mu_R$ 散乱$+e_R\mu_L$ 散乱$+e_R\mu_R$ 散乱

と分解できる．ただし，ヘリシティはハミルトニアンの固有状態であるが，カイラリティは固有状態ではなく，質量が有限のときは干渉が生じる．しかし，カイラリティ固有状態に混じる劣勢なヘリシティ成分は $\sim O(m/E)$ であるので（付録 (B.16) 参照）．質量を無視する近似ではヘリシティによる分類とカイラリティによる分類は同等であり，カイラリティによる分離が成立する．

偏極した eμ 散乱は，(3.6) 式の行列要素の中の $\gamma^\mu \to \gamma^\mu(1\mp\gamma^5)/2$ として得られる．付録 (B.22), (B.23) を参照して，

$$K_{L,R}{}^{\mu\nu}(p_i, p_f)=\frac{1}{4}\sum_{\text{スピン}} \bar{u}(p_f)\gamma^\mu(1\mp\gamma^5)u(p_i)\{\bar{u}(p_f)\gamma^\nu(1\mp\gamma^5)u(p_i)\}^*$$
$$=2[\{p_i^\mu p_f^\nu+p_i^\nu p_f^\mu-g^{\mu\nu}(p_ip_f)\}\pm i\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}p_{i\rho}p_{f\sigma}] \qquad (3.20)$$

$$K_{L\mu\nu}(p_2, p_4)K_L{}^{\mu\nu}(p_1, p_3)=K_{R\mu\nu}(p_2, p_4)K_R{}^{\mu\nu}(p_1, p_3)$$
$$=16(p_1p_2)(p_3p_4)\simeq 4s^2 \quad (s\gg m_i{}^2) \qquad (3.21\,\text{a})$$

$$K_L{}^{\mu\nu}(p_2, p_4)K_{R\mu\nu}(p_1, p_3)=K_R{}^{\mu\nu}(p_2, p_4)K_{L\mu\nu}(p_1, p_3)$$
$$=16(p_1p_4)(p_2p_3)\simeq 4u^2 \quad (u\gg m_i{}^2) \qquad (3.21\,\text{b})$$

を使えば，m_e, m_μ を無視する近似で

$$|\mathcal{M}(e_L\mu_L \to e_L\mu_L)|^2=|\mathcal{M}(e_R\mu_R \to e_R\mu_R)|^2=4e^4\frac{s^2}{t^2} \qquad (3.22\,\text{a})$$

$$|\mathcal{M}(e_R\mu_L \to e_R\mu_L)|^2=|\mathcal{M}(e_L\mu_R \to e_L\mu_R|^2=4e^4\frac{u^2}{t^2} \qquad (3.22\,\text{b})$$

重心系の断面積は，(3.11) を使って

$$\frac{\mathrm{d}\sigma_{LL}}{\mathrm{d}\Omega_{CM}}=\frac{\mathrm{d}\sigma_{RR}}{\mathrm{d}\Omega_{CM}}=\frac{\alpha^2}{s}\frac{s^2}{t^2} \qquad (3.23\,\text{a})$$

$$\frac{\mathrm{d}\sigma_{LR}}{\mathrm{d}\Omega_{CM}}=\frac{\mathrm{d}\sigma_{RL}}{\mathrm{d}\Omega_{CM}}=\frac{\alpha^2}{s}\frac{u^2}{t^2}=\frac{\alpha^2}{t^2}s\left[\frac{1+\cos\theta}{2}\right]^2 \qquad (3.23\,\text{b})$$

LL, RR 散乱と LR, RL 散乱の違いは，$\{(1+\cos\theta)/2\}^2$ であるが，これはヘリシティ $\pm 1/2$ 状態を角度 θ だけ回転する回転行列 $d^{\frac{1}{2}}_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}}$ の自乗にほかならない．また，両者の行列要素は $p_1 \leftrightarrow -p_3$, $p_2 \leftrightarrow -p_4$ の交叉対称によっても結び付いているので，片方の粒子を反粒子にすることと $L \leftrightarrow R$ と同等であることがわかる．

粒子が偏極していないときは，e や μ の中には LR 成分がそれぞれ 1/2 ずつあるから

$$\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega_{CM}}=\frac{1}{4}[\mathrm{d}\sigma_{LL}+\mathrm{d}\sigma_{LR}+\mathrm{d}\sigma_{RL}+\mathrm{d}\sigma_{RL}]=\frac{\alpha^2}{t^2}\frac{s^2+u^2}{2s} \qquad (3.24)$$

となって，(3.12) を再現する．

後のパートンの議論の便宜のため，パートン変数

$$y=\frac{s+u}{s}\simeq\frac{2(p_2\cdot p_1-p_3)}{2(p_1\cdot p_2)}\simeq\begin{cases}\dfrac{1-\cos\theta^*}{2} & \text{CM}\\[2ex] \dfrac{E_1-E_3}{E_1} & \text{LAB}\end{cases} \tag{3.25}$$

を導入しておく．このとき，

$$\frac{d\sigma}{dy}=4\pi\frac{d\sigma}{d\Omega}\bigg|_{CM} \tag{3.26}$$

であるので

$$\frac{d\sigma_{LL,RR}}{dy}=\frac{4\pi\alpha^2}{t^2}s\equiv\sigma_{EM},\qquad \frac{d\sigma_{LR,RL}}{dy}=\sigma_{EM}(1-y)^2 \tag{3.27}$$

$$\therefore\quad \frac{d\sigma}{dy}(e\mu\to e\mu)=\frac{1}{4}\sum_{a,b}\frac{d\sigma_{a,b}}{dy}=\sigma_{EM}\frac{1+(1-y)^2}{2} \tag{3.28}$$

3.1.5　ニュートリノクォーク散乱

弱い相互作用のラグランジアンは次式で与えられる（式 (2.103), (2.106) 参照）.

$$\mathcal{L}_{CC}=-\frac{g_W}{\sqrt{2}}\bar{q}_L\gamma^\mu(\tau_+W^+{}_\mu+\tau_-W^-{}_\mu)q+(q\to l) \tag{3.29 a}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{NC}&=-g_Z\bar{q}\gamma^\mu(I_{3L}-Qs_W{}^2)Z_\mu q+(q\to l)\\ &=-g_Z\bar{q}\gamma^\mu\left(\varepsilon_L\frac{1-\gamma^5}{2}+\varepsilon_R\frac{1+\gamma^5}{2}\right)Z_\mu q+(q\to l)\end{aligned} \tag{3.29 b}$$

$$g_W=\frac{e}{s_W},\qquad g_Z=\frac{e}{s_Wc_W} \tag{3.30 a}$$

$$\varepsilon_L=I_3-Qs_W{}^2,\qquad \varepsilon_R=-Qs_W{}^2 \tag{3.30 b}$$

s_W はワインバーグ角 $\sin\theta_W$ である．上式を使えば，荷電カレント反応断面積は，偏極した eμ 散乱断面積から

$$\left(\frac{4\pi\alpha}{t}\right)^2\longrightarrow\left(\frac{g_W{}^2/2}{t-m_W{}^2}\right)^2=\left[2\sqrt{2}G_F\frac{m_W{}^2}{m_W{}^2-q^2}\right]^2\simeq 8G_F{}^2 \tag{3.31}$$

と置き換えて得られる．クォークについては始状態スピンの平均をとるが，ニュートリノには右成分がないので，スピン平均をとらないことに注意すれば，

$$\frac{d\sigma}{dy}(\nu q,\ \bar{\nu}\bar{q})=\frac{G_F{}^2}{\pi}s \tag{3.32 a}$$

$$\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}y}(\nu\bar{q},\ \bar{\nu}q)=\frac{G_F{}^2}{\pi}s(1-y)^2 \tag{3.32 b}$$

同様に中性カレントによる断面積は，

$$\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}y}(\nu q,\ \bar{\nu}\bar{q})=\frac{G_N{}'^2}{\pi}s[\varepsilon_L{}^2+\varepsilon_R{}^2(1-y)^2] \tag{3.33 a}$$

$$\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}y}(\bar{\nu}q,\ \nu\bar{q})=\frac{G_N{}'^2}{\pi}s[\varepsilon_L{}^2(1-y)^2+\varepsilon_R{}^2] \tag{3.33 b}$$

$$G_N{}'^2\equiv G_N{}^2\left[\frac{m_Z{}^2}{m_Z{}^2-q^2}\right]^2\simeq G_N{}^2 \tag{3.33 c}$$

$$G_N=\rho G_F$$

で与えられる．トリー近似では $\rho=1$ である．

3.2 eN 弾性散乱

核子 N (陽子 p と中性子 n) は構造をもつので電磁カレントの期待値は形状因子を含む．ローレンツ不変性を取り入れた最も一般的な形は

$$e\langle p_4|J_N{}^\mu(x)|p_2\rangle$$

$$=e\bar{u}(p_4)[F_1(q^2)\gamma^\mu-\frac{\chi}{2M}F_2(q^2)i\sigma^{\mu\nu}q_\nu]u(p_2)e^{iqx} \tag{3.34 a}$$

$$F_1{}^p(0)=F_2{}^p(0)=F_2{}^n(0)=1, \qquad F_1{}^n(0)=0 \tag{3.34 b}$$

$$\chi^p=1.793, \qquad \chi^n=-1.913 \tag{3.34 c}$$

と書ける．ただし，$q=p_4-p_2$，χ は核子磁気能率 ($\mu=e/(2m_N)$) を単位とした異常磁気能率である．(3.10) 式を計算する過程で，不変行列要素内のミューオンカレントを核子カレントに置き換え ($j_m{}^\mu\to J_N{}^\mu$)，スピン演算を行うとローゼンブラス (Rosenbluth) の公式が得られる．

$$\left.\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega}\right|_{\mathrm{LAB}}=\sigma_M\frac{E_3}{E_1}\left[\frac{G_E{}^2+\tau G_M{}^2}{1+\tau}+2\tau G_M{}^2\tan^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\right] \tag{3.35 a}$$

$$\tau=\frac{Q^2}{4M^2}=-\frac{q^2}{4M^2} \tag{3.35 b}$$

ただし，$G_E(Q^2)$, $G_M(Q^2)$ は電気，磁気形状因子で

$$G_E\equiv F_1-\chi\tau F_2, \qquad G_M\equiv F_1+\chi F_2 \tag{3.35 c}$$

で定義される．実験によれば $Q^2<30\ \mathrm{GeV}^2$ で

$$G_E{}^p(Q^2)=\frac{G_M{}^p}{\mu_p}=\frac{G_M{}^n}{\mu_n}=\left(1+\frac{Q^2}{0.71\,\mathrm{GeV}^2}\right)^{-2},\qquad G_E{}^n(Q^2)=0 \tag{3.36 a}$$

が成立し，核子は

$$\sqrt{\langle r^2\rangle}\simeq 0.7\ \mathrm{Fermi}\simeq(1/2\ m_\pi) \tag{3.36 b}$$

程度の広がりをもつことを示す[2].

3.3 *eN* 深非弾性散乱

$$e(p_1)+N(p_2)\longrightarrow e(p_3)+X(p_F)$$

の一般的な式を考える．ただし，X はハドロン集合体を意味する．

$$\begin{aligned}\mathcal{M}_{fi}&=e^2\langle p_3|j_{e\mu}(0)|p_1\rangle\frac{-1}{q^2}\langle p_F|J_N{}^\mu(0)|p_2\rangle\\&=e^2\bar{u}_a(p_3)\gamma_\mu u_b(p_1)\frac{-1}{q^2}\langle p_F|J_N{}^\mu(0)|p_2\rangle\end{aligned} \tag{3.37}$$

であるので，終状態の電子のみ観測する場合は，

$$\mathrm{d}\sigma=\frac{(4\pi\alpha)^2}{4(p_1p_2)}L_{\mu\nu}\frac{1}{q^4}4\pi MW^{\mu\nu}\frac{d^3p_3}{(2\pi)^3 2E_3} \tag{3.38 a}$$

$$L_{\mu\nu}=\frac{1}{2}\times 4[p_3{}^\mu p_1{}^\nu+p_3{}^\nu p_1{}^\mu+(q^2/2)g^{\mu\nu}] \tag{3.38 b}$$

$$W^{\mu\nu}\equiv\frac{(2\pi)^4}{4\pi M}\sum_F\delta^4(p_2+q-p_F)\left[\frac{1}{2}\sum_{スピン}\langle p_2|J_N{}^\mu|p_F\rangle\langle p_F|J_N{}^\nu|p_2\rangle\right] \tag{3.38 c}$$

J^μ はエルミートなので $W^{\mu\nu}=W^{\nu\mu *}$ であり，対称部分 $S^{\mu\nu}$ と反対称部分 $A^{\mu\nu}$ に分ければ

$$W^{\mu\nu}=S^{\mu\nu}+iA^{\mu\nu}$$

$S^{\mu\nu}, A^{\mu\nu}$ は実の関数である．核子のスピンについては平均をとってしまっているので，$W^{\mu\nu}$ は q と $p=p_2$ のみの関数であり，しかもローレンツテンソルである．したがって，$g^{\mu\nu}$, $q^\mu q^\nu$, $p^\mu p^\nu$, $p^\mu q^\nu$, $q^\mu p^\nu$, $i\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}p_\rho q_\sigma$ などで展開できるが，カレント保存則 $\partial_\mu J^\mu\sim q_\mu J_N{}^\mu=0$ より，

$$q_\mu W^{\mu\nu}=q_\nu W^{\mu\nu}=0 \tag{3.39 a}$$

という条件がつくので，

$$\left(-g^{\mu\nu}+\frac{q^\mu q^\nu}{q^2}\right),\quad \left(p^\mu-\frac{(pq)q^\mu}{q^2}\right)\left(p^\nu-\frac{(pq)q^\nu}{q^2}\right),\qquad i\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}p_\rho q_\sigma \tag{3.39 b}$$

が条件を満たす量となる．このうち，第3項は反対称テンソルであり最初の2項とは逆のパリティをもつ．電磁相互作用では，パリティが保存するのでこの項はないが（$L_{\mu\nu}$ に掛ければ0となる），$\nu(\bar{\nu})$ 非弾性散乱では必要である．次に

$$W^{\mu\nu}=\left(-g^{\mu\nu}+\frac{q^\mu q^\nu}{q^2}\right)W_1(Q^2,\nu)+\left(p^\mu-\frac{(pq)q^\mu}{q^2}\right)\left(p^\nu-\frac{(pq)q^\nu}{q^2}\right)\frac{W_2(Q^2,\nu)}{M^2} \tag{3.40}$$

とおいて構造関数 W_1, W_2 を定義する．

$$q^\mu L_{\mu\nu}=q^\nu L_{\mu\nu}=0$$

を使えば

$$L_{\mu\nu}W^{\mu\nu}=4E_1E_3\left[W_2\cos^2\frac{\theta}{2}+2W_1\sin^2\frac{\theta}{2}\right] \tag{3.41}$$

ゆえに（3.38 a）から，実験室系断面積として次の式を得る．

$$\left.\frac{\mathrm{d}^2\sigma}{\mathrm{d}\Omega\mathrm{d}E_3}\right|_{LAB}=\frac{4\alpha^2}{Q^4}E_3{}^2\left[W_2\cos^2\frac{\theta}{2}+2W_1\sin^2\frac{\theta}{2}\right]$$
$$=\sigma_M[W_2+2W_1\tan^2(\theta/2)] \tag{3.42}$$

$W_{1,2}$ は，Q^2 および $\nu=E_1-E_3$ の変数であり，核子の中のさまざまの構造をすべて内包するが，$E_1, Q^2, 2M\nu\to\infty, x=Q^2/2M\nu\to$ 定数では，x のみの関数となるという次のブヨルケンスケーリングが実験的に成立する[3)]．

$$MW_1(Q^2,\nu)\to F_1(x),\qquad \nu W_2(Q^2,\nu)\to F_2(x) \tag{3.43}$$

ブヨルケンスケーリングは核子が点状粒子（パートン）の集合体であるとき成立する．これを簡単に見るには，非弾性散乱公式の中の $W_{1,2}$ を

$$2MW_1=\frac{Q^2}{2M}\delta\left(\nu-\frac{Q^2}{2M}\right),\qquad W_2=\delta\left(\nu-\frac{Q^2}{2M}\right) \tag{3.44}$$

で置き換え，$\int\delta(\nu-Q^2/2M)\mathrm{d}E_3=E_3/E_1$ を使えば，点粒子散乱公式（3.10 a）を再現できることに注目すればよい．

3.4　パートンモデル

核子がパートンの集合体であることを見やすくするため，次式で定義される

変数 x を導入する．先に定義した y とともにパートン変数もしくはスケーリング変数という．

$$x=\frac{Q^2}{2M\nu}\simeq\frac{Q^2}{sy} \tag{3.45}$$

$\simeq$ はパートン質量が，核子質量や関与するエネルギーに比して無視できる極限で成立する．深非弾性散乱公式 (3.42) のブヨルケン極限をパートン変数を使って書き直すと，

$$\frac{\mathrm{d}^2\sigma}{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}=\frac{4\pi\alpha^2}{Q^4}s[F_2(x)(1-y)+2xF_1(x)(y^2/2)] \tag{3.46}$$

パートンの縦運動量を核子縦運動量 $p_{2//}$ の ξ 倍 ($p_{q//}=\xi p_{2//}$) とすると，エネルギーが大きいところでは，パートン質量，横運動量は無視できるので，パートンのエネルギー運動量自身を $p_q\simeq\xi p_2$ と近似できる．パートンが散乱の前後でほぼ自由粒子であるという条件を書き下ろすと（図 3.3 参照），

$$p_q{}^2=(\xi p_2)^2=(q+\xi p_2)^2$$

$$\therefore\quad \xi=\frac{-q^2}{2(p_2q)}=\frac{Q^2}{2M\nu}=x \tag{3.47}$$

すなわち，変数 x はパートンの運動量と解釈できる量である．

電子とパートンとの散乱の式は，式 (3.28) をパートン変数で書き換えればよい．

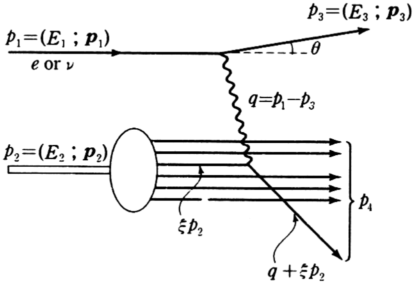


図 3.3　深非弾性散乱とパートンモデル
パートンは散乱の前後で自由粒子であるとみなす．
$\xi=x=-\frac{q^2}{2(p_2q)}$ をもつパートンのみ e（または ν）と反応し，他は素通りする．

$$\left.\frac{d\sigma}{dy}\right|_{eq}=\lambda_q{}^2\frac{4\pi\alpha^2}{t^2}\hat{s}\left[\frac{1+(1-y)^2}{2}\right] \tag{3.48}$$

ただし，λ_q はパートンの電荷，$\hat{s}=(p_1+xp_2)^2\simeq x(p_1+p_2)^2=xs$ である．核子の中で，パートン運動量分布が $q(x)dx$ で与えられるものとすれば，

$$\frac{d^2\sigma}{dxdy}=\sigma_{EM}\frac{1+(1-y)^2}{2}\sum\lambda_q{}^2xq(x) \tag{3.49 a}$$

$$\sigma_{EM}=\frac{4\pi\alpha^2}{t^2}s \tag{3.49 b}$$

が成立するから，式 (3.46) と比較して，

$$F_2(x)=2xF_1(x) \tag{3.50 a}$$

$$F_2(x)=\sum\lambda_q{}^2xq(x) \tag{3.50 b}$$

が得られる．式 (3.50 a) はカラン-グロス (Callan-Gross) の公式と呼ばれ，パートンがスピン 1/2 をもつ粒子であるとき成立する．

拡大パートンモデル：　本来のパートンモデルは，ブヨルケンスケーリングの成立を前提とする．しかし，QCD の目で改めて見直すとスケーリング則はあくまでも近似でしかない．グルーオン放出などの効果を入れると，$q(x)$ は Q^2 にも依存するので，スケーリングは破れているとしなければならない．しかし，パートン描像やパートンモデルに伴う物理的解釈は依然として有効であるので，$q(x, Q^2)$ を Q^2 に依存する分布関数と拡大解釈すれば，この章で導くパートンモデルの式は QCD でもそのまま使用可能である．$q(x, Q^2)$ の Q^2 依存性は QCD によって与えられる（後述§ 5.5)．

3.5　仮想フォトンとの反応

電子非弾性散乱を，電子が供給する（仮想）フォトンと核子の反応という形で書いておくと便利なことが多い．フォトンの断面積を次式で定義する．フォトンの偏極ベクトルを $\varepsilon_\mu(\lambda)$, $\lambda=\pm$(横波)，0（縦波）とすると

$$d\sigma_\gamma=\frac{4\pi^2\alpha}{K}\varepsilon_\mu(\lambda)\varepsilon_\nu(\lambda)^*W^{\mu\nu} \tag{3.51}$$

$W^{\mu\nu}$ は電子核子非弾性散乱に出てきた構造関数と同じもので，(3.38 c) で与えられる．K は実験室系でのフォトンエネルギーに相当する量であるが，仮

想光子のときは $q^2 \to 0$ のときにフォトンのエネルギーに一致するものであれば何でもよく，ここでは，

$$4KM|_{LAB}=4[(qp_2)^2-q^2p_2{}^2]^{1/2}=4M(\nu^2+Q^2)^{1/2} \tag{3.52}$$

で定義する．したがって $K \neq q^0$ である．

この仮想フォトンは，エネルギー運動量 $q^\mu=(p_1-p_3)^\mu=(\nu;\boldsymbol{q})$ をもち，空間的すなわち $q^2=-Q^2<0$ である．運動方向を z 軸にとる座標系で偏極ベクトルを次式で定義する（付録 (B.29) 参照)．

$$\text{横波偏極ベクトル：}\varepsilon^\mu(\pm)=(0;\mp 1/\sqrt{2},\ -i/\sqrt{2},0) \tag{3.53 a}$$

$$\text{縦波偏極ベクトル：}\varepsilon^\mu(0)=(|\boldsymbol{q}|;0,0,q^0)/\sqrt{-q^2} \tag{3.53 b}$$

$$\text{スカラー偏極ベクトル }\varepsilon^\mu(s)=q^\mu/\sqrt{-q^2} \tag{3.53 c}$$

縦波偏極の定義は通常の有限質量の縦波ベクトルにならって定義しているが，仮想フォトンの運動量が空間的であるので $\varepsilon(0)$ は時間的となる．

$$\varepsilon_\mu(0)\varepsilon^\mu(0)=1 \tag{3.53 d}$$

このため完全性の条件は

$$\sum_{\lambda=\pm,0}(-1)^{\lambda-1}\varepsilon^\mu(\lambda)\varepsilon^\nu(\lambda)^*=-\left(g^{\mu\nu}-\frac{q^\mu q^\nu}{q^2}\right) \tag{3.53 e}$$

となる．ブライト系（エネルギーがやり取りされず運動量のみがやり取りされる系，すなわち $q^0=0$ の系；図 3.4 参照）では，$\varepsilon^\mu(0)=(1;0,0,0)$ である．これらの偏極ベクトルを使うと，フォトン断面積は，

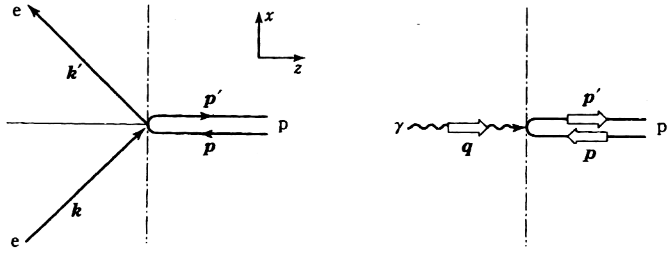


図 3.4 ブライト系 (a) では，電子はあたかも煉瓦塀に跳ね返されるように，エネルギー，p_x は変えずに p_z のみ変える．陽子は $+z$ 方向から入射し $+z$ 方向に跳ね返される．仮想フォトンは運動量 $\boldsymbol{q}$ をもって入射し陽子により吸収される．電子のスピンは 1/2，仮想フォトンのスピンは 1（横波），0（縦波）であるので，角運動量保存則により陽子は横波フォトンのみ吸収できる．∴ $\sigma_L=0$．逆に陽子のスピンが 0 であれば，縦波フォトンのみ吸収できて $\sigma_T=0$ となる．

$$\sigma_T = \frac{1}{2}(\sigma_+ + \sigma_-) \equiv \frac{1}{2}\frac{4\pi^2\alpha}{K}\sum_{\lambda=\pm1}\varepsilon_\mu(\lambda)\varepsilon_\nu(\lambda)^* W^{\mu\nu} = \frac{4\pi^2\alpha}{K}W_1 \tag{3.54 a}$$

$$\sigma_L \equiv \frac{4\pi^2\alpha}{K}\varepsilon_\mu(0)\varepsilon_\nu(0)^* W^{\mu\nu} = \frac{4\pi^2\alpha}{K}W_L \tag{3.54 b}$$

$$W_L = [(1+\nu^2/Q^2)W_2 - W_1] \tag{3.54 c}$$

電子非弾性散乱の式 (3.42) を仮想フォトンの断面積で書き表すと

$$\frac{d^2\sigma}{dE_3 d\Omega} = \Gamma(\sigma_T + \varepsilon\sigma_L) \tag{3.55 a}$$

$$\Gamma = \frac{\alpha K}{2\pi^2 Q^2}\frac{E_3}{E_1}\frac{1}{1-\varepsilon} \tag{3.55 b}$$

$$\varepsilon = \left[1 + 2\frac{\nu^2+Q^2}{Q^2}\tan^2\frac{\theta}{2}\right]^{-1} \tag{3.55 c}$$

となる．スケーリングの成り立つところでは，

$$\sigma_T \longrightarrow (4\pi^2\alpha/KM)F_1 \tag{3.56 a}$$

$$\sigma_L \longrightarrow (4\pi^2\alpha/KM)F_L \tag{3.56 b}$$

$$F_L = (1/2x)(F_2 - 2xF_1) \tag{3.56 c}$$

がいえる．実験的には $F_L \simeq 0$ であり，カラン-グロスの式が成立する．このとき，フォトンのエネルギーを yE_1 とおき書き直すと

$$d^2\sigma \simeq \sigma_T dP(y, Q^2)dy \tag{3.57 a}$$

$$dP(y, Q^2) = \frac{\alpha}{2\pi}\left\{\frac{1+(1-y)^2}{y}\right\}d\ln Q^2 \tag{3.57 b}$$

となっている．この式は電子が質量 Q^2，運動量 y の仮想光子を提供しそのフラックスが $dP(y, Q^2)dy$ で与えられると解釈できる．この考え方や式は，後に QCD の DGLAP 発展方程式の分割関数（付録 C.6，§5.5 参照）や，WW 融合反応のルミノシティを計算するときに使われる．

3.6 ニュートリノによる深非弾性散乱

ニュートリノクォーク散乱の散乱断面積はすでに式 (3.32)，(3.33) で与えた．パートンモデルにおける荷電カレントによる ν 核子散乱の式は，電子-核子深非弾性散乱の式 (3.49) を式 (3.28) から導いたと同じ論理を踏襲して，

$$\frac{\mathrm{d}^2\sigma}{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}(\nu N)=\frac{G_F{}^2}{\pi}s\sum[xq(x)+(1-y)^2x\bar{q}(x)] \tag{3.58 a}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2\sigma}{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}(\bar{\nu}N)=\frac{G_F{}^2}{\pi}s\sum[(1-y)^2xq'(x)+x\bar{q}'(x)] \tag{3.58 b}$$

で与えられる．νN 反応と $\bar{\nu}N$ 反応では一般に関与するクォーク種が違うので，q と q' で区別した．

他方においては，ニュートリノによる深非弾性散乱の一般式も，電子による場合と同じ取扱いができる．電子散乱の (3.38 c) に対応する式は，

$$W^{\mu\nu}\equiv\frac{(2\pi)^4}{4\pi M}\sum_F\delta^4(p_2+q-p_F)\left[\left(\frac{1}{2}\right)\sum_{\text{スピン}}\langle p_2|J_W{}^\mu|p_F\rangle\langle p_F|J_W{}^\nu|p_2\rangle\right] \tag{3.59}$$

ここで，$J_W{}^\mu$ は，歴史上の理由により標準理論の弱相互作用のラグランジアンの荷電カレントから結合定数 $g_W/\sqrt{2}$ をとり 2 倍した次式（昔のフェルミカレント）で定義される．

$$J_W{}^\mu=\bar{q}\gamma^\mu\tau_+(1-\gamma^5)q$$

弱カレントは軸性ベクトルカレントを含むため保存カレントではないので，6 個ある構造関数を 2 個に減らすことはできないが，レプトンカレントを掛ければ，下記の 3 項以外はレプトン質量に比例するので無視できる．W_3 は $W^{\mu\nu}$ の展開項の $i\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}p_\rho q_\sigma$ (3.39 b) の係数である．

$$\frac{\mathrm{d}^2\sigma^{\nu,\bar{\nu}}}{\mathrm{d}\Omega\mathrm{d}E_3}=\frac{G_F{}^2}{2\pi^2}E_3{}^2\left[2W_1{}^{\nu,\bar{\nu}}(Q^2,\nu)\sin^2\frac{\theta}{2}+W_2{}^{\nu,\bar{\nu}}(Q^2,\nu)\cos^2\frac{\theta}{2}\right.$$
$$\left.\mp W_3{}^{\nu,\bar{\nu}}(Q^2,\nu)\frac{E_1+E_3}{M}\sin^2\frac{\theta}{2}\right] \tag{3.60}$$

スケーリング極限では，

$$MW_1(Q^2,\nu)\to F_1(x),\quad \nu W_2(Q^2,\nu)\to F_2(x),\quad \nu W_3(Q^2,\nu)\to -F_3(x) \tag{3.61 a}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2\sigma^{\nu,\bar{\nu}}}{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}=\frac{G_F{}^2}{2\pi}s\left[(1-y)F_2{}^{\nu,\bar{\nu}}(x)+\left(\frac{y^2}{2}\right)2xF_1{}^{\nu,\bar{\nu}}(x)\pm y\left(1-\frac{y}{2}\right)xF_3{}^{\nu,\bar{\nu}}(x)\right] \tag{3.61 b}$$

カラン-グロスの関係式が成立すれば

$$\frac{\mathrm{d}^2\sigma^\nu}{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}=\frac{G_F{}^2}{2\pi}s\left[\frac{F_2{}^\nu+xF_3{}^\nu}{2}+\frac{F_2{}^\nu-xF_3{}^\nu}{2}(1-y)^2\right] \tag{3.62 a}$$

$$\frac{d^2\sigma^{\bar{\nu}}}{dxdy}=\frac{G_F{}^2}{2\pi}s\left[\frac{F_2{}^{\bar{\nu}}+xF_3{}^{\bar{\nu}}}{2}(1-y)^2+\frac{F_2{}^{\bar{\nu}}-xF_3{}^{\bar{\nu}}}{2}\right] \tag{3.62 b}$$

と書き直せる．式 (3.58) と比較すれば，

$$F_2(x)=\sum 2x[q(x)+\bar{q}(x)] \tag{3.63 a}$$

$$xF_3(x)=\sum 2x[q(x)-\bar{q}(x)] \tag{3.63 b}$$

因子 2 は，弱い相互作用がベクトルカレントのほかに軸性ベクトルカレントの寄与を余分に与えることによる．以下，もう少し実験条件に即して考察する．ミューニュートリノによる荷電カレント反応を例にとると，核子内の s, c クォークなどの寄与を無視する近似で起こりうる反応は

$$\nu_\mu+d \longrightarrow \mu^-+u, \qquad \nu_\mu+\bar{u} \longrightarrow \mu^-+\bar{d}$$

$$\bar{\nu}_\mu+u \longrightarrow \mu^++d, \qquad \bar{\nu}_\mu+\bar{d} \longrightarrow \mu^++\bar{u}$$

である．ここで，陽子の中の $u, d, \bar{u}, \bar{d}$ クォークの分布関数を $u(x), d(x), \bar{u}(x), \bar{d}(x)$ と書くと，

$$\frac{d^2\sigma^{\nu p}}{dxdy}=\frac{G_F{}^2}{\pi}sx[d(x)+\bar{u}(x)(1-y)^2] \tag{3.64 a}$$

$$\frac{d^2\sigma^{\bar{\nu} p}}{dxdy}=\frac{G_F{}^2}{\pi}sx[u(x)(1-y)^2+\bar{d}(x)] \tag{3.64 b}$$

中性子のクォーク分布関数は，$u \leftrightarrow d$, $\bar{u} \leftrightarrow \bar{d}$ として得られる．陽子標的と中性子標的の平均をとり（アイソスカラー標的；重水素，鉄など），

$$q(x)=[u(x)+d(x)]/2 \tag{3.65 a}$$

$$\bar{q}(x)=[\bar{u}(x)+\bar{d}(x)]/2 \tag{3.65 b}$$

と改めて書けば，式 (3.58 b) の q' は q と等しくなる．

このことは一般に言える．一般式 (3.61) は，荷電対称演算 $(\exp(-i\pi I_y))$ で，$p \to n$, $J^\pm \to -J^\mp$ になるので，

$$F_i{}^{\nu p}=F_i{}^{\bar{\nu} n}, \quad F_i{}^{\bar{\nu} p}=F_i{}^{\nu n}, \quad i=1,2,3 \tag{3.66}$$

が成立する．したがってアイソスカラー標的に対しては，

$$F_i{}^{\nu N}=(F_i{}^{\nu p}+F_i{}^{\nu n})/2=(F_i{}^{\bar{\nu} p}+F_i{}^{\bar{\nu} n})/2=F_i{}^{\bar{\nu} N}\equiv F_i{}^{\nu} \tag{3.67}$$

が成立するので，σ^ν と $\sigma^{\bar{\nu}}$ との差は F_3 の前の符号のみとなる．

$$\frac{d^2\sigma^{\nu,\bar{\nu}}}{dxdy}=\frac{G_F{}^2}{2\pi}s\left[(1-y)F_2{}^{\nu}(x)+\left(\frac{y^2}{2}\right)2xF_1{}^{\nu}(x)\pm y\left(1-\frac{y}{2}\right)xF_3{}^{\nu}(x)\right] \tag{3.68}$$

アイソスカラー標的のときの分布関数 (3.65) を式 (3.58) に代入した式と比

較して，

$$F_2{}^{\nu}=x[u(x)+d(x)+\bar{u}(x)+\bar{d}(x)] \tag{3.69 a}$$

$$xF_3{}^{\nu}=x[u(x)+d(x)-\bar{u}(x)-\bar{d}(x)] \tag{3.69 b}$$

すなわち，F_2 は全クォークの寄与を，F_3 はバレンスクォーク*3) の寄与を表すことがわかる．対応する電子散乱の構造関数は，

$$F_2{}^{ep}=\frac{4}{9}x[u(x)+\bar{u}(x)]+\frac{1}{9}[d(x)+\bar{d}(x)] \tag{3.70 a}$$

$$F_2{}^{en}=\frac{4}{9}x[d(x)+\bar{d}(x)]+\frac{1}{9}[u(x)+\bar{u}(x)] \tag{3.70 b}$$

であるから，アイソスカラー標的では

$$F_2{}^{e}=\frac{5}{18}x[u(x)+d(x)+\bar{u}(x)+\bar{d}(x)]=\frac{5}{18}F_2{}^{\nu} \tag{3.70 c}$$

式 (3.70 c) は実験的によく成立しており (図 3.5)，パートンモデルの正しさとパートンがクォークであることの証拠を提供する[4]．パートンモデルの理論的正当化は，その後 QCD の漸近自由により与えられた (後述§ 5.2)．

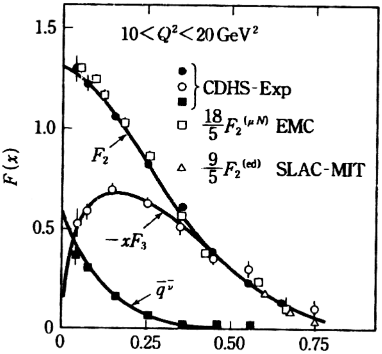


図 3.5 電子とニュートリノ散乱による構造関数の比較[4]
$F_2(x)=q(x)+\bar{q}(x)$, $xF_3(x)=q(x)-\bar{q}(x)$, $\bar{q}(x)$ をプロットする．●○■はニュートリノデータで，□は μ-N 散乱，△は eD 散乱で得られた $F_2(x)$ にそれぞれ $\frac{18}{5}$ と $\frac{9}{5}$ を掛けたもの．

加算則： 核子の量子数をクォークモデルを使って書き直すと，次のようないろいろな加算則が成立する．s, $\bar{s}$ クォークおよびグルーオンの寄与も考慮

*3) 核子の量子数に寄与するクォークのこと，一方，真空と同じ量子数をもつ $q\bar{q}$ 対は海クォークと呼ぶ．

して考えることにすると，

バリオン数　：$B=1=\int dx(1/3)[u-\bar{u}+d-\bar{d}+s-\bar{s}]$

$$=(1/3)\int dx F_3(x)/x \tag{3.71 a}$$

アイソスピン：$I=\frac{1}{2}=\int dx\frac{1}{2}[u-d-\bar{u}+\bar{d}]$

$$=\int dx\frac{1}{2}[u_v-d_v] \tag{3.71 b}$$

電荷　：$Q=1=\int dx[\frac{2}{3}(u-\bar{u})-\frac{1}{3}(d-\bar{d}+s-\bar{s})]$

$$=\int dx[\frac{2}{3}u_v-\frac{1}{3}(d_v+s-\bar{s})] \tag{3.71 c}$$

ストレンジネス：$S=0=-\int dx[s-\bar{s}]$ (3.71 d)

また，(3.70) より

$$\int dx\frac{F_2{}^{ep}-F_2{}^{en}}{x}=\frac{1}{3}\int dx[(u_v-d_v)+2(\bar{u}-\bar{d})] \tag{3.72}$$

が成立するので，海クォークについて $SU(3)$ 対称を仮定すると，$\bar{u}(x)=\bar{d}(x)=\bar{s}(x)(=s(x))$ が言えるので，式 (3.71 b) と合わせて，

$$U\equiv\int dx\frac{F_2{}^{ep}-F_2{}^{en}}{x}=\frac{1}{3} \tag{3.73}$$

が導ける．これらの式は全部が独立ではなく西島-ゲルマンの法則で結びついている．グルーオンとクォークのもつ総運動量は陽子の運動量に等しいから

$$1=\int x dx[\sum q_i(x)+g(x)] \tag{3.74}$$

しかし，グルーオンは電子とは反応しないから，クォークの全運動量の和は，

$$P_q=\int x\sum q_i(x)dx=1-\int xg(x)dx<1 \tag{3.75}$$

(3.71a) は，グロス-レウェリン-スミス (Gross-Llewellyn-Smith) の加算則 (Sum rule)[5] として，(3.71c) はアドラー (Adler) の加算則[6] として，(3.73) はゴットフリート (Gottfried)[7] の加算則として知られている．これらの検証は，$x\sim0$ 付近の精密データが必要であるのでそれほどやさしくはない．実験的には $x=0.003\sim0.8$ くらいまで測定されていて，$B\sim0.9\pm0.2$, $U\sim0.227$

±0.016 が得られるので，GLS，ゴットフリート加算則はほぼ成立しているといってよい．

3.7 ドレル-ヤン過程

ハドロン同士の衝突過程で，実験的にも理論的にも最もよく調べられているのが，陽子（またはハドロン）と陽子の衝突でミューオン対を生成するドレル-ヤン（Drell-Yan）過程である．

$$p(\text{or } \pi \text{ or } \bar{p})(p_{\rm A})+p(p_{\rm B}) \to \mu^+(p_c)+\mu^-(p_d)+X$$

X はたくさんのハドロンを意味する．信号としてレプトン対を拾いだすので実験的には比較的容易に得られる反応である（図 3.6)．

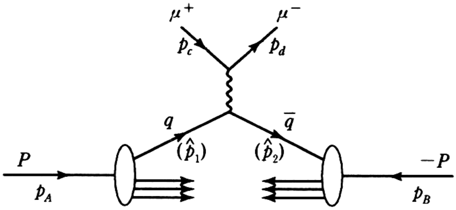


図 3.6 ドレル-ヤン過程
$p\bar{p} \to \mu^+\mu^-+X$ を $q\bar{q} \to \gamma^* \to \mu^+\mu^-$ と考える．

μ 対を生成する種々の過程の中では，ハドロンの中の $q\bar{q}$ が対消滅する過程が圧倒的に大きい．この過程は，運動学が $e\bar{e} \to \mu\bar{\mu}$ とほとんど同一であり，式 (3.15) からクォークの電荷 λ_q と色の自由度を補正しかつ $s \to \hat{s}$（$q\bar{q}$ 対の全エネルギー）として得られる．クォークには R, G, B の 3 種類あるが，μ 対は無色であるから，$\mathrm{R\bar{R}, G\bar{G}, B\bar{B}}$ の組み合わせのみ許される．各色は平均して 1/3 の確率で存在するから，カラー因子 $(1/3)^2\times 3=1/3$ がかかる．したがって，

$$\hat{\sigma}(q\bar{q} \to \mu\bar{\mu}\,;\hat{s})=\frac{\lambda_q{}^2}{3}\sigma(e\bar{e} \to \mu\bar{\mu})=\frac{4\pi\lambda_q{}^2\alpha^2}{9\hat{s}} \tag{3.76}$$

パートンの運動学変数を考慮しよう．この過程は核子 A の中のクォーク 1（運動量 $x_1p_{\rm A}$）と核子 B の中のクォーク 2（運動量 $x_2p_{\rm B}$）が反応する．パートン 2 体系のマンデルシュタム変数を，ハット（＾）をつけて表すことにする．

2体系の実効質量の自乗を $\hat{s}$，全エネルギー運動量を q とし，パートンの質量と横運動量を無視すれば，2核子の重心系では，

$$x_1 p_A \simeq x_1 \ (E; 0, 0, p) \tag{3.77 a}$$

$$x_2 p_B \simeq x_2 (E; 0, 0, -p) \tag{3.77 b}$$

$$\begin{aligned} q = x_1 p_A + x_2 p_B &= (q^0; 0, 0, |\boldsymbol{q}|) \\ &= ((x_1+x_2)E; 0, 0, (x_1-x_2)p) \end{aligned} \tag{3.77 c}$$

であるので，

$$\hat{s} = q^2 = (x_1+x_2)^2 E^2 - (x_1-x_2)^2 p^2 \fallingdotseq 4x_1 x_2 E^2 = x_1 x_2 s \equiv \tau s \tag{3.78}$$

である．ハドロン A の中の香り i をもつ q_i, $\bar{q}_i$ の運動量分布を $q_{iA}(x)$, $\bar{q}_{iA}(x)$ とすれば，ハドロン衝突で $\mu\bar{\mu}$ 対が生成される断面積は，$\mu\bar{\mu}$ 対の不変質量 $q^2 = \tau s$ として，

$$\mathrm{d}^2\sigma(\mathrm{A}+\mathrm{B} \to \mu\bar{\mu}+\mathrm{x}) = \frac{4\pi\alpha^2}{9q^2}\sum \lambda_i^2 [q_{iA}(x_1)\bar{q}_{iB}(x_2) + (\mathrm{A} \leftrightarrow \mathrm{B})]\mathrm{d}x_1 \mathrm{d}x_2 \tag{3.79}$$

この式の重要なポイントは，深非弾性散乱で決められたクォークの分布関数をそのまま使うところにある．ただし，パートンモデルが適用できる運動学領域を適当に設定する必要はある．パートンモデルが成立するのは，堅い反応すなわち，反応に関与したエネルギーと運動量遷移が十分大きくパートン自身のエネルギーも 1 GeV を大きく超えるようなところである．電子やニュートリノ非弾性散乱の経験から，$x \gtrsim 1\ \mathrm{GeV}/E\ (\mathrm{GeV})$ ならば安全であろう．

(3.79) 式を書き直すと

$$s^2 \frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}q^2} = \frac{4\pi\alpha^2}{9}\frac{1}{\tau}\frac{\mathrm{d}L_{AB}}{\mathrm{d}\tau}(\tau) \tag{3.80 a}$$

$$\frac{\mathrm{d}L_{AB}}{\mathrm{d}\tau}(\tau) = \int \mathrm{d}x_1 \mathrm{d}x_2 \delta(x_1 x_2 - \tau) \sum \lambda_i^2 \{q_{iA}(x_1)\bar{q}_{iB}(x_2) + (\mathrm{A} \leftrightarrow \mathrm{B})\} \tag{3.80 b}$$

となる．式 (3.80 b) はパートンのルミノシティと呼ばれる量である．(3.80 a) の右辺は $\tau = q^2/s$ のみの関数であり，q^2 や s によらないというスケーリングが成立する．

観測量としてはファインマン x と呼ばれる AB 系の縦運動量 $2|\boldsymbol{q}|/\sqrt{s} = x_F = x_1 - x_2$，ラピディティ η がよく使われる．

$$\eta = \frac{1}{2}\ln\frac{(q^0+|\boldsymbol{q}|)}{(q^0-|\boldsymbol{q}|)} \fallingdotseq \frac{1}{2}\ln\frac{x_1}{x_2} \tag{3.81}$$

x_1, x_2 は，τ, x_F がわかっているときは次式から求められる．

$$x_1=(\sqrt{4\tau+x_F{}^2}+x_F)/2 \tag{3.82 a}$$

$$x_2=(\sqrt{4\tau+x_F{}^2}-x_F)/2 \tag{3.82 b}$$

x_F を使った場合の断面積は，

$$\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2=\frac{\mathrm{d}q^2\mathrm{d}x_F}{(x_1+x_2)s} \tag{3.83 a}$$

であるので，q^2, x_F で書き直すと

$$s\frac{\mathrm{d}^2\sigma}{\mathrm{d}q^2\mathrm{d}x_F}=\frac{4\pi\alpha^2}{9q^2}\frac{\sum\lambda_i{}^2[q_{i\mathrm{A}}(x_1)\bar{q}_{i\mathrm{B}}(x_2)+(\mathrm{A}\leftrightarrow\mathrm{B})]}{x_1+x_2} \tag{3.83 b}$$

ここで，$x_F=0$ $(x_1=x_2=\sqrt{\tau})$ とおけば，

$$sq^2\frac{\mathrm{d}^2\sigma}{\mathrm{d}q^2\mathrm{d}x_F}\bigg|_{x_F=0}=\frac{2\pi\alpha^2}{9\sqrt{\tau}}\sum\lambda_i{}^2\{q_{i\mathrm{A}}(\sqrt{\tau})q_{i\mathrm{B}}(\sqrt{\tau})+(\mathrm{A}\leftrightarrow\mathrm{B})\} \tag{3.84}$$

であるので，$\mu\bar{\mu}$ 対の生成断面積を測定すればパートン分布関数を直接に求められる．

実験的には[8)]

(1)　スケーリングはよく成立している．

(2)　ドレル-ヤン過程で得られたパートン分布関数は，深非弾性散乱で得られた分布関数と一致する．

(3)　カラー因子 1/3 は必要である．

(4)　角分布は，スピン 1/2 クォーク対消滅過程から期待される $(1+\cos^2\theta)$ と一致する．

(5)　分布関数や角分布はよく再現するものの絶対値は予想より大きい．

この差は K 因子と呼ばれる．

$$K=\frac{(\mathrm{d}\sigma/\mathrm{d}q^2)_{\mathrm{exp.}}}{(\mathrm{d}\sigma/\mathrm{d}q^2)_{\mathrm{theor.}}} \tag{3.85}$$

実験によれば，このエネルギー変数領域（$q\sim20\sim30$ GeV）で $K\sim1.6$ である．これは QCD の高次補正効果で説明可能である（§ 5.7 参照）．

ドレル-ヤン過程にパートンモデルを適用できると正当化するのはそれほど自明ではない．第 1 に深非弾性散乱ではパートンと相互作用するのは空間的な仮想フォトン（$q^2<0$）であるのに対し，ドレル-ヤン過程で関与するのは $q^2>0$ の時間的フォトンであり，運動変数領域が大きく異なる．第 2 に，パートン

の運動量分布はハドロン内での多重グルーオン交換の結果生じたと考えられる．深非弾性散乱では，パートンが相手にするのは電子もしくはニュートリノであり，ハードな（$|q^2|$ が大きい）散乱は瞬間的に起こり，ソフトグルーオン交換効果であるパートンの分布は反応継続中は保持されると考えてよい．しかし，ハドロン同士の散乱では，散乱自体はハードであるが，ソフトグルーオン交換による長距離相互作用の影響があり，散乱が起きる前にパートン分布を変えてしまう可能性を無視できないと考えられるからである．しかし，その後のQCD研究により，ハドロン反応過程においても，ソフトな部分（パートン分布関数）とハードな部分（パートン反応）の積に分解（factorization）してよいことが証明された（後述§5.7）．この場合のパートン分布関数は $|q|^2$ とともに発展する（拡大パートンモデル）．こうして深非弾性散乱におけるパートンモデルとともに，任意のハドロン過程におけるパートンモデルの式（3.79）にも理論的な根拠が与えられたのである．

参考文献

1) TASSO; M. Althoff *et al.*: *Z. Phys.*, **C22** (1984) 307
2) E. B. Hughs *et al.*: *Phys. Rev.*, **B139** (1965) 458
   J. R. Dunning *et al.*: *Phys. Rev.*, **141** (1966) 1286
3) J. D. Bjorken: *Phys. Rev.*, **179** (1969) 547
4) CDHS; H. Abramowicz *et al.*: *Z. Phys.*, **C17** (1983) 283
5) D. J. Gross and C. H. Llewellyn-Smith: *Nucl. Phys.*, **B14** (1969) 337
6) S. Adler: *Phys. Rev.*, **143** (1966) 1144
7) K. Gottfried: *Phys. Rev. Lett.*, **18** (1967) 1174
8) C. N. Brown *et al.*: *Phys. Rev. Lett.*, **63** (1989) 2637

4
中性カレント (GWS 理論の検証)*1)

GWS 理論は，繰り込み可能であるとともに，電磁気相互作用と弱相互作用を統一した画期的な理論である．しかし，物理学の理論であるためには，数学的に美しいだけでは不十分で，自然を記述するものでなければならない．低エネルギーの極限では，フェルミ理論になるのであるから，少なくもこれまでの弱相互作用現象はカバーしている．とすれば高エネルギーでの振る舞いを正しく記述するか，フェルミ理論の範疇に入らない新現象を正しく予言するかで理論の正当性が検証されることになる．第 2 章で，GWS 理論は中性カレントの存在と W, Z の質量を予言することを見た．この章では中性カレント現象がまさしく存在し，GWS 理論の予言通りに振る舞うことを示す．W, Z 粒子の発見とその性質については，第 6，7 章で記述する．

4.1 中性カレント反応の発見

ベータ崩壊弱相互作用を記述するために導入されたフェルミ理論は，いくつかの修正は受けたものの，それまで知られていたほとんどすべての弱相互作用現象を正しく記述する．フェルミ相互作用は“荷電カレント”同士の結合によるところにその特徴がある．ゲージ理論の言葉を使えば“$W^{\pm}$ を交換する”ので，相互作用をすることによって粒子は電荷を変える．例えば，最も簡単な ν_e または $\bar{\nu}_e$ と電子の散乱を考えよう．この反応は図4.1 (a)，(b) のように

*1) この章では，GWS 理論が検証されていく歴史的記述を主眼としたので，当時のデータをそのまま使った例が一部ある．最新のデータについては文献 7 を参照せよ．結論が変わるところはない．

$W^{\pm}$ を媒介として起こすことができる．$\nu_e e$ 散乱は，GWS 理論が発表された時点でまだ観測されていなかったが，$\bar{\nu}_e e$ 散乱は原子炉を使ったライネス (Reines) などの実験ですでに観測されていた[1)]．GWS理論が正しければ，Z^0 交換の寄与もあるはずである (図4.1 (c), (d))．Z^0 の寄与は，原理的には実験値から $W^{\pm}$ 交換項の寄与を計算して差し引いた残余として求められる．しかし，ニュートリノとレプトンとの反応は断面積が小さくて統計が稼げない（フェルミ理論を使えば $\sigma \propto G_F{}^2 s \fallingdotseq 2G_F{}^2 E_\nu m_{\mathrm{target}}$ であるので，電子が標的の場合は陽子に比べて $m_e/m_p \sim 1/2000$ だけ損する)．そこで，$\nu_\mu e$（または $\bar{\nu}_\mu e$）散乱 (図4.1 (e), (f)) を考えてみよう．ν_μ と e は二重項を構成しないから $W^{\pm}$ をやりとりして散乱することはできない．別のいい方をすると，ν_μ は W^- と結合して μ^- には変われるが電子にはなれないのである (レプトンの香りの保存)．Z^0 を交換する場合は，ν_μ は ν_μ のままでいられるから，香りは保存し電荷

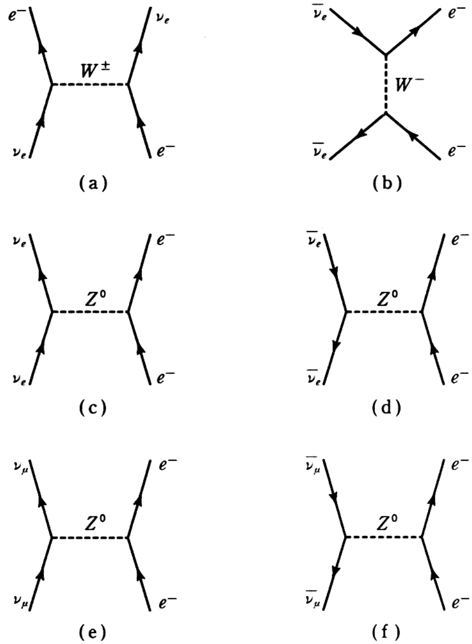
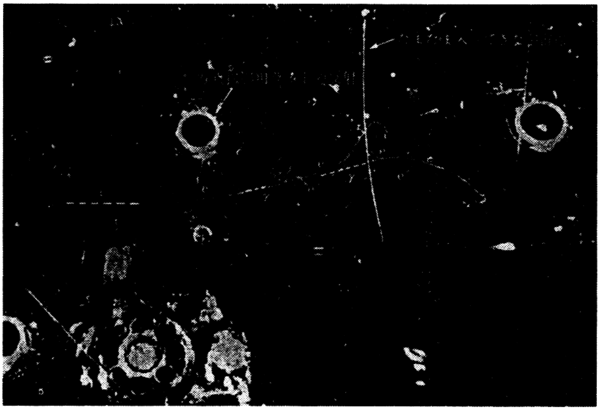


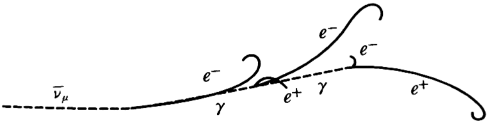
図 4.1 (a), (b) $\nu_e e^- \to \nu_e e^-$, $\bar{\nu}_e e^- \to \bar{\nu}_e e^-$ 散乱の荷電カレントによる反応図
(c), (d) $\nu_e e^- \to \nu_e e^-$, $\bar{\nu}_e e^- \to \bar{\nu}_e e^-$ 散乱の中性カレントによる反応図
(e), (f) $\nu_\mu e^- \to \nu_\mu e^-$, $\bar{\nu}_\mu e^- \to \bar{\nu}_\mu e^-$ 散乱の中性カレントによる反応図

も変わらない．すなわち $\nu_\mu e$ 散乱は $W^\pm$ の交換を含まない純粋な中性カレント現象であり，GWS 理論にあってフェルミ理論にはない現象である．$\bar{\nu}_e e$ 散乱を精密測定して，荷電カレント反応の寄与を分離し，中性カレントの寄与があることを証明するのは困難であるが，$\nu_\mu(\bar{\nu}_\mu)e$ 散乱は，一例でもあれば中性カレント存在の証拠となる．

ラガリグ (Lagarigue) を中心とするグループは，CERN (欧州原子核研究機構) の PS (陽子加速器，エネルギー26 GeV) でつくったミューニュートリノビームを，ガーガメル (Gargamelle) という 10 トンの巨大泡箱に照射し，100 万枚に及ぶ写真をとり 50 名からの研究者を動員して精力的に解析をはじめた．新理論の検証には，近代科学技術の粋を集めかつ組織の動員を必要とする．その後高エネルギー物理学が巨大科学の道を歩みはじめる走りとなった実験である．図4.2に最初に発見された中性カレント反応の写真を示す[2)]．左か



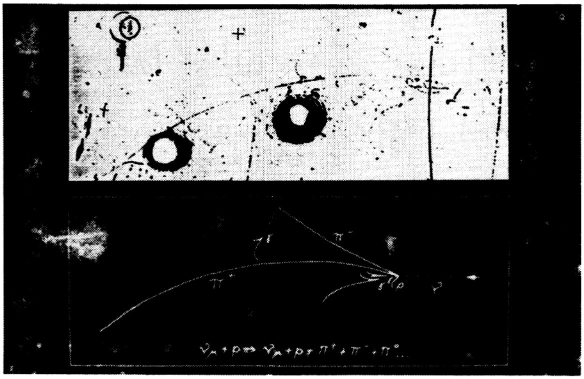
(a)



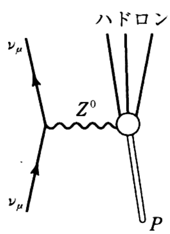
(b)

図 4.2 最初の中性カレント反応の写真 (CERN 提供)[2)]
左から入ってきた $\bar{\nu}_\mu$ が電子を跳ね飛ばし，電子がフォトン (中性であるので見えない) を放出して次々と電子・陽電子対をつくる．

ら入ってきた反ニュートリノ($\bar{\nu}_\mu$)が泡箱の中の電子をはじき飛ばしている．反跳粒子は制動放射と対生成（V字型軌跡）を繰り返すという電子特有の特徴を示している．ミューオン（実験的には非常に長い軌跡として特徴づけられる．なぜなら物質とはイオン化反応以外の相互作用をほとんどしないから）が存在しないことが中性カレントの特徴を表している．歴史的にはこの事象が最初の発見であったが，定量的データは統計の稼げる原子核を標的とするハドロン反応によって得られた[3]．図4.3にハドロンにおける中性カレント反応例を示す．



(a)



(b)

図4.3　中性カレントによるハドロン生成 (CERN 提供)

(a)　$\nu_\mu+p\rightarrow\nu_\mu+p+\pi^++\pi^-+\pi^0$ の泡箱写真例，(b) は (a) 反応のファインマン図．
図中点線の後のV字形はフォトンによりつくられた電子-陽電子対．フォトンは $\pi^0\rightarrow2\gamma$ よりできる．

4.2　中性カレントラグランジアン

以下，中性カレント現象を定量的に議論するため，中性カレントによる反応断面積を求めておこう．GWS ラグランジアンのクォークおよびレプトンの相互作用に関与する部分を抜き出すと，

$$
\begin{aligned}
-\mathscr{L}_I &= eA_\mu J_{EM}{}^\mu + \frac{g_W}{\sqrt{2}}(W_\mu{}^+ J_{cc}{}^\mu + \text{h.c.}) + g_Z Z_\mu J_{NC}{}^\mu \\
&= \sum_q Q_q e \bar{q}\gamma^\mu q A_\mu + \frac{g_W}{\sqrt{2}}\sum_i \left[\bar{q}_i \gamma^\mu \frac{1-\gamma^5}{2}\tau_+ q_i{}' W_\mu{}^+ + \bar{q}_i{}' \gamma^\mu \frac{1-\gamma^5}{2}\tau_- q_i W_\mu{}^- \right] \\
&\quad + g_Z \sum_i \bar{q}_i \gamma^\mu \left[\varepsilon_L(q_i)\frac{1-\gamma^5}{2} + \varepsilon_R(q_i)\frac{1+\gamma^5}{2} \right] q_i Z_\mu \\
&\quad + Q_e e \bar{e}\gamma^\mu e A_\mu + \frac{g_W}{\sqrt{2}}\left[\bar{\nu}_e \gamma^\mu \frac{1-\gamma^5}{2} e W_\mu{}^+ + \bar{e}\gamma^\mu \frac{1-\gamma^5}{2}\nu_e W_\mu{}^- \right] \\
&\quad + g_Z \left[\frac{1}{2}\bar{\nu}_e \gamma^\mu \frac{1-\gamma^5}{2}\nu_e + \bar{e}\gamma^\mu \left(g_L \frac{1-\gamma^5}{2} + g_R \frac{1+\gamma^5}{2} \right) e \right] Z_\mu \\
&\quad + (e \leftrightarrow \mu) + (e \leftrightarrow \tau)
\end{aligned}
\tag{4.1}
$$

$$
\frac{g_W}{\sqrt{2}} = \frac{e}{\sqrt{2}\sin\theta_W} = \sqrt{2\sqrt{2}G_F m_W{}^2} \tag{4.2 a}
$$

$$
g_Z = \frac{g_W}{\cos\theta_W} = \frac{e}{\sin\theta_W \cos\theta_W} = \sqrt{4\sqrt{2}G_N m_Z{}^2} \tag{4.2 b}
$$

$$
\begin{aligned}
q_i{}' &= \sum_j V_{ij} q_j \\
\varepsilon_L(q) &= I_{3q} - Q_q x_W \\
\varepsilon_R(q) &= -Q_q x_W \\
x_W &= \sin^2\theta_W
\end{aligned}
\tag{4.2 c}
$$

$$
\begin{aligned}
g_L &= I_3 - Q x_W \quad \left\{ \begin{array}{l} = x_W - \dfrac{1}{2} \\ = x_W \end{array} \right. \quad \text{(電子の場合)} \\
g_R &= -Q x_W
\end{aligned}
\tag{4.2 d}
$$

である．Q は e を単位とした電荷を表す．中性カレントの場合は混乱を避けるために，$g_a(a=L, R)$ がレプトンの結合定数を表し，クォークの結合定数は $\varepsilon_a(a=L, R)$ と書いて区別することにした．これらの結合定数は，文献に

よっては

$$g_L\frac{1-\gamma^5}{2}+g_R\frac{1+\gamma^5}{2}=\frac{1}{2}(g_V-g_A\gamma^5)$$

$$g_V=g_L+g_R, \qquad g_A=g_L-g_R \tag{4.3}$$

と表し，それぞれベクトル結合定数（g_V（レプトン），v_q（クォーク））と，軸性ベクトル結合定数（g_A（レプトン），a_q（クォーク））で表すこともある．q' は小林-益川行列 V_{ij} で変換された電荷が $-1/3$ のクォークを示す．

$$q'=\begin{pmatrix} d' \\ s' \\ b' \end{pmatrix}=V_{KM}\begin{pmatrix} d \\ s \\ b \end{pmatrix} \tag{4.4}$$

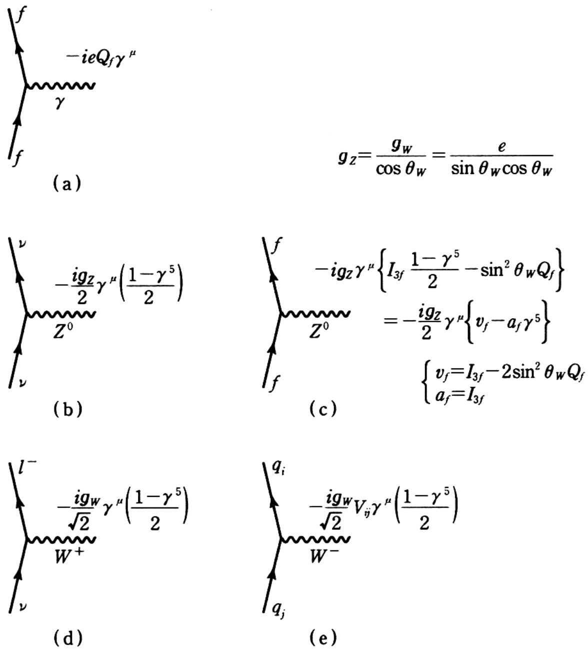


図 4.4 GWS 理論でのフェルミオンとゲージボソンとの結合のファインマン図
(a) フォトン-フェルミオン ff，(b) Z-ν-ν，
(c) Z-f-f ，(d) ν-l-W，
(e) q_i-q_j-W
V_{ij} は小林-益川行列である．

G_N は，G_F に対応する 4-フェルミ相互作用による中性カレント反応の結合定数である．一般に

$$G_N \equiv \rho G_F \tag{4.5}$$

と書く．ρ はボルン近似（トリー近似ともいう）の計算をする限り 1 とおいてよいが，高次効果を考慮したり，実験で解析するときの便宜のために入れておく．同様に $\sin^2\theta_W$ には定義の仕方がいろいろあり（第 7 章を参照），高次補正の受け方が違う．ボルン近似の段階では差は出ないが，実験データが精密化したときは区別をする必要がある．ここでは特に断らない限り

$$\sin^2\theta_W \equiv 1 - \frac{m_W{}^2}{m_Z{}^2} \tag{4.6}$$

の定義に従うものとする．これを質量殻で定義したワインバーグ角という．(4.1) の相互作用に対応するファインマン規則を図 4.4 に掲げておく．

4.3　ν-e 散　乱

4.3.1　運　動　学

νe 反応の運動変数を

$$\nu(k) + e(p) \longrightarrow \nu(k') + e(p') \tag{4.7}$$

とし，反応の実験室での変数を図 4.5 のようにとると，

$$s = (k+p)^2 \tag{4.8 a}$$

$$E_\nu = (p \cdot k)/m_e, \qquad E_e{}' = (p \cdot p')/m_e \tag{4.8 b}$$

$$\cos\theta = \left(1 + \frac{m_e}{E_\nu}\right)\left[\frac{E_e{}' - m_e}{E_e{}' + m_e}\right]^{1/2} \tag{4.8 c}$$

と表される．パートン変数 y は

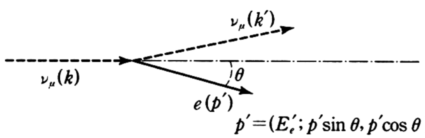


図 4.5　$\nu_\mu + e \to \nu_\mu + e$ の実験室系での運動変数

$$y=\frac{-q^2}{s-m_e^2}=-\frac{(p'-p)^2}{2m_eE_\nu}=\frac{E_e'-m_e}{E_\nu}=\frac{E_\nu-E_\nu'}{E_\nu},\quad 0\leqq y\leqq\left(1+\frac{m_e}{2E_\nu}\right)^{-1}\fallingdotseq 1 \tag{4.8 d}$$

となる．y は質量を無視すれば重心系では $(1-\cos\theta^*)/2$ となる量である．(4.8) から，

$$\theta^2\fallingdotseq 2m_e\frac{E_\nu-E_e'}{E_\nu E_e'}\fallingdotseq\frac{2m_e}{E_e'}(1-y) \tag{4.9 a}$$

であるので，

$$E_e'\theta^2\lesssim 2m_e \tag{4.9 b}$$

が成立する．$E_e'\sim 1\,\mathrm{GeV}$ とすると，$\theta^2\lesssim 10^{-3}$ となるので，散乱された電子はほとんど前方に集中して放出されることがわかる*2)．これが，実験的に混入してくる偽反応 ($\nu_\mu+N\to\nu_\mu+\pi^0+X$,　ν_e+n(中性子)$\to e^-+p$(陽子)など) と分離する決め手となる．ν_e は，1 次陽子ビームによって生成された 2 次粒子中の K からの崩壊 ($K\to\pi e\nu_e$) によって，ν_μ ビーム中に混在する成分である．図 4.6 にブルックヘブン研究所で行われた E734 実験データ[4] の角分布を示す．νe 散乱の信号が前方に集中していることがよくみてとれる．

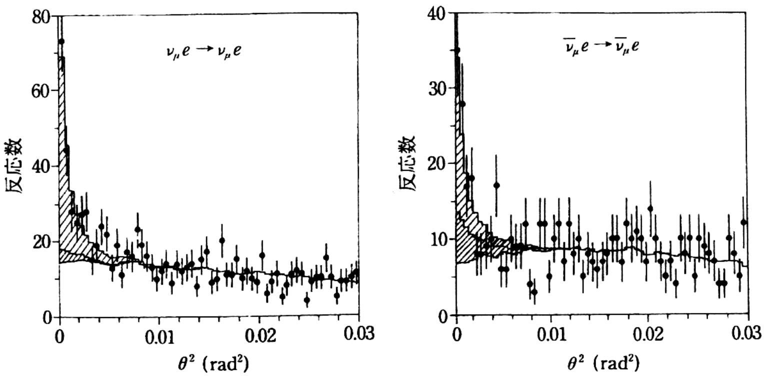


図 4.6　(a)　$\nu_\mu+e^-\to\nu_\mu+e^-$, (b)　$\bar\nu_\mu+e^-\to\bar\nu_\mu+e^-$ の角分布[4]
$E_e'\theta^2\lesssim 2m_e$ であるので，$\langle E_e'\rangle\sim 1\,\mathrm{GeV}$ として，$\theta^2\lesssim 10^{-3}$ でほとんど前方に集中する．薄く影をつけた斜線部分が y によらない部分，濃く影をつけたところが $(1-y)^2$ に比例する部分で，白い部分が雑音反応 ($\nu_\mu+N\to\nu_\mu+\pi^0+N$, $\bar\nu_e+p\to e^++n$) である．

*2)　この事実は天体ニュートリノ観測において，ニュートリノの飛来方向を知るのに利用される．

4.3.2 断　面　積

相互作用ラグランジアンが (4.1) で与えられたので，$\nu_\mu e$ 散乱の振幅は，$m_Z{}^2 \gg q^2$ として

$$\langle \nu_\mu(k')e(p')|T|\nu_\mu(k)e(p)\rangle = -i(2\pi)^4\delta^4(k+p-k'-p')\mathcal{M}(\nu_\mu e \to \nu_\mu e) \tag{4.10 a}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{M}(\nu_\mu e \to \nu_\mu e) &= -(g_Z/2)(\bar{\nu}_L\gamma^\mu\nu_L)\frac{g^{\mu\nu}-\dfrac{q_\mu q_\nu}{m_Z{}^2}}{q^2-m_Z{}^2+im_Z\Gamma_Z}g_Z[g_L(\bar{e}_L\gamma^\nu e_L)+g_R(\bar{e}_R\gamma^\nu e_R)] \\ &\fallingdotseq 2\sqrt{2}G_N(\bar{\nu}_L\gamma^\mu\nu_L)[g_L(\bar{e}_L\gamma_\mu e_L)+g_R(\bar{e}_R\gamma_\mu e_R)]\end{aligned} \tag{4.10 b}$$

ここで，伝播関数の $q^\mu q^\nu$ の項は保存カレントに掛かると 0 になることを使い q^2 を $m_Z{}^2$ に比べて無視した．分母の $im_Z\Gamma_Z$ は最低次からは出てこないが，現象論的に入れておく．自乗してスピン和と平均をとった行列要素を $|\overline{\mathcal{M}}|^2$ と書くと，断面積は付録式 (C. 4)，(C. 12) を参照して，

$$\mathrm{d}\sigma = \frac{1}{2s\lambda}|\overline{\mathcal{M}}|^2 \mathrm{d}LIPS = \frac{1}{64\pi^2 s}\left(\frac{p_f}{p_i}\right)^2|\overline{\mathcal{M}}|^2\mathrm{d}\Omega_{CM} \tag{4.11 a}$$

$$\lambda=\lambda(1,\, m_\nu{}^2/s,\, m_e{}^2/s)\fallingdotseq 1, \qquad \lambda(1,\,x,\,y)=1+x^2+y^2-2xy-2x-2y$$

$$\mathrm{d}LIPS=(2\pi)^4\delta^4(k+p-k'-p')\frac{d^3k'd^3p'}{(2\pi)^6 2E_\nu{}' 2E_e{}'} \tag{4.11 b}$$

で与えられる．ここで注意すべきは，ニュートリノにはそもそも左巻きしか存在しないから，スピンについては和をとった後平均をとらない (2 で割らない) ように注意する．付録式 (B.19)，(B.23) を使って $|\overline{\mathcal{M}}|^2$ を計算すると，

$$\frac{\mathrm{d}\sigma(\nu_\mu e)}{\mathrm{d}y}=\frac{G_N{}^2 s}{\pi}[g_L{}^2+g_R{}^2(1-y)^2-g_L g_R y m_e/E_\nu] \tag{4.12 a}$$

$\bar{\nu}_\mu e$ 散乱は，$L \longleftrightarrow R$ とすればよいから

$$\frac{\mathrm{d}\sigma(\bar{\nu}_\mu e)}{\mathrm{d}y}=\frac{G_N{}^2 s}{\pi}[g_L{}^2(1-y)^2+g_R{}^2-g_L g_R y m_e/E_\nu] \tag{4.12 b}$$

まとめて，

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}\sigma(\nu_\mu(\bar{\nu}_\mu)e)}{\mathrm{d}y}=\frac{G_N{}^2 s}{4\pi}[&(g_V\pm g_A)^2+(g_V\mp g_A)^2(1-y)^2 \\ &-(g_V{}^2-g_A{}^2)(y m_e/E_\nu)]\end{aligned} \tag{4.13 a}$$

$$g_V=g_L+g_R=-\frac{1}{2}+2x_W \tag{4.13 b}$$

$$g_A=g_L-g_R=-\frac{1}{2} \tag{4.13 c}$$

$E_\nu \gg m_e$ であるので (4.12) の第3項は通常は無視するが，$\bar{\nu}_e e$ 散乱のように原子炉のニュートリノを使う反応では必要になる項なので残しておいた．

ニュートリノと電子の散乱は十分な統計を得ることがむずかしいので，上の式を積分して実験値と比較することにする．第3項を無視する近似で

$$\sigma(\nu_\mu(\bar{\nu}_\mu)e)=\frac{G_N{}^2 s}{4\pi}\left[(g_V\pm g_A)^2+\frac{1}{3}(g_V\mp g_A)^2\right] \tag{4.14}$$

なお，$\nu_e(\bar{\nu}_e)e$ 散乱の断面積を求めるには，Z^0 交換項のほかに $W^\pm$ 交換項の寄与を加える必要がある．$W^\pm$ 交換項が寄与する振幅は (4.1) のラグランジアンを考慮して2次の行列要素をつくると

$$\mathcal{M}(\nu_e e\to e\nu_e)=2\sqrt{2}G_F(\bar{\nu}_L\gamma^\mu e_L)(\bar{e}_L\gamma_\mu\nu_L) \tag{4.15}$$

となるが，これはフィールツ変換（付録H）すると中性カレントの行列要素 (4.10 b) で，$G_F\to G_N$，$g_L\to 1$，$g_R\to 0$ としたものに等しいから，$G_N=G_F$ であれば $d\sigma(\nu_\mu(\bar{\nu}_\mu)e)$ を表す式 (4.12) で $g_L\to g_L+1$ の置き換えをすれば，荷電カレントと中性カレントの両方の寄与を含んだ $d\sigma(\nu_e(\bar{\nu}_e)e)$ が得られる．

4.3.3 g_V，g_A，$\sin^2\theta_W$ の決定

断面積の大きさの目安は

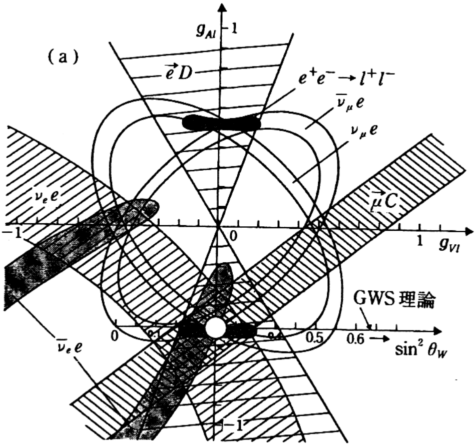
$$\sigma_0\equiv G_F{}^2 s/\pi=1.73\times10^{-41}(E_\nu/\mathrm{GeV})\mathrm{cm}^2 \tag{4.16}$$

で与えられる．BNL の E734 グループは[4)]

$$\sigma(\nu_\mu e)=1.80\pm0.20(\mathrm{stat})\pm0.25(\mathrm{sys})\times10^{-41}(E_\nu/\mathrm{GeV})\mathrm{cm}^2 \tag{4.17 a}$$

$$\sigma(\bar{\nu}_\mu e)=1.17\pm0.16(\mathrm{stat})\pm0.13(\mathrm{sys})\times10^{-41}(E_\nu/\mathrm{GeV})\mathrm{cm}^2 \tag{4.17 b}$$

を得た．(4.14) を参照して，これから，g_V, g_A を解くと g_V, g_A 平面上で二つの長円を与えるので解が四つある（図 4.7 (a)[5)]）．これは g_V, g_A の符号が決められないからである．原子炉からの $\bar{\nu}_e$ を使って行った $\bar{\nu}_e e$ 散乱データは中心のずれた長円を与えるので解の可能性を二つに減らす．最後の不定性を取り除くには $e^+e^-\to\mu^+\mu^-$ を使えばよいが（図 4.7 (a) の中の $e^+e^-\to l^+l^-$ で示さ



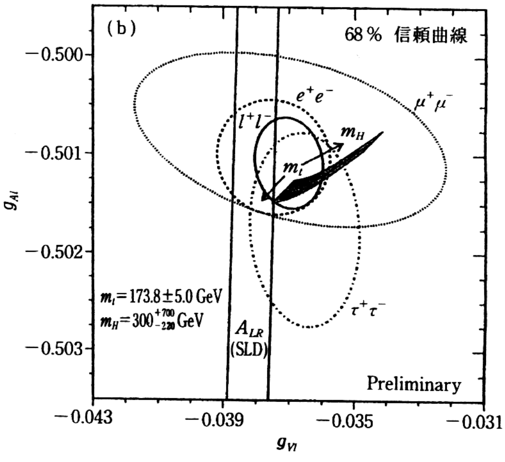


図 4.7　種々のレプトン反応より中性カレント結合定数 g_A, g_V を決める[5)]

(a)　1986 年のデータ

(b)　1998 年時点のデータによる許容範囲：(a) の白丸の部分拡大図．放射補正 (後述§ 7.4) の理論的不定性は，四角の影の部分にあり，データの最良値は l^+l^- の実線内にある．A_{LR} は SLAC の偏極ビームデータ (§ 7.2.4).

(1)　$\nu_\mu e$, $\bar{\nu}_\mu e$ 散乱から二つの長円が得られるので，解は 4 個ある．

(2)　$\bar{\nu}_e e$, $\nu_e e$ 散乱は別の二つの長円を与えるので，解は 2 個になる．

(3)　$e^-e^+ \to \mu^-\mu^+$ データが最終的に解を一つに絞る．

歴史的には $\vec{e}D$ (偏極電子ビーム) 散乱による解の選択が先行した．現在偏極ミューオンと炭素 (C) 散乱による実験を含めて解はユニークであり図 (a) の白丸内にある．GWS 解は $g_A=-1/2$, $\sin^2\theta_W=0\sim1$ の直線上にある．

れる領域)，歴史的には偏極電子($\vec{e}$)と重水素(D)の散乱での非対称の測定が最初に行われた(図中 $\vec{e}D$ とある領域，次節で議論)．これはクォークとの散乱を含むので，純粋にレプトン反応のみでの決定にはならない．もちろん統一理論の精神からすれば両者に区別はないが，実験の検証としては純レプトン反応とクォークを含む反応とで独立に検証するのが望ましいことはいうまでもない．現在は四つの解のうちどれが正しいかがわかっているから，$\sigma(\nu_\mu e)$, $\sigma(\bar{\nu}_\mu e)$ より直接に g_V, g_A が一意的に決められる．E734 の実際の解析では，優れた角分解能を利用して，データの角分布を，g_V, g_A をパラメターとして計算式に合うように決めた．図 4.6 の角分布にあるヒストグラムはこうして得た曲線である．CHARM II による最近のデータでは[6]，

$$g_V{}^e = -0.035 \pm 0.017 \tag{4.18 a}$$

$$g_A{}^e = -0.503 \pm 0.017 \tag{4.18 b}$$

ここで，結合定数は電子のものであることを明記するため e という指標を特につけてある．g_A の値は，GWS 理論の予言値 $-1/2$ とよくあっている．g_V の値が 0 に近いという事実は，ワインバーグ角 $\sin^2\theta_W$ が非常に 1/4 に近いことを意味する．$\sin^2\theta_W$ は g_V から求められるが，GWS 理論が正しいという前提をおけば，$g_A = -1/2$ を与えたうえで，比 R

$$R \equiv \frac{\sigma(\nu_\mu e)}{\sigma(\bar{\nu}_\mu e)} = 3\,\frac{1-4x_W+(16/3)x_W{}^2}{1-4x_W+16x_W{}^2} \tag{4.19}$$

を使うほうがより正確に求められる[7]．

$$\sin^2\theta_W(\nu_\mu e) = 0.2324 \pm 0.0083 \tag{4.20 a}$$

が与えられている．

断面積の絶対値をもパラメターとして最適化すると ρ を得ることができる．現在値は[7]

$$\rho = 1.0012 \pm 0.0013 \tag{4.20 b}$$

4.4　eD 散乱の非対称

中性カレントは $(I_{3L} - Q\sin^2\theta_W)$ と表されるように電流とアイソスピン弱カレントの混合となっている．ということは電磁相互作用があるところ必ず中性

カレントによる弱相互作用も存在することを意味する．中性カレントの存在はパリティ非保存により特徴づけられる．GWS 理論が提唱されてより，それまでは純粋な電磁相互作用によると考えられた原子遷移においてパリティの破れを見つけようとする試みがなされた．例えば，ビスマスにレーザー光を当て，わずかな偏光面の回転を検出する試みが行われたが，初期の実験は GWS 理論の予想と合わなかった．今日ではきわめて精密な測定がなされていて GWS 理論とよく合うことが知られている[8]．中性カレントの検証という点では，歴史的に SLAC の偏極電子ビームを使用する eD 散乱[9] での非対称実験が先行した．eD 散乱によるワインバーグ角決定の精度は，ν-電子散乱に及ばないが，(1) 電磁相互作用にパリティ非保存項が混じることをはじめて示したこと，(2) νe 散乱では解けなかった g_V, g_A の符号を決めて，一時期ゆれ動いた GWS 理論の正当性を立証して物理学史上の一つのエポックとなっていること，そして (3) eD 散乱公式を導く過程が後に使う $e\bar{e} \to f\bar{f}$ 散乱公式を導くのに有用などの理由により，ここでとり上げることにする．

ビームは縦偏極（へリシティ）の負 (L) 成分と正 (R) 成分に分けることとし，原子核標的は偏極していない場合を考える．ベクトル相互作用はカイラリティを保存することを考慮すると電子と原子核の中のクォーク q との散乱振幅は，

$$e(p_1)+q(p_2) \longrightarrow e(p_3)+q(p_2)$$

$$\mathcal{M}=(-i)^2(\bar{e}_a\gamma^\mu e_a)\left[-\frac{Q_q e^2}{t}+\frac{g_Z{}^2 g_a \varepsilon_b(q)}{t-m_Z{}^2+im_Z\Gamma_Z}\right]\bar{u}_{qb}\gamma_\mu u_{qb}$$

$$\equiv(-i)^2(\bar{e}_a\gamma^\mu e_a)\frac{e^2}{t}(\bar{u}_{qb}\gamma_\mu u_{qb})f_{ab} \tag{4.21}$$

$$f_{ab}=-Q_q+\frac{\sqrt{2}G_N m_Z{}^2}{\pi\alpha}\frac{t g_a \varepsilon_b(q)}{t-m_Z{}^2+im_Z\Gamma_Z} \tag{4.22}$$

$$a, b=L \text{ または } R$$

これより，へリシティを考慮した eq 散乱の断面積が計算できる*3)．$m_Z{}^2 \gg t$, $m_Z\Gamma_Z$ として，断面積としては第 1 項の自乗と，第 1 項と 2 項の干渉項のみを考える．スピン和をとれば，付録式 (B.23) を参照して，

*3)　L, R はカイラリティでへリシティではないが，質量を無視すれば同じとなる．

$$\sum|\bar{e}_a\gamma^\mu e_a)(\bar{u}_{qb}\gamma_\mu u_{qb})|^2=K_a{}^{\mu\nu}(p_1,p_3)K_{b\mu\nu}(p_2,p_4)$$

$$\begin{cases}=4s^2 & ;ab=LL,RR \quad (4.23\text{ a})\\ =4u^2=4s^2(1-y)^2; & ab=LR,RL \quad (4.23\text{ b})\end{cases}$$

であるので，

$$\left.\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega}\right|_{CM}=\left(\frac{p_f}{p_1}\right)\frac{1}{64\pi^2 s}|\mathcal{M}|^2$$ を使えば

$$\mathrm{d}\sigma_f(e_Lq_L\to e_Lq_L)=\frac{\alpha^2}{t^2}\left[Q_q{}^2+\frac{2\sqrt{2}Q_qG_Nt}{\pi\alpha}g_L\varepsilon_L(q)\right]s$$

$$\mathrm{d}\sigma_f(e_Lq_R\to e_Lq_R)=\frac{\alpha^2}{t^2}\left[Q_q{}^2+\frac{2\sqrt{2}Q_qG_Nt}{\pi\alpha}g_L\varepsilon_R(q)\right]s(1-y)^2$$

$$\mathrm{d}\sigma_f(e_Rq_L\to e_Rq_L)=\frac{\alpha^2}{t^2}\left[Q_q{}^2+\frac{2\sqrt{2}Q_qG_Nt}{\pi\alpha}g_R\varepsilon_L(q)\right]s(1-y)^2$$

$$\mathrm{d}\sigma_f(e_Rq_R\to e_Rq_R)=\frac{\alpha^2}{t^2}\left[Q_q{}^2+\frac{2\sqrt{2}Q_qG_Nt}{\pi\alpha}g_R\varepsilon_R(q)\right]s \quad (4.24)$$

が得られる．

$$\mathrm{d}\sigma_R=\Sigma_q(\mathrm{d}\sigma_{qRL}+\mathrm{d}\sigma_{qRR}),\qquad \mathrm{d}\sigma_L=\Sigma_q(\mathrm{d}\sigma_{qLL}+\mathrm{d}\sigma_{qLR})$$

として非対称 A を計算すれば

$$A=\frac{\mathrm{d}\sigma_R-\mathrm{d}\sigma_L}{\mathrm{d}\sigma_R+\mathrm{d}\sigma_L}=\frac{\sqrt{2}G_N(-t)}{2\pi\alpha}\frac{1}{\{1+(1-y)^2\}\Sigma_qQ_q{}^2}$$
$$\times\Sigma_qQ_q[g_Av_q\{1+(1-y)^2\}+g_Va_q\{1-(1-y)^2\}] \quad (4.25)$$

ただし，分母では優勢な第 1 項のみを残し，干渉項は落とした．重水素はアイソスピン 0 の標的であるから，u クォークと d クォークが同数ずつあるので，$q=u,d$ とし $Q_u=2/3$，$Q_d=-1/3$，$I_{3u}=1/2$，$I_{3d}=-1/2$，$Q_e=-1$，$I_{3e}=-1/2$ を入れれば，

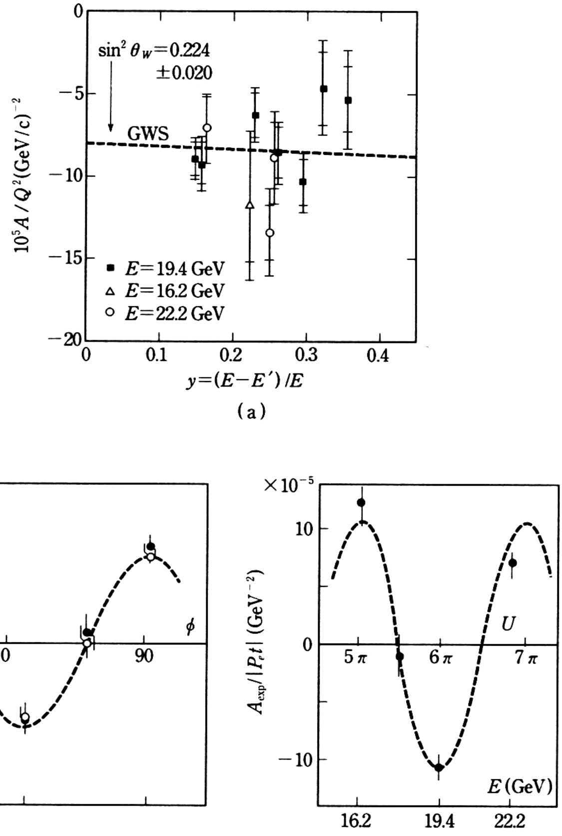
$$A=-\frac{G_N|t|}{2\sqrt{2}\pi\alpha}\frac{9}{10}\left[\left(1-\frac{20}{9}x_W\right)+(1-4x_W)\frac{1-(1-y)^2}{1+(1-y)^2}\right] \quad (4.26)$$

$|t|\fallingdotseq 1\,\mathrm{GeV}^2$ とすると

$$A\sim-9\times10^{-5} \quad (4.27)$$

となる．非対称値 A はビームエネルギーによらない．A が非常に小さいので大変困難な実験である．

SLAC（スタンフォード線形加速器センター）で行われた実験[9)]の結果を図 4.8 (a) に示す．この実験では，偏光電子ビームは円偏光したレーザービーム



(b)　　(c)

図 4.8　偏極電子と重水素との散乱における非対称測定実験[9]

(a)　非対称を y の関数としてみる．だいたい標準理論にあう．非対称が偏極プリズムを回転したり (b)，エネルギーを変える (c) と変化し，予想通りであることにより実験のチェックをする．エネルギーにより非対称が変わるのはスピン歳差運動の周波数が磁場（エネルギーを決める）により変化することからくる．

を電子と散乱させてつくり，ビーム偏極度 $P_e=0.37$ を得た．実験で測定するのは AP_e であるから，P_e を変えて非対称が変わるのを見るのは実験が正しく行われていることの一つのチェックとなる．P_e はメラー散乱（e^-e^- 散乱）を別途行って，その非対称から測定できる．偏光レーザービームは最初線偏光しているレーザービームを円偏光に変換して得るが，その偏極度は途中に挿入

した方解石プリズムを回転して変えられる．図 4.8 (b) は，方解石の回転角度の関数として，非対称を描いたものである．図 4.8 (c) は，ビームエネルギーを変えたときの非対称の変化である．A 自身はビームのエネルギーによらないが，ビームは磁場の中を通過するので，異常磁気能率 $g-2$ によるスピン回転があり，偏極度 P_e が変化するのである．この実験の結果を g_V, g_A の関数としてプロットすると，図 4.7 の $\vec{e}D$ で示される部分が許容範囲となる．この結果，ニュートリノ電子散乱での解の符号の不定性が解けて，g_V, g_A の値がユニークに決まり，GWS 理論の予想と一致することが結論された．

1978 年の高エネルギー東京国際会議の総合レビューでは，すべての実験事実を総合的に検討して，数あるゲージ理論モデルの中で，ワインバーグ-サラムモデルのみが唯一の正しい結果を与えること，種々の過程から求められた $\sin^2\theta_W$ がすべて一致することが示された (図 4.9[10])．この時点で GWS 理論が，モデルから理論へと昇格したといえる．ワインバーグ-サラム理論が提唱されてから 10 年経過していた．

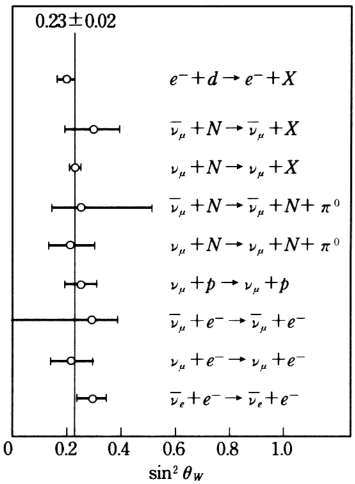


図 4.9 種々の中性カレント反応がすべて GWS 理論の予想通りで，かつ同じワインバーグ角を与えることの証明．これによって GWS 理論の正しさが疑問の余地なく立証された (1978 年，高エネルギー物理学東京国際会議での総合講演)[10]

4.5 GIM 機構

GWS 理論は，当初レプトンについてつくられたものである．統一理論であるためには，クォークについても同じ原理が適用されなければならない．ところで当時知られていた唯一のクォークの二重項[*4)]

$$Q_1=\begin{bmatrix} u \\ d' \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} u \\ d\cos\theta_c+s\sin\theta_c \end{bmatrix} \tag{4.28}$$

から中性カレントをつくってみると，

$$\begin{aligned} j_{NC}&\sim \overline{Q}_1\tau_3 Q_1=\bar{u}u-\bar{d}'d' \\ &=\bar{u}u-\cos^2\theta_c\bar{d}d-\sin^2\theta_c\bar{s}s-\cos\theta_c\sin\theta_c(\bar{d}s+\bar{s}d) \end{aligned} \tag{4.29}$$

となる．簡単のためクォーク種以外の時空の指標などは省略した．最後の項は d と s を入れ換える演算子であるので，電荷は変わらないが，ストレンジネスが変わる中性カレントである．この項が存在すると，例えば $K^0\to\bar{\mu}\mu$ とか $K^+\to\pi^+\bar{\nu}\nu$[11)] のような反応が存在しなければならない (図 4.10 (a), (b))．これらの分岐比は，実験的には[7)]

$$\begin{aligned} &BR(K^0\to\bar{\mu}\mu)=7.2\pm0.5\times10^{-9} \\ &BR(K^+\to\pi^+\bar{\nu}\nu)<2.4\times10^{-9} \qquad 90\%\text{C.L.} \end{aligned} \tag{4.30}$$

と非常に小さい．少なくも第 1 近似ではストレンジネスの変わる中性カレントは存在しないと考えてよさそうである．とすれば (4.29) の第 4 項を打ち消す何らかのメカニズムが働いていなければならない．そこで，第 4 のクォーク c を導入し，s' と二重項をつくると考える．

$$Q_2=\begin{bmatrix} c \\ s' \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} c \\ s\cos\theta_c-d\sin\theta_c \end{bmatrix} \tag{4.31}$$

こうすると，Q_1 による中性カレントのほかに，Q_2 による中性カレント

$$\overline{Q}_2\tau_3 Q_2=\bar{c}c-\cos^2\theta_c\bar{s}s-\sin^2\theta_c\bar{d}d+\cos\theta_c\sin\theta_c(\bar{d}s+\bar{s}d)$$

が付加されて，全体としては

$$\overline{Q}_1\tau_3 Q_1+\overline{Q}_2\tau_3 Q_2=\bar{u}u+\bar{c}c-\bar{d}d-\bar{s}s \tag{4.32}$$

[*4)] 当時観測されていたクォークは u, d, s の 3 種あったが，カビボ理論では d' にまとめられ，(u, d') の組が弱い相互作用をする．

となり，ストレンジネスを変える項がなくなるから実験事実と矛盾しなくなる．これを発見者グラショウ-イリオポロス-マイアニ (Glashow-Illioupoulos-Maiani[12)]) にちなんでGIM メカニズムと呼ぶ．この中性カレントは，電荷のみならずストレンジネスやチャーム量子数をも変えない真の意味での中性カレントである．

ストレンジネスの変わる中性カレント反応が，小さくはあるが存在する理由は高次効果による．図4.10 (c)～(d) を参照すればわかるように，荷電カレント反応の2次効果として実現可能である．GWS理論では $W^{\pm}$ との結合の大きさ $(g_W{}^2/4\pi)$ は電磁相互作用結合 α と同程度である．したがって，図4.10 (c)，(d) の過程の寄与は $O(\alpha^2)$ のはずであるが，実験値はそれよりはるかに

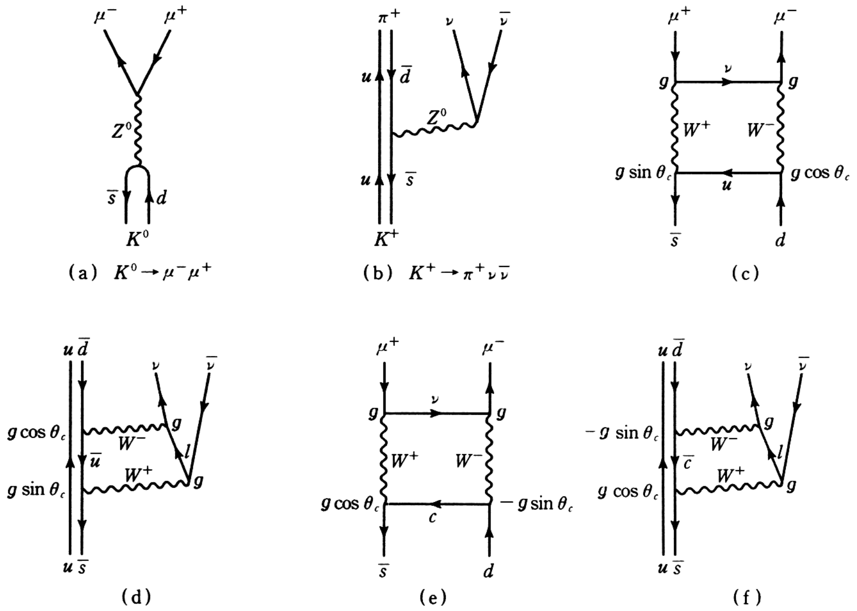


図 4.10 GIM 機構による相殺機構

(a)，(b) $K^0 \to \mu^-\mu^+$, $K^+ \to \pi^+\nu\bar{\nu}$ はストレンジネスを変える中性カレントが存在すれば生じる．
(c)，(d) は荷電カレントのみでも高次の効果として起こることを示すファインマン図．
(e)，(f) は (c), (d) において $u \to c$ で置き換えた図．結合定数の符号により (c)，(d) の寄与を打を消すように働く．
(c)，(d) $\propto g^2 \cos\theta_c \sin\theta_c$
(e)，(f) $\propto -g^2 \cos_c \sin\theta_c$

低い値を与える．これはGIM メカニズムが高次でも働いていて，図4.10 (e)，(f) の過程が存在し，(c)，(d) の過程を相殺することによる．両者のグラフを比べてみると，違いは u クォークを c クォークで置き換えたのみであるが，$W^{\pm}$ 粒子との結合の仕方に違いがあり，振幅としては同値異符号を与える．もし c クォークの質量が u クォークの質量と同一であれば相殺は完全である．質量の違う分により生じる差が実験値を与えるとして，$m_c \gg m_u$ を仮定して崩壊振幅を計算すると

$$\mathcal{M}(K^0 \to \bar{\mu}\mu) \sim \alpha G_F \left(\frac{m_u}{m_c}\right)^2 \tag{4.33}$$

となり，実験値を再現するように c クォークの質量を調整すると $m_c \sim 1.5$ GeV が得られた[13]．この予言は c クォークの発見される前に行われた．c クォークの発見は，GWS 統一理論の基本的考え方である $SU(2)$ の二重項構造がクォークセクターでも成立していることを確認したという意味で，単なる第4のクォークの存在という以上の重要な意味合いをもっていたのである．次のステップは，クォークセクターでのワインバーグ角がレプトンセクターで決められたワインバーグ角と同じ値をもつかどうかを確認することである．

4.6 ハドロンによる中性カレント反応

4.6.1 断 面 積

ニュートリノとクォークとの中性カレントによる反応断面積は，(3.33) で与えた．すなわち

$$\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}y}(\nu_\mu q,\ \bar{\nu}_\mu \bar{q}) = \frac{G_N{}^2 \hat{s}}{\pi}[\varepsilon_L{}^2 + \varepsilon_R{}^2(1-y)^2] \tag{4.34}$$

$$\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}y}(\nu_\mu \bar{q},\ \bar{\nu}_\mu q) = \frac{G_N{}^2 \hat{s}}{\pi}[\varepsilon_L{}^2(1-y)^2 + \varepsilon_R{}^2] \tag{4.35}$$

$$\varepsilon_L = I_3 - Q_q x_W$$
$$\varepsilon_R = -Q_q x_W \tag{4.36}$$

$\hat{s}$ は (νq) 系の全エネルギーであり，$G_N = \rho G_F$ である．ここの ρ は厳密にいえばレプトン反応の ρ と異なる（レプトン反応とハドロン反応では，異なる高次の補正効果をもつ）が，差は小さいので現段階では同じと見なす．

ニュートリノと核子(N)との反応断面積を得るには，核子の中のクォークの運動量変数を $\hat{s} \to xs$ とし，$q(x)$, $\bar{q}(x)$ を掛けてやればよい (§3参照).

$$\frac{\mathrm{d}^2\sigma(\nu_\mu N)}{\mathrm{d}x\mathrm{d}y} = \frac{G_N{}^2 s}{\pi}[(\varepsilon_L{}^2 xq(x) + \varepsilon_R{}^2 x\bar{q}(x)) + (\varepsilon_R{}^2 xq(x) + \varepsilon_L{}^2 x\bar{q}(x))(1-y)^2] \tag{4.37 a}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2\sigma(\bar{\nu}_\mu N)}{\mathrm{d}x\mathrm{d}y} = \frac{G_N{}^2 s}{\pi}[(\varepsilon_R{}^2 xq(x) + \varepsilon_L{}^2 x\bar{q}(x)) + (\varepsilon_L{}^2 xq(x) + \varepsilon_R{}^2 x\bar{q}(x))(1-y)^2] \tag{4.37 b}$$

x, y で積分し，

$$\sigma_{\mathrm{TOT}}(\nu N) = \sigma_N{}^\nu, \quad \sigma_0 = G_F{}^2 s/\pi, \tag{4.38 a}$$

$$Q = \int xq(x)\mathrm{d}x, \quad \bar{Q} = \int x\bar{q}(x)\mathrm{d}x \tag{4.38 b}$$

と書けば，

$$\sigma_N{}^\nu = \sigma_0\rho^2[(\varepsilon_L{}^2 + \varepsilon_R{}^2/3)Q + (\varepsilon_L{}^2/3 + \varepsilon_R{}^2)\bar{Q}] \tag{4.39 a}$$

$$\sigma_N{}^{\bar{\nu}} = \sigma_0\rho^2[(\varepsilon_L{}^2/3 + \varepsilon_R{}^2)Q + (\varepsilon_L{}^2 + \varepsilon_R{}^2/3)\bar{Q}] \tag{4.39 b}$$

となる．

ここで，陽子の中の u, d クォークの分布関数を $u(x)$, $d(x)$ とし，ストレンジネスクォーク成分やチャームクォーク生成の寄与を無視した．また，陽子の数と中性子の数が等しいアイソスカラー標的を使うことにすれば，上式で $u \leftrightarrow d$ としたものの平均をとる必要があるので，

$$\varepsilon_L{}^2 Q \longrightarrow [\varepsilon_L{}^2(u)U + \varepsilon_L{}^2(d)D + (U \leftrightarrow D)]/2 \equiv G_L{}^2(U+D)/2$$

$$\varepsilon_R{}^2 Q \longrightarrow [\varepsilon_R{}^2(u)U + \varepsilon_R{}^2(d)D + (U \leftrightarrow D)]/2 \equiv G_R{}^2(U+D)/2$$

$$U = \int xu(x)\mathrm{d}x, \qquad D = \int xd(x)\mathrm{d}x$$

$$G_L{}^2 = \varepsilon_L{}^2(u) + \varepsilon_L{}^2(d) = \frac{1}{2} - x_W + \frac{5}{9}x_W{}^2 \tag{4.40 a}$$

$$G_R{}^2 = \varepsilon_R{}^2(u) + \varepsilon_R{}^2(d) = \frac{5}{9}x_W{}^2 \tag{4.40 b}$$

と置き換えて，改めて $Q=(U+D)/2$ とおくと，(4.39) は

$$\sigma_N{}^\nu = \sigma_0\rho^2[G_L{}^2(Q+\bar{Q}/3) + G_R{}^2(Q/3+\bar{Q})] \tag{4.41 a}$$

$$\sigma_N{}^{\bar{\nu}} = \sigma_0\rho^2[G_L{}^2(Q/3+\bar{Q}) + G_R{}^2(Q+\bar{Q}/3)] \tag{4.41 b}$$

と書き直せる．一方，荷電カレントによる反応断面積は，

$$\sigma_C{}^{\nu}=\sigma_0\rho_{cc}{}^2(Q+\bar{Q}/3) \tag{4.42 a}$$

$$\sigma_C{}^{\bar{\nu}}=\sigma_0\rho_{cc}{}^2(Q/3+\bar{Q}) \tag{4.42 b}$$

で与えられる（§3.6 参照）．ただし，$\rho_{cc}\,(\fallingdotseq 1)$ は中性カレントでの ρ に対応する高次補正である．ここで，

$$R^{\nu}=\sigma_N{}^{\nu}/\sigma_C{}^{\nu},\quad R^{\bar{\nu}}=\sigma_N{}^{\bar{\nu}}/\sigma_C{}^{\bar{\nu}},\quad r=\sigma_C{}^{\bar{\nu}}/\sigma_C{}^{\nu} \tag{4.43}$$

を定義すれば，(4.41)，(4.42) を使って

$$R^{\nu}=(\rho^{\nu h})^2(G_L{}^2+G_R{}^2r)$$

$$R^{\bar{\nu}}=(\rho^{\nu h})^2(G_L{}^2+G_R{}^2/r) \tag{4.44}$$

$$\rho^{\nu h}=\frac{\rho}{\rho_{cc}} \tag{4.45}$$

が得られる．以上より次の関係式を得る[14]．

$$R^{\nu}=(\rho^{\nu h})^2\left[\frac{1}{2}-x_W+\frac{5}{9}x_W{}^2(1+r)\right] \tag{4.46}$$

$$R^{\bar{\nu}}=(\rho^{\nu h})^2\left[\frac{1}{2}-x_W+\frac{5}{9}x_W{}^2(1+1/r)\right] \tag{4.47}$$

中性カレント反応実験は，荷電カレント反応による深非弾性散乱と同時にできる．中性カレントの場合は，ニュートリノがミューオンに変わらずにニュー

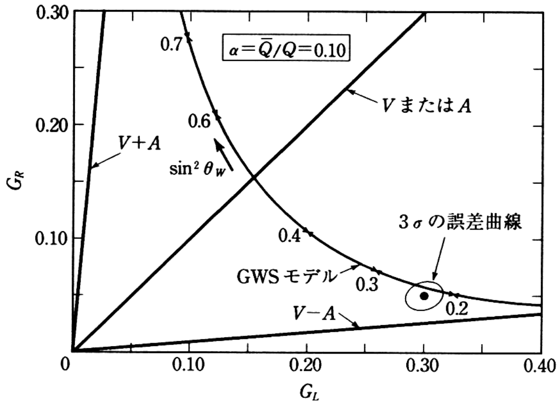


図 4.11　ハドロンによる中性カレント反応の断面積と荷電カレント断面積の比 $R_{\nu,\bar{\nu}}=\sigma_{NC}{}^{\nu,\bar{\nu}}/\sigma_{CC}{}^{\nu,\bar{\nu}}$ より，左巻き成分と右巻き成分の結合定数 G_L と G_R を決める[15]．$V\pm A$，V または A とあるのは純粋な $V+A$（G_R のみ），$V-A$（G_L のみ），V, A（G_L と G_R が等量の場合）の線．GWS 理論では混合比がアイソスピンと電荷の組み合わせで決まる．データは GWS 理論上で $\sin^2\theta_W\fallingdotseq 0.23$ 付近にある．$V\pm A$ が座標軸上にないのは，核子内の反クォーク成分のせいである．

トリノのままでいるから，終状態にミューオンの存在しない深非弾性散乱現象を拾えばよい．$R^{\nu}, R^{\bar{\nu}}$ の比より G_L, G_R が求められ（図 4.11[15]），GWS 理論の予想と一致することが示された．また，これより決められた $\sin^2\theta_W$ がレプトンデータの $\sin^2\theta_W$ と一致したことは，GWS 理論がレプトン，クォーク両セクターに通用する普遍統一理論としての性質をもっていることを実験的に示したことになる．

4.6.2 ワインバーグ角

ワインバーグ角は，$R^{\nu}, R^{\bar{\nu}}$ の一方もしくは両方から計算できるが，精密な値がほしいときは，$R^{\nu}, R^{\bar{\nu}}$ 自身の精度を上げる必要がある．このときは，標的（通常鉄）がアイソスカラーでないこと（$n_p \neq n_n$），ストレンジクォークの寄与，チャームクォークの寄与（運動量分布，生成しきい値付近での運動変数補正，チャームクォークの質量補正），放射補正（主としてトップクォークの質量とヒッグスの質量をパラメターとして含む）寄与の補正などをする必要がある．CERN や FNAL など世界の深非弾性実験結果を統合した高統計データから，R_{ν} の式（4.46）のみを使って得られた値は[16,17]，

$$\sin^2\theta_W = 0.2259 \pm 0.003(\text{expt}) \pm 0.004(\text{theor}) \tag{4.48}$$

式（4.47）を使用しない理由は，反ニュートリノビームの強度が小さく，統計誤差がニュートリノビームデータに及ばないからである．理論的誤差の最大の寄与は σ_c に寄与するチャーム粒子の質量（1.5±0.3 GeV）の不定性からで，0.004 のうち 0.003 を占める．残りは放射補正*5) とクォーク運動量分布関数の不定性などでだいたい 0.003 くらいである．この値は，$\nu_\mu(\bar{\nu}_\mu)e$ 散乱から求めた値と合っている．

$\sin^2\theta_W$ の値をより一層正確に求めるには，理論的不定性の少ない（ハドロンのモデルによらない）

$$\frac{\sigma_N{}^{\nu} - \sigma_N{}^{\bar{\nu}}}{\sigma_c{}^{\nu} - \sigma_c{}^{\bar{\nu}}} = \frac{R^{\nu} - rR^{\bar{\nu}}}{1-r} = (\rho^{\nu h})^2\left(\frac{1}{2} - x_W\right) \tag{4.49}$$

を使うのがよい[18]．反ニュートリノの統計数の制限から，これまでは精密な実験を得るのが困難であったが，最近フェルミ研究所の主入射器（Main In-

---

*5) 放射補正の m_t 依存性については§7.4 を参照せよ．

jector) の改良による高強度のニュートリノビーム実験ができて得られた値は

$$0.2253 \pm 0.0019 \pm 0.0010$$

である[19).

4.7　$\sqrt{s} < m_Z$ 領域の $e^-e^+ \to f\bar{f}$ 反応

ここでは，$\sqrt{s} \lesssim 65$ GeV，すなわちトリスタンや PETRA, PEP のエネルギー領域での電子陽電子反応を扱う．この領域ではもっぱら電磁相互作用と弱相互作用の干渉効果を見ることにより，標準理論による中性カレント表現が基本的に正しいことを検証する．同じ電子陽電子反応でも Z 共鳴領域の物理は標準理論の高次効果にまで踏み込んだ精密検証を行うとともに，標準理論からのズレを探して標準理論を越える物理をめざすので，改めて第 7 章で取り扱う．

4.7.1　$e^-e^+ \to f\bar{f}$ 反応の一般式

電子陽電子対消滅からフェルミオン対を生成する反応は $e^-q \to e^-q$ 反応の交叉で得られる．図 4.12 を参照して，式 (4.24) の行列要素 $\mathcal{M}$ の中の $p_3 \to p_4$, $p_2 \to -p_3$, $p_4 \to -p_2$ とすると

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}(e_L q_L \to e_L q_L) \doteqdot \frac{\alpha^2}{s}\frac{s^2}{t^2} \to \frac{d\sigma}{d\Omega}(e_L \bar{e}_R \to q_L \bar{q}_R) = \frac{\alpha^2}{s}\frac{u^2}{s^2}|f_{LL}|^2$$

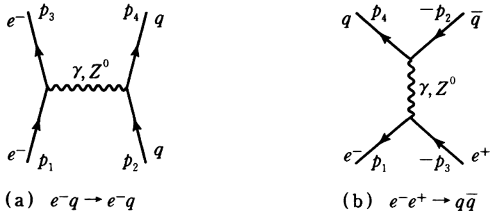


図 4.12　$e^-q \to e^-q$ 散乱より，交叉によって $e^-e^+ \to q\bar{q}$ を得る．散乱振幅 $\mathcal{M}(e^-q \to e^-q)$ の変数 $(p_1, p_2, p_3, p_4) \longrightarrow (p_1, -p_3, p_4, -p_2)$ とすれば $\mathcal{M}(e^-e^+ \to q\bar{q})$ が得られる．すなわち $\mathcal{M}(e^-e^+ \to q\bar{q}; s, t, u) = \mathcal{M}(e^-q \to e^-q; t, u, s)$

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}(e_Lq_R\to e_Lq_R)\fallingdotseq\frac{\alpha^2}{s}\frac{u^2}{t^2}\to\frac{d\sigma}{d\Omega}(e_L\bar{e}_R\to q_R\bar{q}_L)=\frac{\alpha^2}{s}\frac{t^2}{s^2}|f_{LR}|^2 \quad (4.50\text{ a,b})$$

同様に

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}(e_R\bar{e}_L\to q_L\bar{q}_R)=\frac{\alpha^2}{s}\frac{t^2}{s^2}|f_{RL}|^2 \quad (4.51\text{ a})$$

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}(e_R\bar{e}_L\to q_R\bar{q}_L)=\frac{\alpha^2}{s}\frac{u^2}{s^2}|f_{RR}|^2 \quad (4.51\text{ b})$$

ただし，f_{ab} は式 (4.22) で $t\to s$ としたものである．これから，偏極した電子はビームの中にそれぞれ 1/2 ずつあることを考慮して上式の和の 1/4 をとると，断面積は

$$\frac{d\sigma_q}{d\Omega}=\sigma_{\mu\mu}\frac{3}{16\pi}N_c|Q_q|^2[(1+\cos^2\theta)F_1+2F_2\cos\theta] \quad (4.52)$$

$$\sigma_{\mu\mu}=\frac{4\pi\alpha^2}{3s} \quad (4.53)$$

$$N_c=1\ (\text{レプトン}),\ =3(1+\delta_{QCD})\ (\text{クォーク}) \quad (4.54)$$

$$\delta_{QCD}=\frac{\alpha_s(s)}{\pi}+1.4\left(\frac{\alpha_s(s)}{\pi}\right)^2+\cdots \quad (4.55)$$

となる．δ_{QCD} は QCD による補正項で，トリスタン（$\sqrt{s}\fallingdotseq 60$ GeV）から Z 共鳴以下のエネルギー領域（$60\leqq\sqrt{s}\leqq 90$ GeV）では約 5% の補正を与える．q をクォーク種を表す指標として，

$$F_1=(1/4)(|f_{LL}|^2+|f_{RR}|^2+|f_{LR}|^2+|f_{RL}|^2)$$
$$=1+2g_Vv_q\chi_0\cos\delta/Q_q+(g_V{}^2+g_A{}^2)(v_q{}^2+a_q{}^2)\chi_0{}^2/Q_q{}^2$$
$$F_2=(1/4)(|f_{LL}|^2+|f_{RR}|^2-|f_{LR}|^2-|f_{RL}|^2)$$
$$=+2g_Aa_q\chi_0\cos\delta/Q_q+4g_Aa_qg_Vv_q\chi_0{}^2/Q_q{}^2 \quad (4.56)$$

$$\tan\delta=\frac{m_Z\Gamma_Z}{m_Z{}^2-s},\qquad \chi_0=\frac{\rho G_F}{2\sqrt{2}\pi\alpha}\frac{sm_Z{}^2}{[(m_Z{}^2-s)^2+m_Z{}^2\Gamma_Z{}^2]^{1/2}} \quad (4.57)$$

$$g_V=g_L+g_R=2x_W-1/2,\ g_A=g_L-g_R=-1/2$$
$$v_q=\varepsilon_L(q)+\varepsilon_R(q)=I_{3q}-2Q_qx_W,\ a_q=\varepsilon_L(q)-\varepsilon_R(q)=I_{3q} \quad (4.58)$$

よく使われる観測量は，全ハドロン断面積と QED による μ 対生成断面積との比 R と非対称パラメターである．

$$R_q\equiv\frac{\sigma_{q\text{TOT}}}{\sigma_{\mu\mu}}=N_c|Q_q|^2F_1,\qquad R=\sum_q R_q \quad (4.59)$$

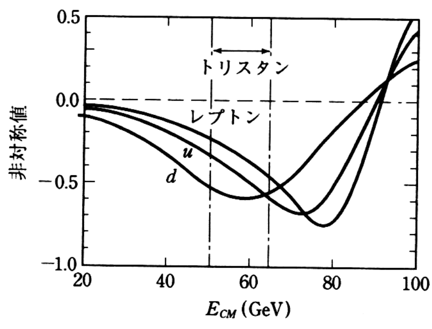
$$A_{FB} \equiv \frac{\sigma_F - \sigma_B}{\sigma_F + \sigma_B} = \frac{3}{4}\frac{F_2}{F_1} \tag{4.60}$$

ただし，A_{FB} の F と B は散乱角分布の前方 (forward) と後方 (backward) の意味である．

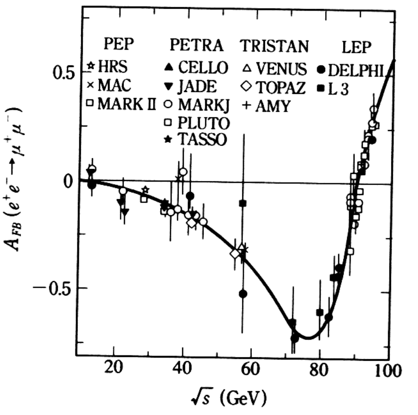
4.7.2 $e\bar{e} \to l\bar{l}$ 角分布前後非対称

トリスタンや PEP, PETRA のエネルギー領域では，$\chi_0{}^2$ の項は無視できるが，LEP 実験 ($\sqrt{s} = m_Z = 91$ GeV) では，当然のことながら，$\chi_0{}^2$ の項が優勢である．$\sin^2\theta_W$ は非常に 1/4 に近く，$g_V \fallingdotseq 0$ である．この事実によって，$F_1 \fallingdotseq 1$ となり，トリスタン以下のエネルギーでは，R_q の値には弱相互作用の影響はほとんど現れない．しかし，トリスタンは Z 共鳴の裾野に位置し，QED と Z による干渉効果が最大になるところである．この様子を図 4.13 (a) に示す．曲線は，$\sin^2\theta_W \fallingdotseq 0.233$ として，GWS 理論値を用いて計算した非対称のエネルギー依存性を，レプトン，u, d クォークについて示したものである．$c(b)$ クォークの非対称は $u(d)$ と同一である．

レプトン対 ($l\bar{l} = \mu\bar{\mu}, \tau\bar{\tau}$) 生成の場合は v_q, a_q を $g_V{}^l, g_A{}^l$ と読み替えれば同じ式が使える．$g_V{}^l \simeq 0$ であるから

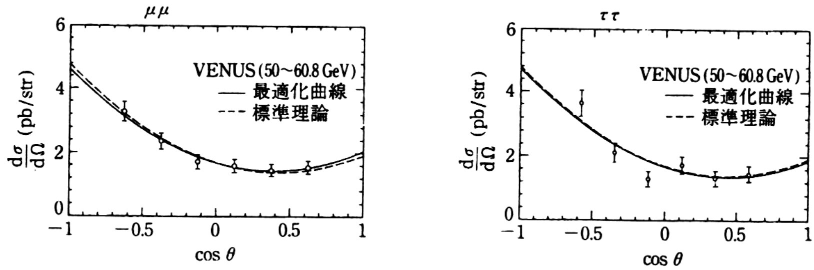


(a)



(b)

図 4.13 (a) $e^+e^- \to l^+l^-$, $u\bar{u}$, $d\bar{d}$ の前後非対称，標準理論による．
(b) $e^+e^- \to \mu^+\mu^-$ の非対称データ[22]．実線は標準理論．



(a) (b)

図 4.14 (a) $e^+e^-\to\mu^+\mu^-$, (b) $e^+e^-\to\tau^+\tau^-$ の角分布
トリスタンヴィーナスグループによる[20]. $\sqrt{s}=56.6$ GeV. 実線は最適化曲線で，ダッシュ線は標準理論の予言値.

$$A_{FB}\sim +(3/2)g_A{}^e g_A{}^l\chi_0\cos\delta/Q_l=-\frac{3}{8}\chi_0\cos\delta \qquad (4.61)$$

と近似できる.

図 4.14 (a), (b) にトリスタンヴィーナスで測定した $ee\to\mu\bar{\mu}$, $\tau\bar{\tau}$ 反応での角分布を示す[20]. 最近の LEP 実験で得られた非対称[21] とあわせて，非対称の s 依存性を図 4.13 (b)[22] に示すが標準理論とよく合っていることがわかる.

4.7.3 c, b は $SU(2)$ 2 重項か

クォークの角分布非対称についても，レプトンと同じ解析ができるが，ここでは視点を変えて，非対称データから c, b クォークのアイソスピンを決めることを考えよう．なぜならば，標準理論が提唱された時点で，(u, d'), (ν_e, e), (ν_μ, μ) がそれぞれアイソスピン 2 重項を組み，$W^\pm$ 交換に際しては V-A 型相互作用をするということは，実験的に証明されていたが，(c, s'), (t, b'), (ν_τ, τ) については，推察のみであったからである．c はそもそもは GIM メカニズムの議論によって，s' のパートナーとしての存在を要求されたので，当然アイソスピン 1/2 をもたねばならない．b のアイソスピン決定は，t の発見以前[*6] においては，トップクォークの存在を実験的に確定するという意味合いで特に重要な意味をもっていた.

[*6] トップクォークは，1994 年 4 月に存在の証拠が与えられた[23].

a．$c\bar{c}$ 角分布前後非対称

$e^+e^- \to q\bar{q}$ 反応は，通常2ジェット現象として観察される．ジェット現象一般の詳しい考察は第8章で行うが，チャームクォークの同定は次のようにして行われる．$e^+e^- \to$ ハドロン反応でつくられる D^* メソン*7) のエネルギーが高いことが観察されていて，$e^+e^- \to c\bar{c}$ でできた最初の c クォークが崩壊せずに真空から $\bar{u}$ または $\bar{d}$ クォークを拾ってそのままハドロン化した確率が非常に高い．したがって，D^* の角分布をもってそのまま c クォークの角分布と見なすのはよい近似であろう．D^* は，$D^* \to D^0\pi_s$, $D^0 \to K\pi$, $K\pi\pi$, $K\pi\pi\pi$ などの崩壊モードで同定できる．π_s の s は特別な意味があるわけではない．D^* の同定に重要な役割を果たすがゆえに特に指標をつけておくだけのことである．この π_s は，$m(D^*)-m(D^0)-m_\pi=5.8$ MeV と非常に低い Q 値をもつので，D^* の静止系で D^0 と π_s はほとんど静止した状態でつくられる．ということは，実験室系で π_s は D^0 とほとんど並んで走っていることを意味する．したがって，π_s の方向をもって D^* の方向と同一視することが可能である．D^* の崩壊した後の2次粒子がすべて同定できる場合は，D^* の運動変数は完全に再構築できるので，π_s に頼る必要はない．図4.15に，TASSOグループによる D^* の角分布を示す[24]．図4.15 (a) は完全再構築された D^* の角分布である．図4.15 (c) は，別のデータサンプルのジェット軸（図4.15 (b) 参照*8)）に対する各粒子の横運動量 (p_T) 分布を示したものである．$p_T \simeq 0$ 付近が特に盛り上がっていて，上記 π_s の存在，したがって D^* の存在が裏づけられる．図 (d) は，図 (c) の中から $p_T{}^2 \leqq 0.0075\ (\mathrm{GeV/c})^2$ の事象のみを拾い上げ，ジェット軸のビーム軸に対する角の分布を描いたものである．これらの角分布から，TASSOグループは，それぞれチャームの前後非対称パラメター $A_{FB}{}^c$ に対して，

$$A_{FB}{}^c = -0.16 \pm 0.072 \pm 0.011 \quad \sqrt{s} = 36.2\ \mathrm{GeV} \tag{4.62 a}$$

$$A_{FB}{}^c = -0.168 \pm 0.047 \pm 0.027 \quad \sqrt{s} = 35.0\ \mathrm{GeV} \tag{4.62 b}$$

を導くことができた．標準理論の計算値は，それぞれの実験条件のもとでは，-0.157 および -0.145 を与える．JADEグループはTASSOの行った第1

*7) $D^0 = c\bar{u}$, $D^+ = c\bar{d}$ は 0^- 状態．D^* は 1^- 状態に対応する．
*8) ジェット軸の正確な定義（スラスト軸）については，§8.1.2を参照せよ．

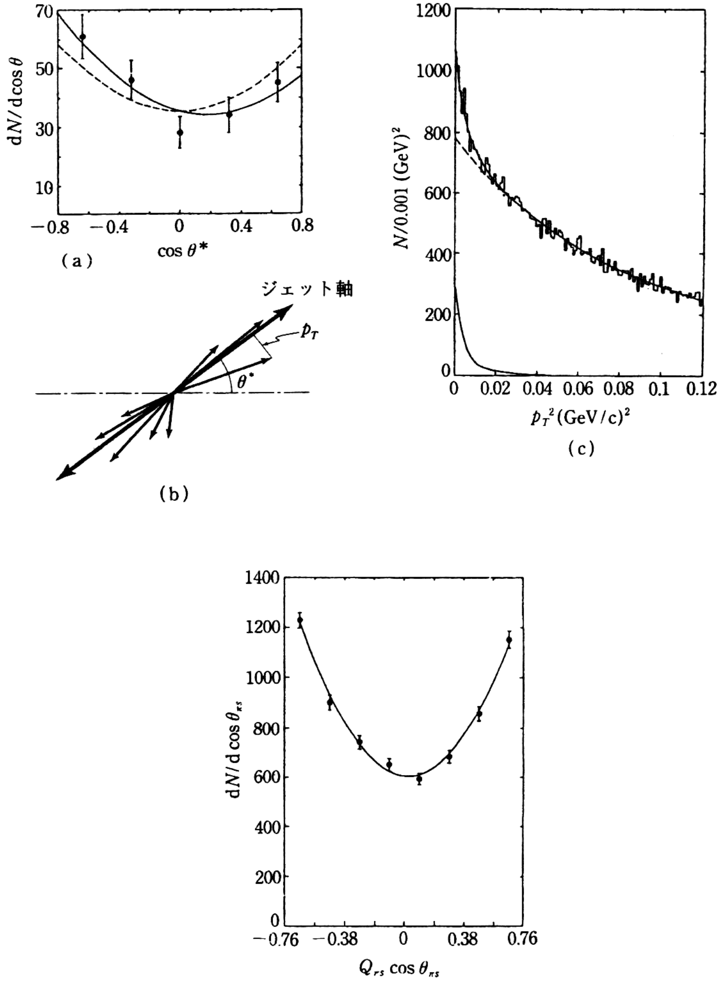


図 4.15　チャームクォーク生成角分布における非対称の測定[24)]

(a) は反応チャームメソンの崩壊粒子を完全に再構築してチャームメソンの角度分布をとったもの．実線はデータ最適化曲線，ダッシュ線は非対称がないとしたときの分布である．

(b) はジェット軸に対する p_T の説明．

(c) は全粒子のジェット軸に対する p_T 分布．

(d) は (c) のサンプルの中から $p_T{}^2<0.0075(\mathrm{GeV/c})^2$ 以下のもののみをとりその事象のジェット軸の角分布をとったもの．

角分布の非対称から $g_A{}^e a_c=-(0.270\pm0.073)$ と決められた．$g_A{}^e=-I_3{}^e=1/2$ より $a_c=-I_3{}^C=-1/2$ と決められる．

の方法と同様な方法で[25]

$$A_{FB}{}^{c}=-0.149\pm0.067 \qquad (\sqrt{s}=35\text{GeV}) \tag{4.62 c}$$

を導いた．

b．$b\bar{b}$ 角分布前後非対称

b クォークの同定は π_s とは対照的に，ジェット軸に対して大きな p_T をもつレプトンを使う．b クォークの質量は～5 GeV で，u, d, s（すべて 0.5 GeV 以下），c（～1.5 GeV）クォークの質量に比べて圧倒的に大きい．この結果，$b\to cl^-\nu$ などからのレプトンは，b の静止系で最高 5/2=2.5 GeV/c，平均 (5−1.5)/3≒1 GeV/c の運動量をもつ．実験室系ではこれがローレンツ変換されるが，横運動量はそのまま保持されるので，b からのレプトンは実験室系においても $p_T\gtrsim1$～2 GeV/c の大きな横運動量をもつ．これに反して，軽いクォークからつくられたレプトンは $p_T\ll1$ GeV/c である．したがって，ジェット軸に対して大きな横運動量をもつレプトンがあれば，その事象は b クォークによりつくられた確率が高い．AMY グループはこの事実を利用して，b クォークを選別し，非対称

$$A_{FB}{}^{b}=-0.72\pm0.28(\text{stat})\pm0.13(\text{sys}) \tag{4.63}$$

を得た[26]．ただし，b クォークには $B^0(\bar{b}q)$ が $\bar{B}^0(b\bar{q})$ に変化する“混合”という現象があり，

$$A_{FB}{}^{b}(\text{観測})=(1-2\chi)A_{FB}{}^{b}(\text{非混合}) \tag{4.64 a}$$

$$\chi=\frac{1}{2.3}\chi_d+\frac{0.3}{2.3}\chi_s \tag{4.64 b}$$

と変更を受ける．ここに $\chi_q(q=d, s)$ は，B_d および B_s の混合率で，$\chi_d=0.17\pm0.05$，$\chi_s=0.25\pm0.25$[27] を入れると，$1-2\chi=-0.787$ となる．

c．b クォークのアイソスピン

図 4.16 に世界の各グループが得た非対称から計算された軸性ベクトル結合定数 $a_c, a_b, a_\mu(=g_A{}^\mu)$，$a_\tau(=g_A{}^\tau)$ の一覧を図示する[28]．ただし図中の $A_{cc}, A_{bb}, A_{\mu\mu}$ などは $2a_c, 2a_b, 2a_\mu$ を意味する．これらから a_f の世界平均をとれば

$$a_\tau=I_{3\tau}=-0.47\pm0.04 \tag{4.65}$$

$$a_c=I_{3c}=\quad 0.52\pm0.08 \tag{4.66}$$

$$a_b=I_{3b}=-0.39\pm0.1 \tag{4.67}$$

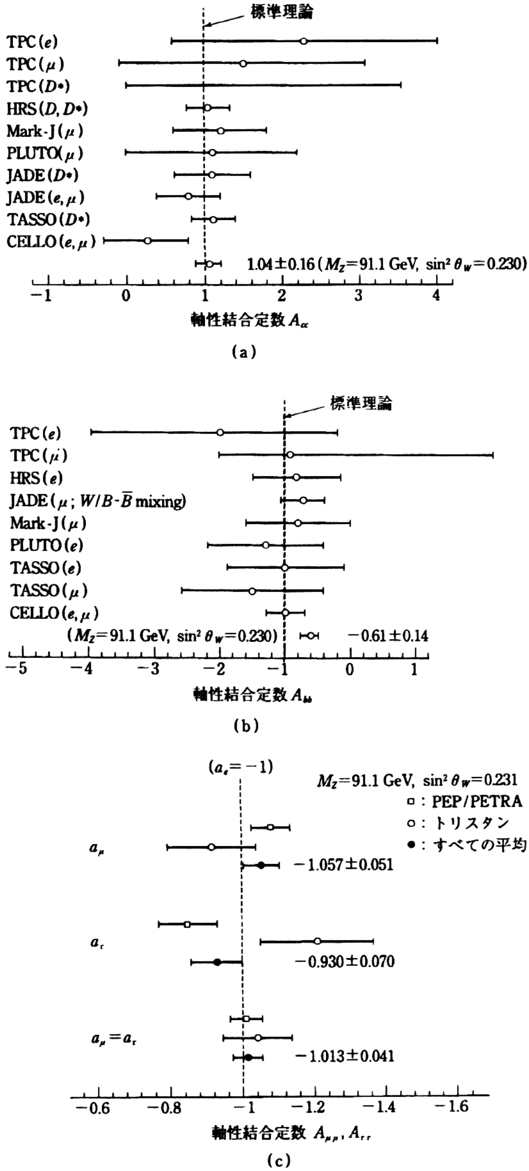


図 4.16 (a), (b) $e^+e^-\to c\bar{c}$, $b\bar{b}$ の角分布における前後非対称より決めた $A_{ff}(f=c,b)=2a_f=2I_{3L}$ の各グループのデータ[28)]

(c) $e^+e^-\to\mu\bar{\mu}$, $\tau\bar{\tau}$ の前後非対称より決めた $A_{ff}=2a_f=2I_{3L}$ のデータ

がいえて，τ, c, b クォークすべて $|I_3|=1/2$ をもつこと，すなわち二重項のメンバーであることが証明できた．したがって，b クォークは $I_3=-1/2$ をもつことから，$I_3=1/2$ をもつトップクォークが存在しなければならない．この解析が行われた時点 (1989年) でトップクォークは未発見であったが，標準理論の枠内で存在の証明ができたことになる．τ については，すでに τ のレプトン崩壊のデータから ν_τ と二重項を組むことはほぼ言えていたが，非対称データで改めて確認したわけである．

4.7.4 ま と め

中性カレントの存在と，すべての中性カレント現象に現れるワインバーグ角の値がすべて一致したことが確認された段階で，グラショウ-ワインバーグ-サラムは1979年のノーベル賞を授賞した．GWS理論が多分正しい理論であることは異論の余地がなかったにしても，真の検証は W, Z の存在が確認され，GWS理論の予言通りの質量値をもつことを確かめることにあったことを考えると，ノーベル賞委員会は相当の賭をしたことになる．理論体系の創始者に対する授与は，予想外の発見業績と違い，通常は理論が疑いの余地なく確認されてから相当後になって授与されるのが普通だからである．アインシュタインは相対性理論ではノーベル賞を授与されなかったし，QEDの創始者朝永・シュヴィンガー・ファインマンが授与されたのは1965年で，提唱後17年も経過した後である．GWSに対するノーベル賞授与の異例な早さから，当時の高エネルギー物理学界の統一理論に対する思い入れがうかがえる．

参 考 文 献

1) F. Reines and C.L. Cowan, Jr.: *Phys. Rev.*, **92** (1953) 830
2) J. Hasert *et al.*: *Phys. Lett.*, **46B** (1973) 121
3) J. Hasert *et al.*: *Phys. Lett.*, **46B** (1973) 138
4) L. Ahrens *et al.*: *Phys. Rev.*, **D41** (1990) 3297
5) F. Dydak: Proc. 25th Int. Conf. High Energy Phys., Singapore, 2-8Aug. 1990
M.W. Grünewald: Talk at Int. Conf. on High Energy Phys. at Vancouver, July 23-29, 1998
6) CHARM; D. Geiregat *et al.*: *Phys. Lett.*, **B259** (1991) 499

P. Vilain *et al.* : *Phys. Lett.*, **B335** (1994) 246
7) PDG ; Review of Particle Properties : *Phys. Rev.*, **D54** (1996) 87, EPJ **C3** (1998)
8) M.C. Noecker *et al.* : *Phys. Rev. Lett.*. **61** (1988) 310
レビューとしては M.A. Bouchiat and L. Pottier : *Science*, **234** (1986) 1203
C.A. Piketty : Weak and Electromagnetic Interactions in Nuclei, ed. H.V. Klapdor (Springer-Verlag, Berlin, 1986), p. 603
9) C.Y. Prescott *et al.* : *Phys. Lett.*, **B77** (1978) 347 ; *Phys. Lett.*, **B84** (1979) 524
10) C. Baltay : Proc. 19th Int. Conf. High Energy Physics, Tokyo, 1978
11) S. Adler *et al.* : *Phys. Rev. Lett.*, **79** (1997) 2204
Y. Asano *et al.* : *Phys. Lett.*, **B107** (1981) 159
12) S.L. Glashaw, Ilioupoulos and Maiani : *Phys. Rev.*, **D2** (1970) 1285
13) M.K. Gaillard and B.W. Lee : *Phys. Rev.*, **D10** (1974) 897
14) C.H. Llewellyn-Smith : *Nucl. Phys.*, **B228** (1983) 205
15) CDHS ; M. Holder *et al.* : *Phys. Lett.*, **B72** (1977) 254
16) CDHS ; H. Abramowicz *et al.* : *Phys. Rev. Lett.*, **57** (1986) 298
A. Blondel *et al.* : *Z. Phys.*, **C45** (1990) 361
17) FMM ; T. S. Mattison *et al.* : *Phys. Rev.*, **D42** (1990) 1311
CCFRR ; P. Reutens *et al.* : *Z. Phys.*, **C45** (1990) 539
C. G. Arroyo *et al.* : *Phys. Rev. Lett.*, **72** (1994) 3452
CHARM ; J. Allaby *et al.* : *Z. Phys.*, **C36** (1987) 611
18) E.A. Paschos and L. Wolfenstein : *Phys. Rev.*, **D7** (1973) 91
19) NuTeV ; T. Bolton : Talk at Int. Conf. on High Energy Physics at Vancouve, July 23 -29, 1998
20) VENUS ; *Z. Phys.*, **C48** (1990) 13
21) OPAL ; G. Alexander *et al.* : *Z. Phys.*, **C53** (1991) 175
22) T. Mori : 25th Int. Conf. on High Energy Physics, Singapore, Aug. 2-4, 1990
23) CDF ; *Phys. Rev.*, **D50** (1994) 2966
24) TASSO ; W. Braunschweig *et al.* : *Z. Phys.*, **C44** (1989) 365
25) JADE ; *Z. Phys.*, **C44** (1989) 567
26) AMY ; *Phys. Rev. Lett.*, **63** (1989) 2341
27) ARGUS ; *Phys. Lett.*, **B192** (1987) 245
CLEO ; *Phys. Rev. Lett.*, **62** (1989) 2233
28) K. Fujii : KEK 89-182, Invited Talk at Int. European Phys. Soc. Conf., Madrid, Sept. 6-13 (1989)

5

QCD (量子色力学)

5.1 は じ め に

5.1.1 な ぜ QCD か

量子色力学 (quantum chromo dynamics; QCD) とは，カラー $SU(3)$ ゲージ理論に基づく強い相互作用の理論である．いい換えればクォークのもつ3種類のカラー荷 (color charge＝色荷，赤 (R)，緑 (G)，青 (B) と名づけて区別する) がグルーオンと呼ばれるカラー自由度をもつベクトル粒子を交換することにより働く力を記述する理論である．なぜ量子色力学でなければならないか？

われわれはハドロンのクォーク構造のところで，クォークはカラー自由度をもつことを学んだ．そしてどうやらカラー一重項のみが自然界に存在することを学んだ．このことは力の担い手がカラー自由度をもつことを意味する．核力の担い手である π 中間子がアイソスピンをもち，その結果として，2核子系で $I=1$ 状態には束縛状態が存在しないが，$I=0$ 状態では重水素という束縛系をつくることを思い起こそう．後に示すように8色のベクトルグルーオンの交換力は，$q\bar{q}$ と qqq のカラー一重項で強い引力となるので，少なくもカラー一重項が自然界に存在する事実を部分的には説明する．この力の担い手 (グルーオン) はスカラー粒子ではありえない．なぜなら中性スカラー力の場合は粒子と反粒子を区別しないが，現象的にはメソン ($q\bar{q}$) が存在するにもかかわらず qq でつくるハドロンは存在しないからである．ベクトルであるならば，繰り込み可能という大きな理論的魅力を考えれば，当然グルーオンをゲージ粒子と見なすのが自然であろう．また，カラーグルーオンによる力は漸近的自由を示

す．すなわち，近距離では結合定数 α_s が小さくなるので摂動計算が可能となる．その結果が深非弾性散乱を含むさまざまの堅い散乱 (hard scattering) の実験データをよく説明することは，QCD を正当化する一つの大きな理由である．さらに格子ゲージ理論などによる計算がハドロンの質量をほぼ正しく再現するなど，さまざまの QCD を支持するデータがある．

厄介なことはカラーの閉じ込めにより，クォークおよびグルーオン（まとめてパートンという）が単独でそのまま測定にかかることがなく，ジェット現象としてのみ観察されることである．理論的レベルでのパートンと観測レベルでのジェットを明確に対応づける方法はまだ確立されていないが，QCD を道しるべとした現象論的取扱いの試行錯誤により，ジェット現象そのものはかなり正確に再現し予言ができるようになってきた．この章では，まず QCD の基礎の概略を述べた後，ジェット現象には直接触れずに扱える QCD 現象（深非弾性散乱などの包含反応）について説明を試みる．ジェット現象は後の第 8 章で議論する．

5.1.2 カラー交換力の強さ

QCD がカラー $SU(3)$ 群に基づくゲージ理論であるのでラグランジアンは，

$$\mathcal{L}_{\rm QCD}=\sum_{A,b,c}[\,\overline{\psi}_b(i\gamma^\mu\partial_\mu-m)\psi_b-(1/4)F_A{}^{\mu\nu}F_{A\mu\nu}-g\overline{\psi}_b\gamma^\mu A_{A\mu}(t_A)_{bc}\psi_c] \tag{5.1 a}$$

$$F_{A\mu\nu}=\partial_\mu A_{A\nu}-\partial_\nu A_{A\mu}-gf_{ABC}A_{B\mu}A_{C\nu} \tag{5.1 b}$$

と書ける．ここで f_{ABC} は $SU(3)$ 群の構造定数（付録 F）を表す．

$$(t_A)_{bc}=(\lambda_A)_{bc}/2 \tag{5.2}$$

は $SU(3)$ 基本表現の生成子であり，指標 A, B, C は 1～8，b, c は 1～3＝R, G, B である．われわれに興味あるのは相互作用部分 $\mathcal{L}_{I\rm QCD}$ である．行列表示を使い，時空に関する指標を省略すると

$$-\mathcal{L}_{I\rm QCD}=g\sum_A\overline{\Psi}(\lambda_A/2)\Psi A_A \tag{5.3 a}$$

$$\Psi=\begin{bmatrix}\psi_R\\ \psi_G\\ \psi_B\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}R\\ G\\ B\end{bmatrix} \tag{5.3 b}$$

となる．アイソスピンに関わる核力相互作用を

$$-\mathcal{L}_N = g_N \overline{\Psi}\left(\frac{\boldsymbol{\tau}\cdot\boldsymbol{\pi}}{2}\right)\Psi = \frac{g_N}{\sqrt{2}}\left[\bar{p}n\pi^+ + \bar{n}p\pi^- + \frac{\bar{p}p - \bar{n}n}{\sqrt{2}}\pi^0\right]$$

と書いたのと同じ形式を使うと，

$$\begin{aligned} -\mathcal{L}_{I\mathrm{QCD}} &= g\sum \overline{\Psi}(\lambda_A/2)\Psi A_A \\ &= \frac{g}{\sqrt{2}}[\bar{R}Gg_1 + \bar{G}Rg_2 + \frac{\bar{R}R - \bar{G}G}{\sqrt{2}}g_3 + \bar{R}Bg_4 + \bar{B}Rg_5 \\ &\quad + \bar{G}Bg_6 + \bar{B}Gg_7 + \frac{\bar{R}R + \bar{G}G - 2\bar{B}B}{\sqrt{6}}g_8] \end{aligned} \tag{5.4 a}$$

$$\begin{aligned} &g_1 = (A_1 - iA_2)/\sqrt{2}, \quad g_2 = (A_1 + iA_2)/\sqrt{2}, \quad g_3 = A_3, \\ &g_4 = (A_4 - iA_5)/\sqrt{2}, \quad g_5 = (A_4 + iA_5)/\sqrt{2}, \\ &g_6 = (A_6 - iA_7)/\sqrt{2}, \quad g_7 = (A_6 + iA_7)/\sqrt{2}, \\ &g_8 = A_8 \end{aligned} \tag{5.4 b}$$

と書き表せる．$g_i (i=1\sim8)$ は再定義されたグルーオン場である．式 (5.4) は，例えば g_1 はカラー G を R に変える能力をもつことを意味する．いい換えれば g_1 はカラー自由度に関する限り $\bar{R}G$ というカラー場と同等の役割を果たす．いうまでもないが時空の関数としてはベクトル場である．この相互作用を使って，qq 間の力がどうなるかを見てみよう．まず RR 間の力は（図 5.1 (a), (b)），片方の R がグルーオンを放出して自らは再び R になり，そのグルーオンが他の R に吸収されるが R は R のままとなる．(5.4) の中で，$\bar{R}R$ と結合するのは g_3 と g_8 であるので，力の強さは

$$\{g'(1/\sqrt{2})\}^2 + \{g'(1/\sqrt{6})\}^2 = (2/3)g'^2 \tag{5.5 a}$$

ただし，$g' = g/\sqrt{2}$ である．今度は BB 間に働く力を求めると（図 5.1 (c)），式 (5.4) の中では g_8 にしか結合しないから

$$\{g'(-2/\sqrt{6})\}^2 = (2/3)g'^2 \tag{5.5 b}$$

となり，RR 間に働く力と同じ強さとなる．これは，R, G, B 間に働く力の普遍性を考えれば当然こうでなければならない．RB 間の力は，まず，$\bar{R}R$, $\bar{B}B$ 両方に結合する g_8（図 5.1 (d)）による寄与のほかに，今度は g_4 または g_5 によって R と B が交換される寄与（図 5.1 (e)）があるので両者を足し合わせると

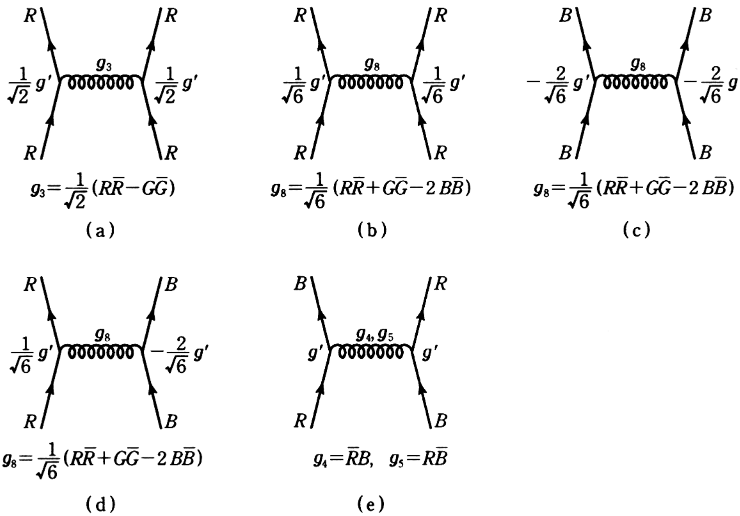


図 5.1 カラー場がグルーオンを交換するときの結合の強さ
$\therefore\quad V(RR)=V(BB)=V(RB)=\cdots$

$$g'(1/\sqrt{6})\times g'(-2/\sqrt{6})+g'(1)\times g'(1)=(2/3)g'^2 \tag{5.5c}$$

となり，普遍性は保たれている．

次に，一重項のメソン状態 $(\bar{R}R+\bar{G}G+\bar{B}B)/\sqrt{3}$ に働く力を考える．上の3項に働く力はみな同じであるから始状態 $\bar{B}B$ に働く力のみを考えて3倍すればよい．$B\bar{B}$ は終状態としては $B\bar{B}$, $R\bar{R}$, $G\bar{G}$ をとれることを考慮すると，考えるべき過程は3種類存在する（図5.2 (a), (b), (c)）．グルーオンはベクト

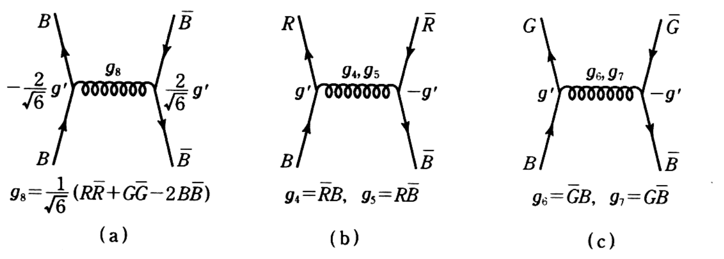


図 5.2 メソン一重項 $M=(1/\sqrt{3})\ (R\bar{R}+G\bar{G}+B\bar{B})$ に働くカラー交換力の強さ，ここでは $B\bar{B}$ に働く力のみ示す．すべて足すと $-\frac{8}{3}g'^2=-\frac{4}{3}g^2$ となる．

ル粒子であるので反粒子に対する結合は符号を変えることに注意して，(a)，(b)，(c) それぞれの寄与は

$$g'^2\{(2/\sqrt{6})(-2/\sqrt{6})+(1)(-1)+(1)(-1)\}=-(8/3)g'^2=-(4/3)g^2 \qquad (5.6)$$

となり，引力が働くことがわかる．上式から QED におけるクーロン力の強さ α に対応する q-$\bar{q}$ 間の力の大きさは，カラー因子をも考慮すると $4\alpha_s/3$ $(\alpha_s=g^2/4\pi)$ となることがわかる．

上のやり方は直観的でわかりやすいが計算は回りくどい．通常は群論を使う．qq または $q\bar{q}$ の間に働くポテンシャルの強さは，散乱振幅の形で書くと

$$\mathcal{M}(c+c'\to b+b')\sim g^2\langle bb'|[\,\overline{\psi}_b(\lambda_A/2)_{bc}\psi_c][\,\overline{\psi}_{b'}(\lambda_A/2)_{b'c'}\psi_{c'}]|cc'\rangle$$
$$\sim g^2\langle bb'|T_{1A}T_{2A}|cc'\rangle \qquad (5.7)$$

ただし，ここではカラー量子数以外の変数は省略した．T_{1A}，T_{2A} は，粒子 1，2 に演算する $SU(3)$ 生成演算子の表現行列である．カラー指標 A について和をとれば

$$\langle\sum_A T_{1A}T_{2A}\rangle\equiv\langle \boldsymbol{T}_1\cdot\boldsymbol{T}_2\rangle=(1/2)\langle(\boldsymbol{T}_1+\boldsymbol{T}_2)^2-\boldsymbol{T}_1{}^2-\boldsymbol{T}_2{}^2\rangle$$
$$=(1/2)\langle\boldsymbol{T}^2-\boldsymbol{T}_1{}^2-\boldsymbol{T}_2{}^2\rangle \qquad (5.8\,\mathrm{a})$$

という $SU(3)$ のカシミヤ演算子の計算に帰する．3（一般には n）体間のポテンシャルを考慮する場合でも，2 体力のみ働いているとすれば，ポテンシャルの符号と大きさの目安は，

$$C=\sum_{i<j}\langle\boldsymbol{T}_i\cdot\boldsymbol{T}_j\rangle=(1/2)\langle\boldsymbol{T}^2-\sum_i\boldsymbol{T}_i{}^2\rangle \qquad (5.8\,\mathrm{b})$$

によって与えられる．付録 (F. 50) を参照すれば C の値は表5.1のようにな

表 5.1　カラー因子 $\sum\langle\boldsymbol{T}_i\cdot\boldsymbol{T}_j\rangle$

配　位 [　] 内の数字は多重度を示す．	結合の強さ
$q\bar{q}$ [1]	$-4/3$
$q\bar{q}$ [8]	$+1/6$
qq [3*]	$-2/3$
qq [6]	$+1/3$
qqq [1]	-2
qqq [8]	$-1/2$
qqq [10]	$+1$
$qqqq$ [3]	-2

る．

この計算は1個のグルーオン交換のみの値であり，非可換ゲージ理論の重要な要素であるグルーオン間の結合や，高次の項などすべて無視した不完全なものではあるが，カラー一重項に強い引力が働くことを示していて，一重項のみが束縛状態をつくるという経験則と論理的に話が合う．$qq[3^*]$ は $qqq[1]$ の一部であるから当然引力でなければならない．$qqqq[3]$ の結合力は $qqq[1]$ と同じ大きさの -2 であるので，$qqq[1]$ にさらにクォークを付加しても余分な力は働かないということである．

5.1.3 QCD におけるファインマン規則

QCD のラグランジアンは，基本形は (5.1) で与えられるが，量子化するときは修正が必要である．ゲージ変換の自由度により時空での自由度を2しかもたないグルーオンを共変的に取り扱うためにラグランジアンに付加項（ゲージ固定項）をつける必要がある*1)．この状況はゲージ理論に普遍的なものであるが，QCD の場合はさらに非アーベルゲージ理論であることに伴う付加項が余分に必要となり（詳しくは文献1を見よ），量子化された QCD の全ラグランジアンは，

$$\mathscr{L}_{\mathrm{QCD}}=[\overline{\Psi}(i\gamma^{\mu}\partial_{\mu}-m)\Psi-(1/4)\boldsymbol{F}^{\mu\nu}\cdot\boldsymbol{F}_{\mu\nu}-g\overline{\Psi}\gamma^{\mu}\boldsymbol{A}_{\mu}\cdot\boldsymbol{t}\Psi]$$
$$-\frac{1}{2\lambda}(\partial_{\mu}\boldsymbol{A}^{\mu})\cdot(\partial_{\nu}\boldsymbol{A}^{\nu})+\sum_{A,B}\partial_{\mu}\eta_{A}{}^{\dagger}D_{AB}{}^{\mu}\eta_{B} \tag{5.9}$$

$$\boldsymbol{F}_{\mu\nu}=(F_{A\mu\nu})=(\partial_{\mu}A_{A\nu}-\partial_{\nu}A_{A\mu}-gf_{ABC}A_{B\mu}A_{C\nu}) \tag{5.10 a}$$

$$\boldsymbol{t}_{bc}=(t_{A})_{bc}=(\lambda_{A})_{bc}/2 \tag{5.10 b}$$

$$D_{AB}{}^{\mu}=\delta_{AB}\partial^{\mu}+ig\boldsymbol{A}_{\mu}\cdot(\boldsymbol{T})_{AB} \tag{5.11 a}$$

$$(\boldsymbol{T})_{AB}=[T_{C};C=1\sim8]_{AB}=-if_{ABC} \tag{5.11 b}$$

*1) QED においてもともと物理的に意味のある横偏極成分のみを量子化する方法は存在する．この場合物理的イメージは明快であるが，共変性を失うため計算が面倒である．ゲージ場を共変的に扱うため形式的には独立な4成分をもつローレンツベクトルとして扱う．代償として望む運動方程式を導くためにはラグランジアンに付加項が必要となり結果としてゲージが固定される．また，縦波フォトン，スカラーフォトンなど非物理的なフォトンが中間状態に現れるが，最終的な結果には非物理的な量は現れないようになっている．詳しくは I-§4 を参照せよ．

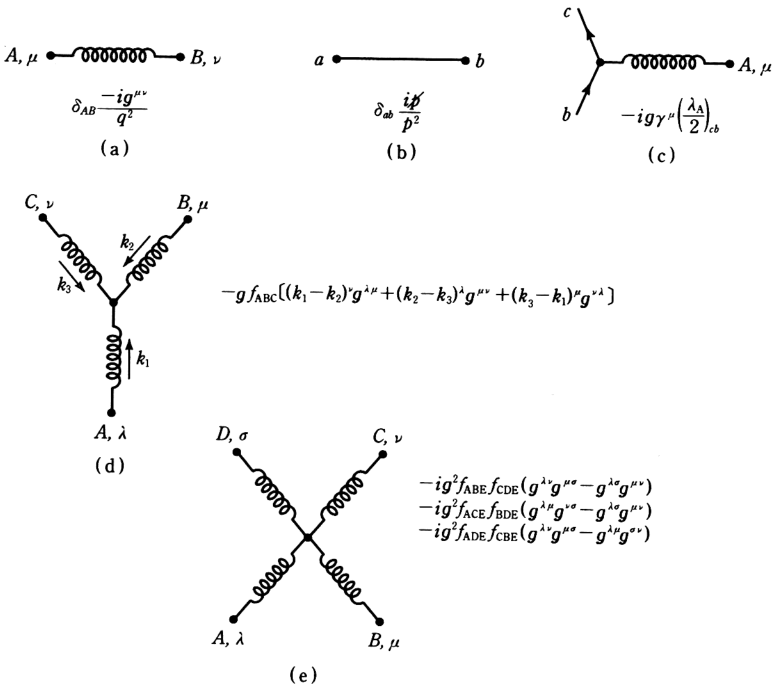


図 5.3　QCD におけるファインマン規則
(a)　グルーオン伝播関数，(b)　フェルミオン伝播関数
(c)　g-f-f ヴァーテックス
(d)　3-g：グルーオン自己結合
(e)　4-g：グルーオン自己結合

と表される．式 (5.9) の第 2 行第 1 項がゲージ固定項である．ここに，T_C は 8×8 の随伴表現行列である．

また後に出てくるので，よく使われるカラー因子の記号 (T_R, C_A, C_F) を導入しておく ((F. 26) 参照).

$$\mathrm{Tr}(t_A t_B)\equiv T_R\delta_{AB}, \qquad \sum_A (t_A t_A)_{bc}=C_F\delta_{bc}$$

$$\sum_A (T_A T_A)_{BC}=\mathrm{Tr}(T_B T_C)=C_A\delta_{BC}, \tag{5.12}$$

$SU(3)$ の場合，

$$T_R=\frac{1}{2}, \quad C_A=N_c=3, \quad C_F=\frac{N_c^2-1}{2N_c}=\frac{4}{3} \tag{5.13}$$

グルーオン伝播関数

グルーオン伝播関数は

$$\delta_{AB}\left[-g^{\mu\nu}+(1-\lambda)\frac{q^\mu q^\nu}{q^2+i\varepsilon}\right]\frac{i}{q^2+i\varepsilon} \tag{5.14}$$

となる．λ の選択でゲージが変わるとともに伝播関数も変わる．物理的に意味のある量はゲージ不変であるので λ は任意でよく，議論に都合のよい値に決めればよい．ここでは $\lambda=1$ のファインマンゲージとすると，グルーオンの伝播関数は，カラー指標以外は QED でのファインマンゲージのフォトンと同じ形となる（図 5.3 a）.

(5.9) の最後に現れる場 η は，幽霊スカラー (ghost scaler) と呼ばれ，非アーベルゲージ理論に特有な場である．スカラーでありながら反可換性をもつ．共変ゲージを採用することにともなう非物理的な量を相殺する役割を担っている．閉ループの中にのみ現れ，物理的なエネルギー量子として現れることはない．本書では，ファインマン図の計算はボルン近似（トリー近似）のみを取り扱うので，幽霊粒子の取扱いは省略する．

フェルミオンは，QED のときと同じであるが，クォーク質量は 0 として扱うことにする．

フェルミオン伝播関数（図 5.3 (b)）：

$$\delta_{ab}\frac{i}{\not{p}}=\delta_{ab}\frac{i\not{p}}{p^2+i\varepsilon} \tag{5.15}$$

ヴァーテックスは，グルーオン-フェルミオンの場合は

***g-f-f* ヴァーテックス**（図 5.3 (c)）：

$$-ig\gamma^\mu\frac{(\lambda_A)_{bc}}{2} \tag{5.16}$$

カラー因子は別として，QED になくて QCD にある重要な項は，グルーオンの自己相互作用である．(5.9) のラグランジアンの中の $-(1/4)\boldsymbol{F}^{\mu\nu}\cdot\boldsymbol{F}_{\mu\nu}$ を書き下ろすと

$$-\frac{1}{2}(\partial_\mu\boldsymbol{A}_\nu-\partial_\nu\boldsymbol{A}_\mu)\cdot\partial^\mu\boldsymbol{A}^\nu+\frac{1}{2}g(\boldsymbol{A}_\mu\times\boldsymbol{A}_\nu\cdot\partial^\mu\boldsymbol{A}^\nu-\partial^\mu\boldsymbol{A}^\nu)$$

$$-\frac{1}{4}g^2[(\boldsymbol{A}_\mu\cdot\boldsymbol{A}^\mu)^2-(\boldsymbol{A}_\mu\cdot\boldsymbol{A}_\nu)(\boldsymbol{A}^\mu\cdot\boldsymbol{A}^\nu)]$$

$$= -\frac{1}{2}(\partial_\mu A_{A\nu} - \partial_\nu A_{A\mu})\partial^\mu A_A{}^\nu + \frac{1}{2} g f_{ABC} A_{A\mu} A_{B\nu} (\partial^\mu A_C{}^\nu - \partial^\nu A_C{}^\mu)$$

$$-\frac{1}{4} g^2 f_{ABE} f_{CDE} A_{A\mu} A_{B\nu} A_C{}^\mu A_D{}^\nu \tag{5.17}$$

この相互作用に対応するファインマン規則は行列要素をとってみればわかる．運動量はすべてヴァーテックスに入射する向きを正とするとき

3 グルーオンヴァーテックス (図 5.3 (d))：

$$-g f_{ABC}[(k_1-k_2)^\nu g^{\lambda\mu} + (k_2-k_3)^\lambda g^{\mu\nu} + (k_3-k_1)^\mu g^{\nu\lambda}] \tag{5.18 a}$$

4 グルーオンヴァーテックス (図 5.3 (e))：

$$\begin{aligned} &-ig^2 f_{ABE}\, f_{CDE}(g^{\lambda\nu} g^{\mu\sigma} - g^{\lambda\sigma} g^{\mu\nu}) \\ &-ig^2 f_{ACE}\, f_{BDE}(g^{\lambda\mu} g^{\nu\sigma} - g^{\lambda\sigma} g^{\mu\nu}) \\ &-ig^2 f_{ADE}\, f_{CBE}(g^{\lambda\nu} g^{\mu\sigma} - g^{\lambda\mu} g^{\sigma\nu}) \end{aligned} \tag{5.18 b}$$

となる．

トリー近似では，グルーオン自己相互作用とカラー因子を別にすればQCDの計算はQEDとほとんど同一に進められる．本書では，QCDの理論的内容には深入りせず，非アーベルゲージ理論としての物理的特徴に力点をおいて解説を進めるのが主眼であるので，断面積などQCDラグランジアンからファインマン規則を使って直接計算する方が論理的には簡単な場合もあるが，QEDの計算結果を可能な限り活用し，QEDとの類似と差に注目しつつ議論を進めることにする．そこで後の議論のために，QEDにおける α とQCDにおける α_s との対応をつけておこう．図 5.3 (c) にあるようなクォークによるグルーオン放出を考えると，この行列要素は

$$\mathcal{M}(b \to c + A) = -ig\bar{u}_c(p')\gamma^\mu A_{A\mu}(\lambda_A/2)_{cb} u_b(p) \tag{5.19}$$

自乗してクォークのスピン和をとると，γ 行列など時空に関する部分はQEDと同じ結果を与えるが，カラー自由度の部分は

$$\begin{aligned} &(g^2/4)(\lambda_A)_{cb}\delta_{bb'}(\lambda_A{}^\dagger)_{b'c'}\delta_{c'c} \\ &\quad = (g^2/4)\mathrm{Tr}[\lambda_A\lambda_A] = g^2/2 \end{aligned} \tag{5.20}$$

となりグルーオンの種類によらない．終状態のグルーオンの和をとり (×8)，始状態クォークカラーの平均をとれば (×1/3)，この場合のQED→QCDの変換因子は

クォークによるグルーオン発生：$\alpha \to (\alpha_s/2)\times(8/3)$　(5.21 a)

となる．グルーオンによるクオーク対生成の計算もまた同様の結果（グルーオンのカラーによらない）を与えるので，カラー自由度を考慮すると，

グルーオンによるクォーク対発生：$\alpha \to (\alpha_s/2)\times(8/8)$　(5.21 b)

を与える．以上のことから，QED に対応するグラフがあるときは，QED の行列要素をそのまま使用し，$\alpha \to \alpha_s/2$ と置き換えてカラー因子をつけ加えればよいことがわかる．$\alpha_s/2$ の 1/2 が生じる原因は，(5.4) での結合定数を $g'=g/\sqrt{2}$ で定義したことによる．

5.2 漸 近 自 由

古典電磁気学では，物質中の電磁場は誘電分極により変化し，実質的に電荷密度が $\rho \to \rho/\varepsilon$（$\varepsilon$＝誘電率＞1）になると同様の効果が生じることが知られている．真空もまたハイゼンベルグの不確定性原理の許す範囲内で，粒子反粒子対が生成消滅を繰り返しており，電場が存在すれば正負の電荷の偏りつまり真空偏極を起こし，実質的に誘電体としての性質を示すことが知られている．これは電子が仮想的にフォトンの雲を周りにつくりだしており，このフォトンがさらに電子反電子対をつくり，結局電子の周りには正負の電荷がたくさん生じていて，電子の電荷を外から試験電荷をもち込んで測定しようとするとき（具体的には例えば外場を与えてトムソン散乱をさせる），その試験電荷をどこに置くか（距離 r）によって電子の電荷の値が変化することを意味する．遠いところに置くほど遮蔽効果が大きいので，実効電荷が小さくなる．場の理論では図 5.4 のように，試験電荷と測定しようとする電荷の有効結合定数が，高次効果である電子対ループの影響を取り入れると変化することを意味し（この効果は実験的にはラムシフトなどで観測される），この効果は両者をつなぐ仮想フォトンの質量 Q^2 の関数（$Q\sim 1/r$）として表されることになる．ループの計算は無限大の発散積分（紫外発散）を含むので繰り込みの処方が必要となるが，発散部分を Δ_e と書いて分離しておくと*2)，真空偏極（図 5.4 (c)）による結合定数 α に対する補正因子 $B(Q^2)$ は（付録 (J.40 b)，(J.42) 参照）

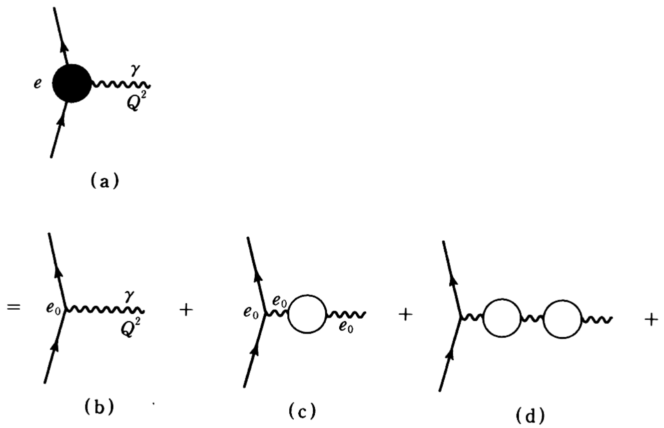


図 5.4 電荷 e (a) はトリー近似では $e=e_0$ であるが (b), 真空偏極 (c), (d), …を入れると変わり, 運動量遷移 Q^2 の関数となる. すなわち $e=e(e_0, Q^2)$.

$$\alpha_0 B(Q^2) \equiv -\Pi_\gamma(q^2=-Q^2)$$

$$\begin{cases} \fallingdotseq -\dfrac{\alpha_0}{3\pi}\left\{\Delta_e - \ln\left(\dfrac{Q^2}{m_e^2}\right)\right\} & Q^2 \gg m_e^2 \quad (5.22\,\mathrm{a}) \\ \fallingdotseq -\dfrac{\alpha_0}{3\pi}\left\{\Delta_e - \dfrac{Q^2}{5m_e^2}\right\} & Q^2 \ll m_e^2 \quad (5.22\,\mathrm{b}) \end{cases}$$

ただし, $q^2=-Q^2<0$ は, 空間的仮想フォトンの運動量遷移 (の自乗) である. $\alpha_0=e_0^2/4\pi$ はラグランジアンに現れる裸の結合定数である. 誘電分極を引き起こすループはいくつでもあるから, それらをすべて足し合わせた量が試験電荷が実効的に見る電荷 $\alpha_{\rm eff}$ となる.

$$\alpha_{\rm eff}(Q^2)=\alpha_0\{1+\alpha_0 B+\alpha_0 B\alpha_0 B+\cdots\}=\frac{\alpha_0}{1-\alpha_0 B(Q^2)} \qquad (5.23)$$

このままでは発散量 Δ_e を含んでいて物理量とはいえないが, 十分遠く ($Q^2\to 0$) で試験電荷が感じる値が実際に測定される電荷 α と見なせるから

$$\alpha \equiv \alpha_{\rm eff}(0)=1/137.\cdots \qquad (5.24)$$

---

*2) 次元正則化法を採用した場合は, Δ は式 (5.33) で与えられ, $\Delta_e=\Delta-\ln(m_e^2)$ の関係にある. また Π_γ はフェルミオンループによる自己エネルギーの寄与を表す (付録式 (J.42) 参照).

とすると，

$$\frac{1}{\alpha_{\text{eff}}(Q^2)}=\frac{1}{\alpha}-\{B(Q^2)-B(0)\}\fallingdotseq\frac{1}{\alpha}-\frac{1}{3\pi}\ln\left(\frac{Q^2}{m_e{}^2}\right) \tag{5.25}$$

$$\therefore\quad \alpha_{\text{eff}}(Q^2)=\frac{\alpha}{1-\dfrac{\alpha}{3\pi}\ln\left(\dfrac{Q^2}{m_e{}^2}\right)} \tag{5.26}$$

この $\alpha_{\text{eff}}(Q^2)$ にはもはや発散量 Δ_e は入っておらず，観測量のみで表されている．この式は上の直観的考察で予想したように，短距離つまり $Q^2\to\infty$ で結合定数が大きくなることを示している．分母が 0 になるところ (ランダウ極) で発散するが，それはそのような大きい Q^2 のところでは摂動計算が無効になることを意味する．

QCD においても同様な考察が可能で，有効結合定数を Q^2 の関数として表すことができる．しかし今度は非アーベルゲージ理論の特徴として，グルーオンの自己結合があるために状況が大きく変わる．種々のグラフの相対的寄与はゲージのとり方によるので，ゲージによってはヴァーテックス補正や，フェルミオン伝播関数の補正などからの寄与も効くが，物理的にイメージが一番はっきりするのはクーロンゲージである．このゲージではグルーオン場の相互作用は横偏極のみをもつグルーオン交換力と瞬間的なクーロン力の和として表される．グルーオンの伝播関数の補正には，図 5.5 に示すようにフェルミオンループとグルーオンループがあり，これらを足し合わせた最低次の補正 $\alpha_0 B(Q^2)$ を入れると[1)]

$$\alpha_{\text{eff}}(Q^2)=\alpha_0[1+\alpha_0 B(Q^2)]=\alpha_0\left[1+\alpha_0\frac{\beta_0}{4\pi}\{\Delta-\ln Q^2\}\right] \tag{5.27}$$

$$\beta_0=-\left(\frac{2}{3}n_f+5-16\right) \tag{5.28}$$

となる．式 (5.28) の括弧の中の第 1 項は，QED にも存在したフェルミオンループからの寄与で，n_f はクォークの香りの数である．QED の α が，QCD の $\alpha_s/2$ に対応することを考えれば，第 1 項は QED の補正と数値的にも一致する．第 2 項以下がグルーオンの相互作用による項で QCD に特有の寄与である．第 2 項は横偏極のグルーオンループの寄与を示し，第 3 項はクーロングルーオンの寄与を示し，符号が逆である．これは物理的には負の確率に対応す

る．フェルミオン対や横偏極のグルーオン対はエネルギー運動量の保存則が満たされれば，実際にエネルギー量子として生成できる物理的粒子である．実際ループの真ん中を二つに切断すればわかるように，ループの寄与はフェルミオン対またはグルーオン対の生成断面積に比例する量であり，ループの寄与と断面積の間にはある決まった関係が存在する．一方，クーロングルーオンは瞬間的なクーロン力を生じる役目のみを担っており，エネルギー量子として物理的に実在しうるグルーオンではない．したがって，この符号は第 1，2 項と違って負になってもかまわない．留意すべき点は，クーロングルーオンは他の寄与と逆符号の寄与を与えるということである．この結果，香りの種類が 16 を超えない限り $B(Q^2)$ の符号は負となる．

発散を除去するためには，QED の場合と同じく繰り込みの処方が必要である．しかし，QED の場合と違い遠方（$Q^2=0$）での値を基準にとるわけにはいかない．閉じ込め効果により遠方から裸のカラー荷を観測することは不可能だからである．そこである値（$Q^2=\mu^2$）での結合定数を基準にとることにし

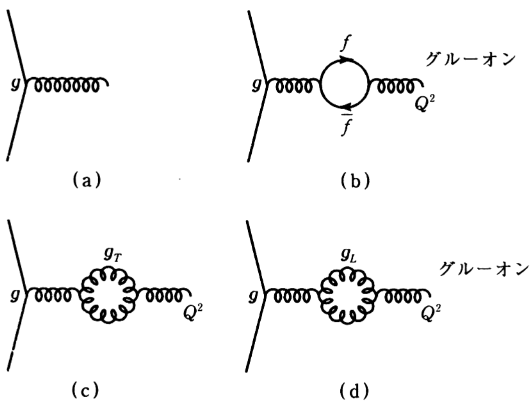


図 5.5　QCD における真空偏極

(a)　カラークォークとグルーオンの結合

(b)　フェルミオン対による真空偏極は QED と同じ種類の過程であるが，グルーオンは自己相互作用をもつため，グルーオン対による真空偏極 (c), (d) が存在する．

(c)　横偏極グルーオン対

(d)　縦波（クーロン）グルーオンの寄与．クーロングルーオンは物理的な粒子ではない．

て引き算をする．この μ^2 を繰り込み点もしくは繰り込みスケールという．ループが繰り返し現れる高次の項を全部加えた後で引き算すると，

$$\frac{1}{\alpha_{\mathrm{eff}}(Q^2)}=\frac{1}{\alpha(\mu^2)}-\{B(Q^2)-B(\mu^2)\}\fallingdotseq\frac{1}{\alpha(\mu^2)}+\frac{\beta_0}{4\pi}\ln\left(\frac{Q^2}{\mu^2}\right) \tag{5.29}$$

これより，

$$\therefore\quad \alpha_s(Q^2)\equiv\alpha_{\mathrm{eff}}(Q^2)=\frac{\alpha(\mu^2)}{1+\alpha(\mu^2)\dfrac{\beta_0}{4\pi}\ln\left(\dfrac{Q^2}{\mu^2}\right)} \tag{5.30}$$

となる．この式は QED の場合と違い $Q^2\to\infty$ で 0 に近づく．すなわち近距離ではクォーク間に働く力は弱くなることを示す．このことを漸近自由と呼び，QCD（一般には非可換ゲージ理論）の大きな特徴である．

この漸近自由という事実があるため深非弾性散乱では，自由粒子近似のパートンモデルが成功したのである．漸近自由は，十分 Q^2 の大きいところでは摂動の手法が使えること，逆に Q^2 が小さいところでは摂動の手法が破綻することを意味する．QED では遠方での結合定数が定義でき，かつ観測量に対応したが，QCD ではそれに対応する量がない．結合定数 $\alpha_s(Q^2)$ は繰り込み点 μ^2 に依存する量である．しかし，繰り込み点の選び方には任意性があるので具合が悪い．そこで (5.29) を書き直して

$$\frac{1}{\alpha_{\mathrm{eff}}(Q^2)}+B(Q^2)=\frac{1}{\alpha(\mu^2)}+B(\mu^2)\equiv-\frac{\beta_0}{4\pi}\ln(\Lambda^2) \tag{5.31}$$

とすると，左辺は Q^2 のみの関数，真中は μ^2 のみの関数であり，結局 Q^2 や μ^2 によらない定数であることがわかるので，右辺に示すような繰り込み点に依存しない普遍的物理定数 Λ が定義できる．この Λ で結合定数を表すと

$$\alpha_s(Q^2)=\frac{4\pi}{\beta_0\ln(Q^2/\Lambda^2)}\equiv\alpha_{sLLA}(Q^2) \tag{5.32 a}$$

$$\beta_0=\left(11-\frac{2}{3}n_f\right) \tag{5.32 b}$$

となる．これが QCD 計算で頻出する α_s の対数第 1 近似（LLA＝leading log approximation）の表現式である．この言葉のもつ意味については後で述べる．

5.3　繰り込み群方程式

5.3.1　観測量の繰り込みスケール依存性

物理量を摂動計算すると，一般的に

$$P = c_1\alpha_s + c_2\alpha_s{}^2 + \cdots$$

という形をとる．$c_1, c_2, \cdots$ は対象とする物理過程のファインマングラフを計算して得られる．閉ループがあると発生する無限大の発散を処理する方法として，次元正則化の方法を使うのが標準的である（付録 J 参照）．これは積分を 4 次元でなく $4-\varepsilon$ 次元で行い計算の最後に $\varepsilon \to 0$ にもっていく方法であり，無限大の発散は，次の Δ の形で現れる（付録（J.23）参照）．

$$\Delta = \frac{2}{\varepsilon} - \gamma_E + \ln(4\pi) + \ln\mu^2 \tag{5.33}$$

このとき，$2/\varepsilon$ のみを引き算する方法を最小引き算法，付随する定数項（$\ln 4\pi + \gamma_E$（オイラーの定数））をまとめて引き算する方法を，修正引き算法（$\overline{\mathrm{MS}}$ という指標をつける）という[2]．次元正則化法では物理量の次元を合わせるために計算途中で質量の次元をもつ μ というパラメターを導入し，結合定数 $g \to g\mu^\varepsilon$ とする必要がある．$\mu^\varepsilon = \exp[(\varepsilon/2)\ln\mu^2] \simeq 1 + (\varepsilon/2)\ln\mu^2 + \cdots$ であるので，引き算した後に $\ln\mu^2$ が残る．すなわち，$c_1, c_2, \cdots$ は引き算の方法と $\ln\mu^2$ に依存する．物理量のエネルギースケールを Q とすれば，次元解析から $\tau = \ln(Q^2/\mu^2)$ に依存する．観測量は繰り込み点 μ^2 のとり方に依存してはいけないから，μ^2 による変化は α_s の変化と相殺しなければならない．すなわち

$$\mu^2\frac{\mathrm{d}P(\tau, \alpha_s)}{\mathrm{d}\mu^2} = \left(\mu^2\frac{\partial}{\partial\mu^2} + \mu^2\frac{\partial\alpha_s}{\partial\mu^2}\frac{\partial}{\partial\alpha_s}\right)P(\tau, \alpha_s) = 0 \tag{5.34 a}$$

が成立しなければならない．これは

$$\left(-\frac{\partial}{\partial\tau} + \beta(\alpha_s)\frac{\partial}{\partial\alpha_s}\right)P(\tau, \alpha_s) = 0 \tag{5.34 b}$$

という形に書き直せる．ただし，β 関数は

$$\beta(\alpha_s) \equiv \mu^2\frac{\partial\alpha_s}{\partial\mu^2} = \frac{\partial\alpha_s}{\partial\ln\mu^2} \tag{5.34 c}$$

で定義される関数である．これを繰り込み群方程式と呼ぶ．ここで新しい関数

$\alpha_s(\tau)$ を

$$\tau = \int_{\alpha_s}^{\alpha_s(\tau)} \frac{\mathrm{d}\alpha}{\beta(\alpha)} \tag{5.35 a}$$

で定義し境界条件として

$$\alpha_s(\tau=0) = \alpha_s(\mu^2) \equiv \alpha_s \tag{5.35 b}$$

と設定すると，(5.35 a) を τ および α_s で微分することによって，

$$\frac{\mathrm{d}\alpha_s(\tau)}{\mathrm{d}\tau} = \beta(\alpha_s(\tau)) \tag{5.36 a}$$

$$\frac{1}{\beta(\alpha_s(\tau))} \frac{\mathrm{d}\alpha_s(\tau)}{\mathrm{d}\alpha_s} - \frac{1}{\beta(\alpha_s)} = 0 \tag{5.36 b}$$

が得られるが，両者を組み合わせると

$$\left(-\frac{\partial}{\partial\tau} + \beta(\alpha_s)\frac{\partial}{\partial\alpha_s}\right)\alpha_s(\tau) = 0 \tag{5.36 c}$$

という方程式が得られる．これより，性質のよい任意の関数 $F(x)$ に対して，

$$\left(-\frac{\partial}{\partial\tau} + \beta(\alpha_s)\frac{\partial}{\partial\alpha_s}\right)F(\alpha_s(\tau)) = 0 \tag{5.37}$$

がいえるから，(5.34 b) と比較すれば，(5.34 b) は一般解として

$$P(\tau, \alpha_s) = P(0, \alpha_s(\tau)) \tag{5.38}$$

をもつことがわかる．すなわち繰り込み群方程式は，QCD における観測量の Q^2 依存性がすべて $\alpha_s(Q^2)$ の中に入っていることを示す．しかも，P の α_s 依存性は $P(0, \alpha_s)$ がわかれば決められることがわかる．例えば，$e^+e^- \to$ ハドロン反応における R 値の最低次の QCD 補正は

$$R \equiv \frac{\sigma(e^+e^- \to \text{ハドロン})}{\sigma(e^+e^- \to \mu\mu)} = R_0\left(1 + \frac{\alpha_s}{\pi} + \cdots\right) \tag{5.39 a}$$

で与えられるので（後述，(5.69)），R の Q^2 依存性は直ちに

$$R(Q^2) = R_0\left(1 + \frac{\alpha_s(Q^2)}{\pi} + \cdots\right) \tag{5.39 b}$$

と求められる．

次に α_s の求め方であるが，一般的に α_s の満たす式は (5.36 a) で，境界条件は (5.35 b) で与えられる．β 関数は実際的には摂動論によってのみ計算可能であるので，次のように展開する．

$$-\beta(\alpha_s(\tau)) = b_0[\alpha_s^2(\tau) + b_1\alpha_s^3(\tau) + b_2\alpha_s^4(\tau) + \cdots] \tag{5.40}$$

第1項は $O(\alpha_0^2)$ のループ計算で求められる．α_s の摂動展開（5.27）を微分すると

$$\frac{\mathrm{d}\alpha_s(\tau)}{\mathrm{d}\tau}=-\frac{\beta_0}{4\pi}\alpha_0^2+O(\alpha_s^3) \tag{5.41}$$

（5.40）と比較して

$$b_0=\frac{\beta_0}{4\pi}=\frac{1}{4\pi}\left(11-\frac{2}{3}n_f\right) \tag{5.42}$$

したがって，（5.35 a）は α_s の展開第1次近似で

$$\int_{\alpha_s(\mu^2)}^{\alpha_s(Q^2)}\frac{\mathrm{d}\alpha_s}{\alpha_s^2}=-b_0\int_0^\tau \mathrm{d}\tau \tag{5.43 a}$$

この解は（5.30）に一致する．すなわち β 関数を摂動で求めて，繰り込み群方程式に入れた $\alpha_s(Q^2)$ の解は，ある種の高次の項が自動的に取り入れられており，先に行ったようにいちいち手で計算する必要がない．

β 関数の対数第2近似（NLLA；next leading log approximation）以降もまた計算されており[3]，

$$b_0b_1=\frac{\beta_1}{8\pi^2}=\frac{1}{8\pi^2}\left(51-\frac{19}{3}n_f\right) \tag{5.43 b}$$

$$b_0b_2=\frac{\beta_2}{128\pi^2}=\frac{1}{128\pi^2}\left(2857-\frac{5033}{9}n_f+\frac{325}{27}n_f^2\right) \tag{5.43 c}$$

である．

b_0 と b_1 は，繰り込み処方によらないが，b_2 以降は繰り込み処方により変わる．b_1 まで入れる近似で，（5.36 a）を解くと

$$\frac{1}{\alpha_s}+b_1\ln\left(\frac{b_1\alpha_s}{1+b_1\alpha_s}\right)=b_0\ln\left(\frac{Q^2}{\Lambda^2}\right) \tag{5.44}$$

が得られる．ここで定義した Λ は，対数第1近似の Λ（5.31）とは異なる．この式から数値的には α_s を解くことはできるものの普段使うには不便であるので，右辺に（5.32）を入れて，

$$\alpha_s(Q^2)=\alpha_{s\mathrm{LLA}}\left[1-b_1\alpha_{s\mathrm{LLA}}(Q^2)\ln\left(\frac{b_1\alpha_s}{1+b_1\alpha_s}\right)\right]^{-1}$$

のように変形し，$\ln Q^2$ の逆べきで展開して第2近似までとったものを使うことにする．これをもって，通常対数第2近似の α_s という．すなわち，

$$\alpha_{s\text{NLLA}}(Q^2)=\alpha_{s\text{LLA}}[1-b_1\alpha_{\text{LLA}}(Q^2)\ln(\ln(Q^2/\Lambda^2))]^{-1}$$
$$=\frac{4\pi}{\beta_0\ln(Q^2/\Lambda^2)}\left[1-\frac{2\beta_1\ln(\ln(Q^2/\Lambda^2))}{\beta_0{}^2\ln(Q^2/\Lambda^2)}\right] \tag{5.45 a}$$
$$\alpha_{s\text{LLA}}(Q^2)=\frac{4\pi}{\beta_0\ln(Q^2/\Lambda^2)} \tag{5.45 b}$$

が標準的に使われる対数第 2 近似の α_s を与える．

現在は第 3 近似まで求められているが，実験値と比較するうえでは第 2 近似で十分である．$\alpha_s(Q^2)$ は Q^2 に依存するので，各実験データから得られる α_s は $Q=m_Z$ での値に焼き直して提示するのが慣例となっている．現在の世界値は

$$\alpha_s(m_Z)=0.119\pm0.002 \tag{5.46}$$

である[3)]．

演習 5.1 (5.44), (5.45) を導け．

5.3.2 QCD 高次補正とスケール依存性

物理量 $P(\mu^2,\ \alpha_s(\mu^2))$ の α_s による摂動展開が，摂動の各次で繰り込み群方程式 (5.34) を満たすためには，次のような形をしていなければならない．

$$P=c_0+c_1\alpha_s(\mu^2)+\left[c_2+c_1b_0\ln\left(\frac{\mu^2}{Q^2}\right)\right]\alpha_s(\mu^2)^2$$
$$+\left[c_3+b_0\left\{2c_2+c_1b_1+c_1b_0\ln\left(\frac{\mu^2}{Q^2}\right)\right\}\ln\left(\frac{\mu^2}{Q^2}\right)\right]\alpha_s(\mu^2)^3$$
$$+(\text{高次の項}) \tag{5.47 a}$$

これから摂動展開第 n 次項は一般に，

$$\alpha_s(\mu^2)^n\sum_{i=1}^{n}c_i(n)\left(\ln\frac{\mu^2}{Q^2}\right)^{n-i} \tag{5.47 b}$$

という形をしていることがわかる．摂動展開が成立するためには，$\alpha_s\ln(\mu^2/Q^2)$が，あまり大きくてはいけないことがわかる．もし，$\alpha_s\ln(\mu^2/Q^2)\fallingdotseq1$ のときは，摂動の n 次でも大きさとしては $O(\alpha_s)$ であり，これらの項についてはすべて和をとって $O(\alpha_s)$ のところでまとめないと意味がない．そこで，各摂動の n 次の項の中の対数の最高べきの項をすべて抜き出し，$\alpha_s(\mu^2)$ に加えたものをひとまとめにして $\alpha_{s\text{LLA}}(Q^2)$ とおけば，それは (5.30) の $\alpha_{s\text{LLA}}(Q^2)$ と一致する．残された項は，$O[\alpha_s{}^2\{\alpha_s\ln(\mu^2/Q^2\}^{n-2},\ n\geqq2]$ である．これが対数第 1

(優勢項) 近似 (leading log approximation) の名前の由来である[*3]. すなわち, $\alpha_s(\mu^2)$ の代わりに, 対数第 1 近似の有効結合定数 $\alpha_{s\mathrm{LLA}}(Q^2)$ を使えば, 少なくも $O(\alpha_s{}^2)$ まではすべての μ^2 依存性が $\alpha_s(Q^2)$ の中に繰り込まれることがわかる. 同様に, 対数第 2 近似の有効結合定数 $\alpha_{s\mathrm{NLLA}}(Q^2)$ を使えば, μ^2 依存性は少なくも $O(\alpha_s{}^3)$ まではでてこない.

繰り込み群方程式の解 (5.38) は, α_s に対する近似を高めてゆけば, $\ln\mu^2$ 依存性はすべて $\alpha_s(Q^2)$ の中に取り込めることを示している. 近似が完全でないときは $(\ln\mu^2)^m$ の項が高次の表式に残り, 観測量が μ 依存性をもつ.

再び $P=R$ ($e\bar{e}\to$ ハドロンの断面積比) を考えてみよう. (5.39) より, $c_0=1$, $c_1=1/\pi$ である. 現在では $O(\alpha_s{}^3)$ まで計算されている[4].

$$R=\frac{11}{3}\left\{1+\left(\frac{\alpha_s}{\pi}\right)+1.411\left(\frac{\alpha_s}{\pi}\right)^2-12.8\left(\frac{\alpha_s}{\pi}\right)^3\cdots\right\} \tag{5.48}$$

ここでの数値は $n_f=5$, 繰り込み処法は $\overline{MS}$ 方式での値である.

上記の例では, $Q^2=s$ (全エネルギーの自乗) とおいたが, 対象とする過程によっては, Q として全エネルギー, 横運動量, あるいは関与する重粒子の質量などのどれを選択すべきか必ずしも明白ではない. Q^2 の選び方によっては, 残された項の中の $\ln(\mu^2/Q^2)$ が無視できなくなる. したがって, 高次の計算が用意されてなくて近似が浅いときは, Q^2 の変数選択が QCD 計算の信頼性を高めるうえでの重要な要素となる. 実際, 実験値との一致を見い出すうえでの QCD 計算の最大の理論的不定性は式の μ 依存性からくるのである. 繰り込み群方程式の本来の要請から, 原理的には μ 依存性は最小限に抑えられるはずであっても, 摂動の有限次で閉じる限り必ずしもあてはまらないのである.

α_s の有限次で計算を打ち切った場合, スケール μ に対する依存性が完全には消えていないことを R を例にとって示そう. 図 5.6に, 対数第 1 近似 (L), 対数第 2 近似 (NL), 第 3 近似 (NNL) のときの $((3/11)R-1)$ の理論計算値を μ の関数として示す[5]. ただし, $Q=100$ GeV, $n_f=5$, $\Lambda_{\overline{MS}}=230$ MeV とし, α_s は対数第 2 近似の値を使用した. 近似が上がるたびに, スケール依存

---

*3) 忠実に原語に従えば, 展開の対数優勢項近似とでも訳すべきなのであろうが, ここでは対数第 1 近似, 対数第 2 近似という言葉を使うことにし, 混乱のおそれがないときは単に第 1, 2 近似ということにする.

性が小さくなることが見てとれる．繰り込み群方程式の成立する精度は $O(\alpha_s{}^4)$ のはずであるから，これが残存するスケール依存性の大きさの目安を与える．ただし，実験的にはまだ精度が悪く，R の理論値の $O(\alpha_s{}^3)$ の有効性をテストできる段階ではない．以上の議論から一般的にいえることとして，QCD の摂動計算は，対数第 1 近似ではスケール依存性が大きくて近似が悪く，少なくも対数第 2 近似まで進めることが望ましいということがわかるであろう．

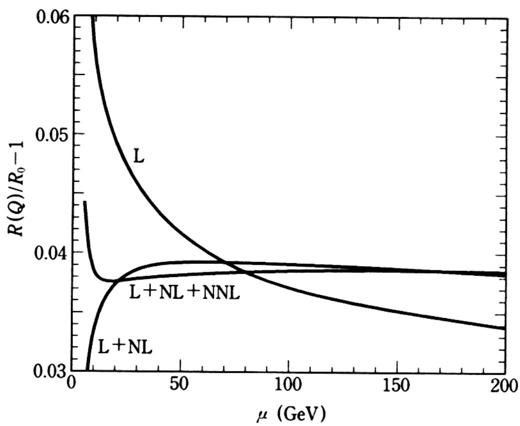


図 5.6 $R=\dfrac{\sigma(e^+e^-\to \text{ハドロン})}{\sigma(e^+e^-\to\mu\bar{\mu}:\text{QED})}$ の QCD 効果のスケール依存性[5)]

図には $\dfrac{R(Q=100\text{GeV})}{R_0}-1$，$R_0=\dfrac{11}{3}$ を書いてある．

L＝対数第 1 近似 (leading log approximation)，NL＝第 2 近似 (next-to-LLA)，NNL＝第 3 近似 (next next-to-LLA)．

5.3.3 Λ の 不 定 性

Λ という定数は QCD で最も重要な物理量であり，原理的には α_s から (5.32) もしくは (5.45) を使って得られる量である．実際問題としては正確に決めることが非常にむずかしい．第 1 には有効結合定数はそれほど小さい量ではないので，観測量を α_s で展開したとき切り捨てた高次の項もまた必ずしも小さい量ではない．第 2 にこれまでの実験データは必ずしも $Q^2\to\infty$ の理想的条件のもとでは行われていない．小さい Q^2 領域での比較ではいわゆるツイスト項と呼ばれる補正項 ($O(m^2/Q^2)$ 項) の計算が非常にむずかしく実験値

と理論値の対応は必ずしも明瞭ではない．

さらに実験的に精密な値が得られたとしても，(5.32) という対数第1 (leading log) 展開の最低次をとる限り Λ は任意であることに注意する必要がある．Λ を変えることは

$$\alpha_{\mathrm{LLA}}(Q^2) \longrightarrow \frac{4\pi}{\beta_0\{\ln(Q^2/\Lambda^2)+C\}} = \frac{4\pi}{\beta_0 \ln(Q^2/\Lambda^2)} - \frac{4\pi C}{\beta_0 \ln^2(Q^2/\Lambda^2)} + \cdots \qquad (5.49)$$

と変化させることを意味するが，変化は $O(\alpha_s{}^2)$ である．この Λ の不定性は，第2次近似以上を使用すれば除ける．

対数第2近似の Λ でも，(5.45) で定義される Λ（これを Λ_1 と書く）と (5.44) で定義される Λ（これを Λ_2 とする*4)）とは同一ではなく，同じ α_s の値に対して

$$\Lambda_2 = \exp\left[\frac{b_1}{2b_0}\ln\left(\frac{b_0}{b_1}\right)\right]\Lambda_1 \doteqdot 1.148\Lambda_1, \quad (n_f=5) \qquad (5.50)$$

だけの差がある．通常は，Λ_1 を標準としているが，人により Λ_2 を使う場合もある．実験的に決められるのは通常は α_s の方である．Λ はそれから導く量であるので，Λ の値を引用するときはどの定義の Λ かよく注意する必要がある．

さらに物事を複雑にするのは Λ を表す式が繰り込みの処方箋によるということである．厳密に計算すれば，Λ の値は処方の仕方にはよらないはずであるが，摂動計算を有限次で止める場合はこの限りでない．修正最小引き算の処方 (modified minimal subtraction scheme) のときの Λ を $\Lambda_{\overline{MS}}$ と記す．

また，(5.32b) から明らかなように Λ は n_f により変わる．後で述べる深非弾性散乱から決める Λ は $n_f=4$ のときの値 ($\Lambda=\Lambda(4)$) であり，大体 200 ～300 MeV 程度の量である．このとき $Q^2 \doteqdot 3000\ \mathrm{GeV}^2$ として $\alpha_s \doteqdot 0.1 \sim 0.16$ くらいとなる．しかし，電子陽電子衝突型実験では，通常 $Q^2=s=$全エネルギーの自乗とおく．トリスタン（TRISTAN）やペトラ（PETRA）では

*4)　一般には

$$\ln\left(\frac{Q^2}{\Lambda^2}\right) = -\int_{\alpha_s(Q^2)}^{\infty} \frac{dx}{\beta(x)}$$

で定義する．β として第2近似をとると左辺の $\Lambda=\Lambda_2$ となる．

b-クォークのしきい値を超えており，実験で決められる Λ は $n_f=5$ の値 ($\Lambda=\Lambda(5)$) であるので，データを見るときは注意する必要がある．$\Lambda(4)$ と $\Lambda(5)$ の関係は α_s が連続であるという条件

$$\alpha_s(m_b;n=4)=\alpha_s(m_b;n=5) \tag{5.51 a}$$

から求められる．α_s の表式としては対数第 2 近似の式 (5.45) を使えば

$$\Lambda_{\overline{MS}}(4)\fallingdotseq\Lambda_{\overline{MS}}(5)\left[\frac{m_b}{\Lambda_{\overline{MS}}(5)}\right]^{2/25}\left[2\ln\left(\frac{m_b}{\Lambda_{\overline{MS}}(5)}\right)\right]^{963/14375} \tag{5.51 b}$$

となる[3]．これは数値的には結構差が大きくて，$\Lambda_{\overline{MS}}(5)=200$ MeV のとき，$\Lambda_{\overline{MS}}(4)=289$ MeV となる．

$\Lambda_{\overline{MS}}$ もしくは $\alpha_s(Q^2)$ の実験的決定法については第 8 章で詳細に解説する．現在 PDG の引用している値は[3]

$$\Lambda_{\overline{MS}}(5)=219\pm25 \text{ MeV} \tag{5.52}$$

である．この値と誤差は (5.46) の α_s の値に対応する．

5.4 グルーオン放出

5.4.1 放 出 確 率

ここでは実際にグルーオンを放出する $e^+e^-\to q\bar{q}g$ 過程の断面積を求めてみよう．グルーオン放出の断面積はいろいろな意味で，QCD 現象の基本となる量である．理由の第 1 は $R(e^+e^-\to$ ハドロン$)$ の QCD 補正を調べるために，第 2 は 3 ジェット生成断面積算出のための実用的な見地から，第 3 には QCD に繰り返し現れる赤外発散の特徴を理解するよい機会を与え，そして第 4 には後の破砕関数 (fragmentation function) の発展方程式およびジェット生成シミュレーションの基礎となる式を与えるからでもある．$e^+e^-\to q\bar{q}g$ 過程は図 5.7(a), (b) に与えられるグラフで示される．これは e^+e^- 衝突により生成された質量 $Q^2(>0)$ の仮想フォトンが $q\bar{q}g$ に崩壊する過程であるが，仮想フォトン (運動量 q) のコンプトン散乱で，終状態のフォトンをグルーオンで置き換え，入射電子を交叉 ($p_1\to-p_1$) させたものと見ることもできる (図 5.7 (c), (d)；終状態がグルーオンなので，以下区別するために QCD コンプトンと呼ぶことにする)．この見方を正当化する理由は次の通りである．

$e(k_1)+\bar{e}(k_2)\to\bar{q}(p_1)q(p_2)g(p_3)$ の遷移行列要素は，質量をすべて 0 とおく近似で，

$$\begin{aligned}&\mathcal{M}(e\bar{e}\to q\bar{q}g)\\&=\left[\frac{e\bar{v}(k_2)\gamma_\mu u(k_1)}{Q^2}\right]\times\lambda_q eg\varepsilon_{A\nu}{}^*\left[\bar{u}_a(p_2)t_A\gamma^\nu\frac{\not{p}_2+\not{p}_3}{2(p_2p_3)}\gamma^\mu v_b(p_1)\right.\\&\qquad\left.-\bar{u}_a(p_2)\gamma^\mu\frac{\not{p}_1+\not{p}_3}{2(p_1p_3)}\gamma^\nu t_A v_b(p_1)\right]\end{aligned}\tag{5.53}$$

ここに，λ_q はクォークの電荷，g は QCD 結合定数，t_A は QCD 生成子行列，$\varepsilon_{A\nu}$ はカラー A をもつグルーオンの偏極ベクトル，$\bar{u}_a(p)$ の a はスピンのほかにカラー a を含むものとする．第 2 項の符号が負であるのは，反クォークは負のカラー荷をもつからである．電子部分を分離し自乗してトレース計算すると

$$\begin{aligned}&|\overline{\mathcal{M}}(e\bar{e}\to q\bar{q}g)|^2=\left[\frac{e^2}{4Q^4}K_{\mu\nu}(k_1,k_2)\right]Q^{\mu\nu}(p_1,p_2,p_3)\\&K_{\mu\nu}(k_1,k_2)=4\{k_{1\mu}k_{2\nu}+k_{1\nu}k_{2\mu}-(k_1k_2)g_{\mu\nu}\}\end{aligned}\tag{5.54}$$

$Q^{\mu\nu}$ は $q\bar{q}g$ 部分から得られる量である．電子部分は $[\cdots]$ の中に入っている．$K_{\mu\nu}$ の含む情報は，$Q^2=q^2=(k_1+k_2)^2$ と $\boldsymbol{q}$ の方向である．$\boldsymbol{q}=\boldsymbol{p}_1+\boldsymbol{p}_2+\boldsymbol{p}_3$ であるから，終状態3粒子のつくる平面の向きは見ないことにして積分してしまえば，ローレンツ不変性より電子部分の寄与は，$K_{\mu\nu}(k_1,k_2)\sim Q^2g_{\mu\nu}$ でなければならない．すなわちはじめの括弧の中をフォトンの偏極ベクトルで置き換えて偏極和をとった場合 ($\sum\varepsilon_\mu(\lambda)\varepsilon_\nu(\lambda)=-g_{\mu\nu}$) に等しいので，電子対衝突による $q\bar{q}g$ 生成を，仮想フォトンの $q\bar{q}g$ 崩壊とみなしてよいことが正当化される．

そこで諸々の運動変数を図 5.7 に図示したように定義すると，QED コンプトン散乱振幅の変数 s, t, u と γ^* 崩壊の変数と以下のような対応がつけられる．

$$\begin{aligned}&s=(k+p)^2\to(q-p_1)^2=(p_2+p_3)^2\equiv t\\&u=(k-p')^2\to(q-p_2)^2=(p_1+p_3)^2\equiv s\\&t=(k-k')^2\to(q-p_3)^2=(p_1+p_2)^2\equiv u\end{aligned}\tag{5.55}$$

QED コンプトン散乱のスピン平均をとった行列要素の自乗 (式付録 (C.27))

$$|\overline{\mathcal{M}}|^2[\gamma^*(k)+q(p)\to\gamma(k')+q(p')]=2e^4\left(-\frac{u}{s}-\frac{s}{u}-\frac{2k^2t}{su}\right)\tag{5.56}$$

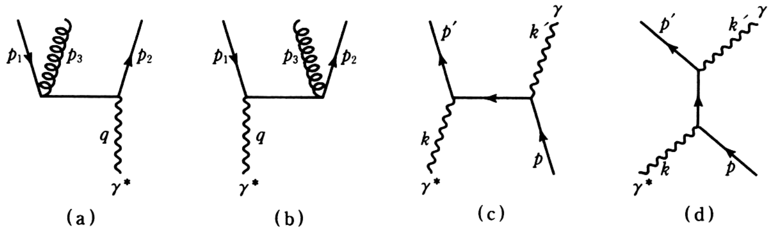


図 5.7

(a), (b) $\gamma^* \to q\bar{q}g$ のファインマン図, (c), (d) $\gamma^* e \to \gamma e$ コンプトン散乱
$e^+e^- \to q\bar{q}g$ は仮想フォトン γ^* の崩壊過程とみなせる.
(a), (b) は (c), (d) の入射電子をクォークとして交叉し, 終状態のフォトンをグルーオンで置き換えて得られる.

を交叉して (5.55) の変数で書き直し, 仮想フォトンの質量 $k^2=-Q^2 \to q^2=Q^2$ を入れ, カラー量子数などの因子を入れると

$$|\overline{\mathcal{M}}|^2[\gamma^*(q) \to \bar{q}(p_1)+q(p_2)+g(p_3)]=32\lambda_q{}^2e^2g^2\left(\frac{t}{s}+\frac{s}{t}+\frac{2Q^2u}{st}\right) \tag{5.57}$$

が得られる. λ_q は e を単位としたクォークの電荷である. ここに QED コンプトンの因子 2 に対して, QCD コンプトンの交叉で 16 倍の 32 という因子のでる理由は次の通りである.

$$16=2\times2\times8\times(1/2)$$

- $(1/2)$ ⟶ e^2(QED)⟷$g^2/2$(QCD)
- 8 ⟶ グルーオンのカラー自由度
- 2 ⟶ 始状態クォークスピン平均なし
- 2 ⟶ 始状態フォトン偏極平均なし

3 体系の場合, 次のような重心系で無次元のエネルギー変数を定義すると便利なことが多い.

$$x_i \equiv 2E_i/Q \tag{5.58}$$

崩壊粒子の質量を無視すれば

$$\left.\begin{aligned} s&=(p_1+p_3)^2=2p_1\cdot p_3=Q^2(1-x_2)\\ t&=(p_2+p_3)^2=2p_2\cdot p_3=Q^2(1-x_1)\\ u&=(p_1+p_2)^2=2p_1\cdot p_2=Q^2(1-x_3)\end{aligned}\right\} \tag{5.59}$$

この変数を使って (5.57) を書き直すと

$$|\overline{\mathcal{M}}|^2=32\lambda_q{}^2e^2g^2\left[\frac{1-x_2}{1-x_1}+\frac{1-x_1}{1-x_2}+\frac{2(1-x_3)}{(1-x_1)(1-x_2)}\right]$$

$$=32\lambda_q{}^2e^2g^2\frac{x_1{}^2+x_2{}^2}{(1-x_1)(1-x_2)} \tag{5.60}$$

と書き直せる．仮想 γ の $q\bar{q}g$ への崩壊率 $\mathrm{d}\Gamma$ は，次式を計算すればよい．

$$\mathrm{d}\Gamma=\frac{1}{2Q}|\overline{\mathcal{M}}|^2\mathrm{d}LIPS \tag{5.61}$$

$$\mathrm{d}LIPS=\frac{(2\pi)^4\delta^4(q-p_1-p_2-p_3)}{(2\pi)^9}\frac{\mathrm{d}^3p_1\mathrm{d}^3p_2\mathrm{d}^3p_3}{2E_12E_22E_3}$$

演習 5.2　x_1x_2 以外について積分すると

$$\mathrm{d}LIPS=\frac{Q^2}{128\pi^3}\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2 \tag{5.62}$$

であることを示せ．

演習 5.3　エネルギー保存則より

$$x_1+x_2+x_3=2,\qquad s+t+u=Q^2 \tag{5.63}$$

であることを示せ．

x_1, x_2, x_3 のとりうる領域の境界は，

$$stu=0\quad \text{または}\quad (1-x_1)(1-x_2)(1-x_3)=0 \tag{5.64}$$

であることを示せ．

演習 5.4　$\gamma^*\to q\bar{q}$ の全崩壊確率 $\Gamma(\gamma^*\to q\bar{q})$ は，$\Gamma=3\lambda_q{}^2\alpha Q$ で与えられることを示せ．λ_q はクォークの電荷である．

上記の演習結果を使うと，グルーオンの放出確率として

$$\frac{1}{\Gamma}\frac{\mathrm{d}\Gamma}{\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2}=\frac{2\alpha_s}{3\pi}\left[\frac{x_1{}^2+x_2{}^2}{(1-x_1)(1-x_2)}\right] \tag{5.65}$$

が得られる．(5.64) より x_1, x_2 のとりうる範囲は

$$0\leqq x_1\leqq 1,\qquad 1-x_1\leqq x_2\leqq 1 \tag{5.66}$$

である（図 5.8)．これから $e^+e^-\to q\bar{q}g$ 過程のグルーオン放出全断面積は

$$\sigma_g=\sigma_0\frac{2\alpha_s}{3\pi}\int_0^1\mathrm{d}x_1\int_{1-x_1}^1\mathrm{d}x_2\left[\frac{x_1{}^2+x_2{}^2}{(1-x_1)(1-x_2)}\right] \tag{5.67 a}$$

$$\sigma_0=\frac{4\pi\alpha^2}{3s}\sum N_c\lambda_q{}^2 \tag{5.67 b}$$

となる．ここに σ_0 は，e^+e^- の全ハドロン生成断面積 $\sigma_{\mathrm{TOT}}(e^+e^-\to q\bar{q})$ の最

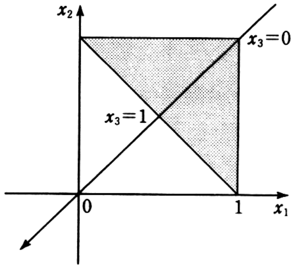


図 5.8 x_1, x_2, x_3 の許容範囲

低次の値である.

5.4.2 赤 外 発 散

この積分は $x_1=1$, $x_2=1$ で発散する. クォークの質量を無視しなければ

$$Q^2(1-x_1)=t-m_q{}^2=(p_2+p_3)^2-m_q{}^2=2E_3(E_2-p_2\cos\theta)$$

であるので, これが 0 になり発散する条件は二つある.

(1) ソフトグルーオン放出 : $E_3\to 0$

(2) 平行 (collinear) グルーオン放出 : $m_q=0$, かつ $\theta\to 0$

で (1) は赤外発散, (2) は質量特異性とも呼ばれる. どちらも $m_g\neq 0$ ならば生じることのない発散である. (1) の発散は QED において出現した赤外発散と同じ性質のものである. QED では $m_e\neq 0$ であるので (2) の困難は生じない. QCD でも厳密にいえば $m_q\neq 0$ であるが, 通常は $m_q=0$ として取り扱うので, 質量特異性による発散が生じるのである. この二つの条件は QCD 過程で繰り返し生じる. 以下, 混乱する恐れのないときは両者をまとめて赤外発散と呼ぶことにする. QCD の赤外発散も, QED の赤外発散と同じに, すべての物理過程を正しく取り入れて評価すれば消える発散であり, その起源も物理的に解釈可能なものである. 発散が生じる場合, 積分を切断するとか, 伝播関数を正則化するとかいろいろな手段があるが, 最もすっきりした方法は次元正則化の方法で, ローレンツ共変性とゲージ不変性を壊さずに正則化できる利点がある. ここでは話を簡単のためにグルーオンに小さな質量 m_g をもたせておいて発散を避けることにする. 積分を実行すると[1],

$$\sigma_g = \frac{2\alpha_s}{3\pi}\sigma_0\left[\ln^2(Q_g) + 3\ln(Q_g) - \frac{\pi^2}{3} + 5\right] \tag{5.68 a}$$

$$Q_g = m_g{}^2/Q^2$$

σ_g は α_s の 1 次の量であるが，ソフトグルーオンの極限では $e^+e^- \to q\bar{q}$（図 5.9(a)）や，高次過程である仮想グルーオンを交換する過程（図 5.9(b)）と物理的には区別がつけられない．仮想グルーオンを交換する過程は $O(\alpha_s{}^2)$ であるが，グルーオンを含まない過程図 5.9 (a) との干渉で $O(\alpha_s)$ 項を発生する．この項（σ_v）を計算してみると

$$\sigma_v = \frac{2\alpha_s}{3\pi}\sigma_0\left[-\ln^2(Q_g) - 3\ln(Q_g) + \frac{\pi^2}{3} - \frac{7}{2}\right] \tag{5.68 b}$$

となり，両者を合わせると

$$\sigma_g + \sigma_v = \sigma_0\frac{\alpha_s}{\pi} \tag{5.68 c}$$

すなわち，$\sigma_{\mathrm{TOT}}(e^+e^- \to$ ハドロン）は

$$\sigma = \sigma_0\left(1 + \frac{\alpha_s}{\pi}\right) \tag{5.69}$$

で与えられる．この式は赤外発散を含まない．

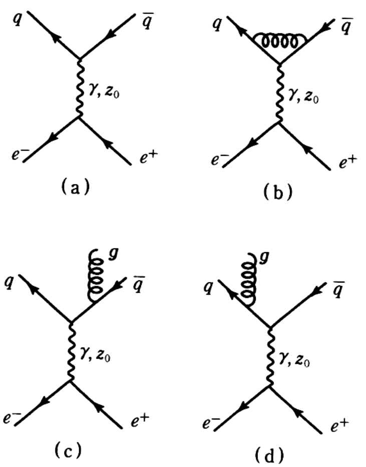


図 5.9　$e^+e^- \to qq,\ q\bar{q}g$ のファインマン図
(a) は QCD の 0 次，(b) は QCD の 2 次．
(c)，(d) は QCD の 1 次の効果である．
(a) と (b) の干渉は (c)，(d) と同次の効果である．

5.4.3　対数第1近似

(5.65) は，$(1-x_1)$, $(1-x_2)$ が極端に小さくない限り，グルーオン放出確率と解釈できる量である．1個のグルーオン放出を扱う限りこれは正確な式であるが，QCDに特有なジェット現象すなわち多数のグルーオンを放出する場合へ応用するには少々不便であるので，次のような変数 z (光円錐変数) を定義する．

$$zQ \equiv E_2 + p_{2/\!/} = E_2(1+\cos\theta) \tag{5.70 a}$$

$$(1-z)Q = E_3 + p_{3/\!/} \tag{5.70 b}$$

$$\hat{t} \equiv t/Q^2 = 1 - x_1 \tag{5.70 c}$$

この z や $\hat{t}$ と他の運動学変数との関係は次のようになる．

$$z = 1-(1-x_2)/x_1 = (1-x_3)/x_1 \tag{5.70 d}$$

$$p_T = p_2 \sin\theta \tag{5.70 e}$$

$$x_T{}^2 \equiv 4p_T{}^2/Q^2 = 4z(1-z)\hat{t} = \frac{4(1-x_1)(1-x_2)(1-x_3)}{x_1{}^2} \tag{5.70 f}$$

$$\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{(1-x_1)(1-x_2)}{x_1x_2} \tag{5.70 g}$$

光円錐変数を使って式 (5.65) を書き換えると，

$$\frac{1}{\sigma_0}\frac{\mathrm{d}^2\sigma}{\mathrm{d}\hat{t}\mathrm{d}z} = \frac{x_1}{\sigma_0}\frac{\mathrm{d}^2\sigma}{\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2} = \frac{2\alpha_s}{3\pi\hat{t}}\left[\frac{1+z^2}{(1-z)} - \hat{t}\frac{2\{1-z(1-z)\}}{1-z} + \hat{t}^2\frac{\{1+(1-z)^2\}}{1-z}\right] \tag{5.71}$$

$\hat{t}$ の小さいところすなわち $p_T{}^2 \ll Q^2$ のところでは第1項が優勢であるので，グルーオン放出確率は近似的に

$$\frac{1}{\sigma_0}\frac{\mathrm{d}^2\sigma}{\mathrm{d}\hat{t}\mathrm{d}z} \fallingdotseq \frac{1}{\hat{t}}\frac{\alpha_s}{2\pi}P_{qq}(z) \tag{5.72 a}$$

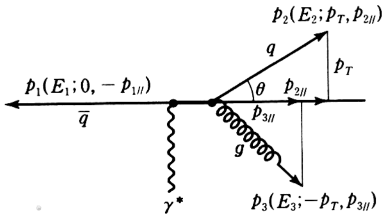


図 5.10　$e^+e^- \to q\bar{q}g$ 重心系での運動学変数 (光円錐変数の導入)

$$P_{qq}(z)=\frac{4}{3}\frac{1+z^2}{(1-z)} \tag{5.72 b}$$

と書き表せる．これをグルーオン放出過程の対数第1近似 (LLA) という．結合定数 α_s の計算のときと同じ LLA という言葉を使うが，意味合いが若干異なる．$\hat{t}\sim 0$ の領域は $x_1\fallingdotseq 1$, $E_i+p_{i/\!/}\fallingdotseq 2E_i$ のところでもあるので，(5.72) は，運動量 p をもつ仮想クォーク (不変質量 t をもつ) が，縦運動量 zp のクォークと縦運動量 $(1-z)p$, 横運動量 p_T のグルーオンに崩壊する確率と見なせる．

これは§3.5で導いた“電子が質量 Q^2, 運動量 y をもつ仮想フォトンを放出する確率”の式 (3.57) とよく似ている．実際 $\mathrm{d}\hat{t}/\hat{t}=\mathrm{d}p_T{}^2/p_T{}^2 \leftrightarrow \mathrm{d}\ln Q^2$, $z\leftrightarrow 1-y$, $\alpha_s \leftrightarrow \alpha$ と置き換え，係数4/3はカラー因子 (グルーオンの自由度8) ×(クォークカラー自由度の平均1/3)×($\alpha\to\alpha_s/2$) として説明できることを考慮すると両者は完全に一致する．

この P_{qq} はクォークの分割関数 (splitting function) と呼ばれる．クォークがグルーオンを放出するところには必ず現れる普遍関数である．P_{qq} 関数はクォークがグルーオンを放出する確率と見なしてもよいし，運動量1のクォークというビームが準備されたときの運動量 z のクォークのフラックスを与えると解釈することもできる．関数の形は繰り込み処方によらない．この式が (5.65) に比べて有用なのは $\hat{t}$ と z との変数分離ができていてカスケード的グルーオン発生の式が容易につくれるからである．(5.72) を使ってシャワーを発展させる方法を求めることはむずかしくないが，詳細は第8章のジェット現象のところで述べることとする．

このように中間の仮想状態をあたかも実の粒子のように考えて，粒子 $A\to B+C$ の分岐過程の確率を計算しておくと便利なことが多い．歴史的にはすでに1934年にワイゼッカー-ウィリアムスが，電子散乱反応を電子が放出する仮想フォトンの反応で置き換え電子の提供するフォトンフラックスを計算している (付録式 (C.38) を参照)．分割関数を一般的に求める方法は付録C.6に与えてある．

5.4.4 横運動量分布

$e^+e^- \to$ハドロン反応の主な寄与は $q\bar{q}$ による2ジェット発生であるが，これは互いに180度方向に放出され，相対的に横運動量をもたない．横運動量はグルーオンを放出することにより得られ，その振る舞いは(5.72)を横運動量の関数として書き換えれば得られる．いま，任意の横運動量 $k_T{}^2 \leqq p_T{}^2$ をもつグルーオンを1個放出する確率を $S(p_T{}^2)$ とすると，$k_T{}^2 = p_T{}^2$ をもつグルーオンの発生確率は $(\mathrm{d}S/\mathrm{d}p_T{}^2)\mathrm{d}p_T{}^2$ で与えられる．$S(p_T{}^2)$ を求めるには，

$$\frac{k_T{}^2}{Q^2} = z(1-z)\hat{t} \leqq \frac{p_T{}^2}{Q^2}, \qquad 0 \leqq z, \hat{t} \leqq 1 \tag{5.73}$$

という条件で，(5.72 a)を積分すれば得られる．積分の優勢な寄与は明らかに，$\hat{t} \fallingdotseq 0$, $1-z \fallingdotseq 0$ の付近からくるが，この積分は赤外発散を伴う．そこで，$S(p_T{}^2)$ の代わりに，$k_T{}^2 \geqq p_T{}^2$ の任意の運動量をもつグルーオン放出の確率 $T(p_T{}^2)$ を計算することにすれば発散は避けられる．本来，$S(p_T{}^2)$ は有限のはずであり，その場合 $S(p_T{}^2)$ と $T(p_T{}^2)$ は

$$S(p_T{}^2) + T(p_T{}^2) = 1$$

を満たさなければならない．

$$T(p_T{}^2) = \int \frac{1}{\sigma_0} \frac{\mathrm{d}^2\sigma}{\mathrm{d}\hat{t}\mathrm{d}z} \mathrm{d}\hat{t}\mathrm{d}z = \frac{2\alpha_s}{3\pi} \int \frac{1+z^2}{\hat{t}(1-z)} \mathrm{d}\hat{t}\mathrm{d}z$$

$$\fallingdotseq \frac{2\alpha_s}{3\pi} \int_{p_T{}^2/Q^2}^1 \left(\frac{\mathrm{d}\hat{t}}{\hat{t}}\right) \int_{(p_T{}^2/Q^2)/\hat{t}}^1 \left(\frac{2\mathrm{d}\bar{z}}{\bar{z}}\right) = \frac{2\alpha_s}{3\pi} \ln^2\left(\frac{p_T{}^2}{Q^2}\right) \tag{5.74 a}$$

ただし，$\bar{z} = 1-z$ である．被積分関数の分子では $z \fallingdotseq 1$ とし，積分範囲は $\hat{t}\bar{z} \geqq p_T{}^2/Q^2$ とする近似を使った．これから

$$S(p_T{}^2) = 1 - \frac{2\alpha_s}{3\pi} \ln^2\left(\frac{p_T{}^2}{Q^2}\right) \tag{5.74 b}$$

が得られ，微分することによって

$$\frac{1}{\sigma_0} \frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}p_T{}^2} = \frac{4\alpha_s}{3\pi} \frac{\ln(Q^2/p_T{}^2)}{p_T{}^2} \tag{5.75}$$

を得る．

横運動量分布はグルーオン放出により生じるものであり，この関数型はLLA近似をとる限りはグルーオン放出のあるところ，あらゆるところに現れ

る普遍関数であるから．上記横運動量の振る舞いもまた，QCD 過程ではあらゆるところに出てくる普遍なものである．

5.5 発展方程式

5.5.1 パートンフラックス

パートンモデルは深非弾性散乱のデータをよく再現する．このときパートンの運動量分布関数は定性的には図 5.11 (d) のような振る舞いをする．これはほぼ Q^2 によらない x のみの関数であった (Bjorken scaling)．パートンモデルの基本仮定は，“レプトンと核子の散乱は，レプトンと個々のパートンの散乱の和として書ける”つまりインパルス近似が成立するということであり，その前提はパートンが核子の中で自由に動いていることつまりパートン同士の相互作用はないということであった．この仮定は QCD の漸近自由の発見により標準理論においても正当化される．しかし，QCD の観点に立つとパートンモデルは QCD 摂動展開の第 0 近似であり，パートン同士がグルーオンなどを交換して相互作用をする QCD 摂動の高次効果を無視したものであることは明白である．もし QCD 効果を完全に無視すればパートンは核子内でほぼ一定の運動量 (核子全体の運動量の約 1/3，つまり $q(x)=\delta(x-1/3)$) をもつはずである (図 5.11 (b))．そうでなくて図 5.11 (d) のようになっているのはまさに QCD 効果のグルーオン交換によってクォークの運動量が 1/3 を中心にぼけているのだと考えられる．この分布は核子の量子数を担う価クォークの寄与が大きい．しかし，このグルーオン交換の効果は緩慢な動作であり，レプトンクォーク散乱の動的過程に比べ非常に長い時間で起きるため，近似的に分布関数を与えられた静的性質のもので置き換えるインパルス近似が成立したのである．この分布関数は，多数のグルーオン交換の結果として得られるものであるから，算出には非摂動的計算を必要とする．Q^2 は標的に与える衝撃の強さ，時空の変数でいえば探索する領域のプローブとしての分解能力を与えるパラメターである．Q^2 を大きくしていけば，つまりよりミクロの領域に入り込むと，クォークがグルーオンを交換したり，グルーオンがクォーク対 (海クォーク) をつくるような効果 (図 5.11 (e)) が見えてくるはずである．グ

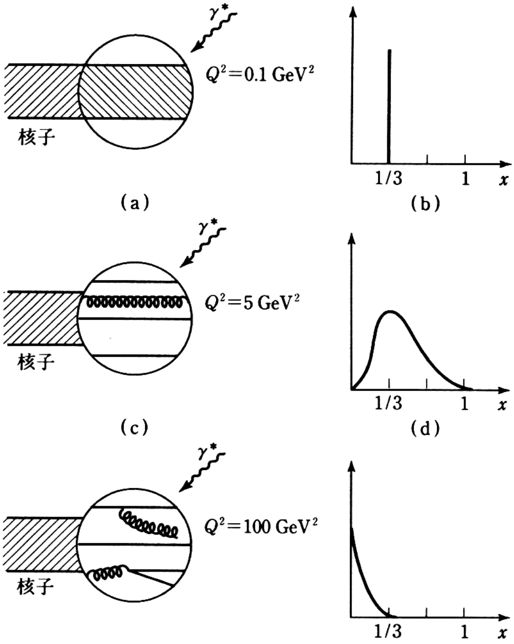


図 5.11 核子を仮想フォトンという拡大鏡でのぞいたときのパートンの運動量分布
(a) $Q^2=0.1$ GeV では核子はパートンに分解して見えない；運動量 $x=1$, (c) $Q^2=5$ GeV；核子は 3 個のクォークに分離して見える．自由パートンであれば，$x=1/3$ であるが (b)，クォークはグルーオンを交換して束縛状態にあるので $\langle x\rangle \fallingdotseq 1/3$ となる (d)．しかしグルーオン交換は緩慢な作用であるので各パートンは独立していると見てよい．(e) $Q^2=100$ GeV になるとクォークがグルーオンを放出したり，グルーオンがクォーク対をつくるのが見える．これらは $x \fallingdotseq 0$ の小さい運動量をもつ．

ルーオンは質量 0 の量子であるから，その放出確率は制動放射と同じく $\mathrm{d}x/x$ に比例するはずである．つまり x の小さいところでの分布が優勢になるであろう (図 5.11 (f))．Q^2 が十分大きければエネルギーの大きなグルーオン放出を伴いジェット現象にその影響が見えるであろう．つまり Q^2 を大きくすれば QCD 効果が見えてきて，ブヨルケンのスケーリングが破れクォークの分布関数が Q^2 依存性を示すはずである．この Q^2 依存性を調べることによって，

クォークとグルーオンの相互作用を支配する力学 QCD の性質がテストできる．

深非弾性散乱は，分布関数を与えられたものとして扱えば，最低次の近似では電弱相互作用効果であり，核子内のパートンが質量 Q^2 をもつ仮想フォトンを吸って散乱される過程である (図 5.12 (a))．QCD 過程 (図 5.12 (b)~(e)) は，この過程への補正として効く．以下では，この過程の深非弾性散乱の断面積に与える影響を計算することによって，パートン分布関数の QCD 補正を考察する．

深非弾性散乱を仮想フォトンの起こす反応と見なす立場をとれば，QCD 補正効果は仮想フォトンとクォークが相互作用してグルーオンを放出するコンプトン効果の 1 種であり，フォトンによる反応断面積と，構造関数は (3.54) で結びついている．

$$\sigma_T=\frac{1}{2}\frac{4\pi^2\alpha}{K}\sum_{\lambda=\pm}\varepsilon_\mu(\lambda)\varepsilon_\nu(\lambda)^* W^{\mu\nu}(Q^2,\nu)=\frac{4\pi^2\alpha}{K}W_1 \tag{5.76 a}$$

$$\sigma_L=\frac{4\pi^2\alpha}{K}\varepsilon_\mu(0)\varepsilon_\nu(0)^* W^{\mu\nu}(Q^2,\nu)=\frac{4\pi^2\alpha}{K}W_L \tag{5.76 b}$$

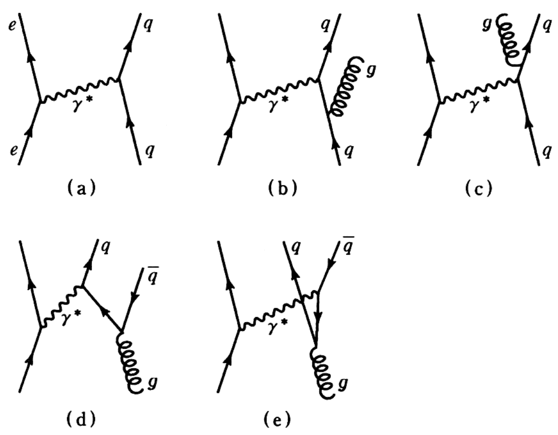


図 5.12　深非弾性散乱のファインマン図
(a)　$eq\to eq$：仮想フォトンがクォークに吸われる．
(b)~(e)　QCD 過程
(b), (c)　$\gamma^* q\to qg$　　QCD コンプトン散乱
(d), (e)　$\gamma^* g\to q\bar{q}$　　フォトン・グルーオン融合過程

$$W_L=[(1+\nu^2/Q^2)W_2-W_1] \tag{5.76 c}$$

また，(5.76 a) で，全偏極和 $\sum_{\lambda=\text{all}}(-1)^{\lambda+1}\varepsilon_\mu(\lambda)\varepsilon_\nu(\lambda)^*=-g_{\mu\nu}$ (付録 (B.30 c) 参照) で置き換えた断面積を $\sigma_\gamma{}^*$ とおくと，

$$\sigma_\gamma{}^*=-\frac{1}{2}\frac{4\pi^2\alpha}{K}g_{\mu\nu}W^{\mu\nu}(Q^2,\nu)=\sigma_T-\sigma_L/2 \tag{5.76 d}$$

スケーリング極限で，

$$MW_1(Q^2,\nu)\longrightarrow F_1(x) \tag{5.77 a}$$

$$\nu W_2(Q^2,\nu)\longrightarrow F_2(x) \tag{5.77 b}$$

$$MW_L(Q^2,\nu)\longrightarrow F_L(x)=(1/2x)(F_2-2xF_1) \tag{5.77 c}$$

であるから，

$$F_1=\frac{\sigma_T}{2\sigma_B} \tag{5.78 a}$$

$$F_L=\frac{\sigma_L}{2\sigma_B} \tag{5.78 b}$$

$$\frac{F_2}{x}=\frac{\sigma_T+\sigma_L}{\sigma_B} \tag{5.78 c}$$

を得る．σ_B は，ボルン近似での仮想フォトンによる全断面積である．

$$\sigma_B=\frac{4\pi^2\alpha}{2KM} \tag{5.79}$$

パートンモデルでは，クォーク分布関数 $q(x)$ と電子深非弾性散乱の構造関数は，式 (3.50) によって結びついている．すなわち，

$$F_2(x)=x\sum\lambda_i{}^2q_i(x) \tag{5.80 a}$$

$$F_1(x)=\frac{1}{2}\sum\lambda_i{}^2q_i(x) \tag{5.80 b}$$

ここに λ_i はクォークの電荷である．パートンモデルの段階では $\sigma_L=0$ であり，クォーク分布関数として，$2F_1=\sigma_T/\sigma_B$，$F_2/x=(\sigma_T+\sigma_L)/\sigma_B$ あるいは $\sigma_\gamma{}^*/\sigma_B$ のどれを使っても差はない．高次の補正項を取り入れれば三者は異なるが，計算をしてみると，対数第 1 次近似では $O(\alpha_s)$ 補正を入れても差はでないので，以下の議論は取扱いの簡単な $\sigma_\gamma{}^*/\sigma_B$ に限る．

演習 5.5 仮想フォトンがスピン 1/2，質量 0 のパートンに吸われる過程（ボルン項）では，

$$\sigma_T=\sigma_0x\delta(x-1),\qquad \sigma_L=0 \tag{5.81 a}$$

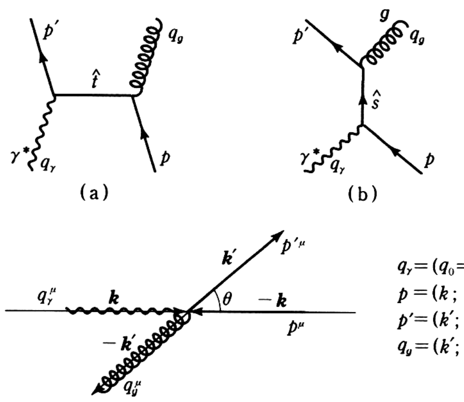
$$x=-q_\gamma^2/2(p\cdot q_\gamma),$$
$$\sigma_0=4\pi^2\lambda_q^2\alpha/[2\{(p\cdot q_\gamma)^2-p^2q_\gamma^2\}^{1/2}]=4\pi^2\lambda_q^2\alpha/(\hat{s}+Q^2) \tag{5.81 b}$$
ただし，$\hat{s}=(p+q_\gamma)^2,\quad Q^2=-q_\gamma^2$ (5.81)

であることを示せ．ただし，q_γ, p は仮想フォトンとパートンの4元運動量であり，λ_q は陽子電荷を単位としたパートンの相対電荷である．

ヒント：(3.44) を使え．

QCD効果のうち図5.12 (b)，(c) の効果は，仮想フォトンによるコンプトン散乱 ($\gamma^*+q\to q+g$) であるので，運動変数を図5.13[*5] のように定義する．k, k' は仮想フォトンと1次パートンの重心系での散乱前後の運動量，θ は散乱角，Q は仮想フォトンの質量である．$\hat{s}, \hat{t}, \hat{u}$ のようにハットをつけたのは，パートンの変数を意味する．

$$\hat{s}=(q_\gamma+p)^2=(q_g+p')^2=-Q^2+2(q_\gamma\cdot p)=4k'^2 \tag{5.82 a}$$
$$\hat{t}=(q_\gamma-p')^2=-2(q_g\cdot p)=-2kk'(1-\cos\theta) \tag{5.82 b}$$
$$\hat{u}=(q_\gamma-q_g)^2=-2(p\cdot p')=-2kk'(1+\cos\theta) \tag{5.82 c}$$
$$\hat{s}+\hat{t}+\hat{u}+Q^2=0 \tag{5.82 d}$$



$q_\gamma=(q_0=\sqrt{k^2-Q^2};\ 0, k)$
$p=(k;\ 0, -k)$
$p'=(k';\ k'\sin\theta, k'\cos\theta)$
$q_g=(k';\ -k'\sin\theta, -k'\cos\theta)$

図5.13 QCDコンプトン散乱の運動学変数
γ^* は仮想フォトンであり，質量殻上にない．

[*5] 図5.13 (a)，(b) は図5.7 (c)，(d) と似ているが，図5.13では仮想フォトンは空間的，すなわち $q_\gamma^2=-Q^2<0$ であり，図5.7では時間的 ($q_\gamma^2=Q^2>0$) であることに注意．

$$p_T{}^2 \equiv (k' \sin\theta)^2 = \frac{\hat{s}\hat{t}\hat{u}}{(\hat{s}+Q^2)^2} \tag{5.82 e}$$

パートンの核子中における相対運動量 z は

$$z \equiv \frac{Q^2}{2q_\gamma \cdot p} = \frac{Q^2}{\hat{s}+Q^2} \tag{5.83}$$

で与えられる．z がこう書ける理由は，陽子標的（運動量 P）から運動量 xP のパートンを拾うには，$x = Q^2/2M\nu = Q^2/2(q_\gamma \cdot P)$（式 (3.47) 参照）としたことを思い起こそう．

各変数の間には，次のような関係が存在する．

$$k^2 = \frac{(\hat{s}+Q^2)^2}{4\hat{s}}, \qquad kk' = \frac{Q^2}{4z} \tag{5.84 a}$$

$$\hat{t}_{\max} = -Q^2/z, \qquad \hat{t}_{\min} = 0 \tag{5.84 b}$$

$$\max(p_T{}^2) = \frac{\hat{s}}{4} = Q^2\frac{1-z}{4z} \tag{5.84 c}$$

図 5.13 のコンプトン散乱の行列要素を，上記変数を用いて計算すれば，

$$\overline{\Sigma}|\mathcal{M}(\gamma^* q \to qg)|^2 = 2e^2\lambda_q{}^2 g_s{}^2 \frac{4}{3}\left[-\frac{\hat{t}}{\hat{s}} - \frac{\hat{s}}{\hat{t}} + \frac{2Q^2\hat{u}}{\hat{s}\hat{t}}\right] \tag{5.85}$$

を得る．この式は，(5.56) のコンプトン散乱式から，ファインマン図を交叉した後，$e^4 \to e^2(g_s{}^2/2)$ とし，グルーオンの自由度の 8 を掛け，カラーの自由度 3 で平均をとれば得られる．これより微分断面積は

$$\frac{1}{\sigma_0}\frac{d\sigma}{d\hat{t}}(\gamma^* q \to qg) = \frac{\alpha_s}{2\pi\hat{t}}\frac{4}{3}\left[\frac{1+z^2}{1-z} + \left(\frac{\hat{t}}{Q^2}\right)\frac{2z^2}{1-z} + \left(\frac{\hat{t}}{Q^2}\right)^2\frac{z^2}{1-z}\right] \tag{5.86 a}$$

$$\sigma_0 = \frac{4\pi^2\alpha\lambda_q{}^2}{\hat{s}+Q^2} = \frac{4\pi^2\alpha\lambda_q{}^2 z}{Q^2} \tag{5.86 b}$$

深非弾性散乱でグルーオンを 1 個放出する確率の第 1 項は，$e^+e^- \to q\bar{q}$ の終状態でグルーオン 1 個を放出する確率の式 (5.71) の第 1 項とまったく同じ形をしていることに注意しよう．$\hat{t}$ について積分すれば，

$$\frac{\sigma^q}{\sigma_0} = \frac{\alpha_s}{2\pi}\frac{4}{3}\frac{1+z^2}{1-z}\ln\left(\frac{Q^2}{m_g{}^2}\right) + \cdots = \frac{\alpha_s}{2\pi}P_{qq}(z)\ln\left(\frac{Q^2}{m_g{}^2}\right) + \cdots \tag{5.87 a}$$

$$P_{qq}(z) = \frac{4}{3}\frac{1+z^2}{1-z} \tag{5.87 b}$$

$m_g{}^2$ は質量異常発散を避けるために当面導入したグルーオンの質量である．以

下は，第2項以下を落とし優勢な対数項のみを残す対数第1近似で話を進める．この式は，グルーオンの質量を含むので，直接観測に掛かる物理量とは見なせない．直接観測に掛かる核子非弾性散乱の断面積を，パートン反応の式で書き表す必要がある．クォークが核子の中で最初に運動量 y をもっていたとすると，グルーオンは観測しないのだから，y, z については足し上げてやる必要がある．クォークが直接フォトンを吸収するボルン項を含めて書き下ろすと，(5.80) を参照して

$$\left.\frac{\sigma_T}{\sigma_B}\right|_{\gamma^* N}=\sum_i \lambda_i^2 \int \mathrm{d}y\mathrm{d}z\,\tilde{q}_i(y)\delta(x-yz)\left.\frac{\sigma_T(z, Q^2)}{\sigma_0}\right|_{\gamma^*\,\text{パートン}\,i}$$

$$=\sum_i \lambda_i^2 \int_0^1 \mathrm{d}y \int_0^1 \mathrm{d}z\,\tilde{q}_i(y)\delta(x-yz)\left[\delta(1-z)+\frac{\alpha_s}{2\pi}\frac{4}{3}\frac{1+z^2}{1-z}\ln\left(\frac{Q^2}{m_g{}^2}\right)\right]$$

$$=\sum_i \lambda_i^2 \int_0^1 \mathrm{d}y \int_0^1 \mathrm{d}z\,\tilde{q}_i(y)\delta(x-yz)\mathrm{d}P(z, Q^2) \tag{5.88}$$

と書ける．ここで，$\tilde{q}_i(z)$ は，核子の提供する i 番目のパートンの運動量分布関数である．

上式の物理的な意味は，観測にかかる核子中のパートンの運動量 x は，はじめに核子が提供した運動量 y のパートンが，コンプトン散乱などの途中経過をたどることによりさらに相対的に z だけ低下した $x=zy$ となるということである．この意味で，$\mathrm{d}P(z, Q^2)$ は，運動量1のパートンの中に運動量 z のパートンを見出す確率と解釈できる．(5.88) 右辺括弧内の第1項は，核子の提供するパートンがグルーオン放出などのQCD反応を経ずに直接仮想フォトンと反応する効果である．上記の式右辺括弧の中は，香りに関係なくすべてのクォーク（スピン1/2，質量0のパートン）に共通であるので，クォーク（および反クォーク）の分布関数を $q(x, Q^2)$ で代表させれば

$$q(x, Q^2)=\int_x^1 \frac{\mathrm{d}y}{y}\tilde{q}(y)\left[\delta\left(1-\frac{x}{y}\right)+\frac{\alpha_s}{2\pi}P_{qq}\left(\frac{x}{y}\right)\ln\left(\frac{Q^2}{m_g{}^2}\right)\right] \tag{5.89}$$

という方程式を得る．左辺は観測量であるから，右辺の中のグルーオン質量は見かけ上現れているのみで，計算を正しくすれば，実際には現れないはずである．すなわち，$\tilde{q}(y)$ の中には，仮想グルーオン交換によるグルーオン質量項が含まれていて，括弧内の第2項を相殺していると考えるべきである．また次元解析から $m_g{}^2$ に代る量が必要であるが，これは繰り込みに伴って現れるス

ケール量 μ^2 と考えられる.

積分を実行すると，QCD 効果を入れない第 1 近似では

$$q(x, Q^2)=q(x) \tag{5.90}$$

となり，パートンモデルを再現する．すでに述べたように $q(x)$ は QCD の非摂動効果を表す式であり，摂動論では計算できないが，上式を，ある $Q^2=Q_0{}^2$ で関数 $q(x)=q(x, Q_0{}^2)$ が与えられたときに，$Q^2=Q_0{}^2+\mathrm{d}Q^2$ での振る舞いを記述する式とみなすことができる．この場合，第 2 項が QCD 最低次の寄与による分布関数の補正 $\mathrm{d}q$ を与えるので，両辺を $\tau=\ln(Q^2/\mu^2)$ で微分すれば，

$$\frac{\mathrm{d}q(x, \tau)}{\mathrm{d}\tau}=\frac{\alpha_s(\tau)}{2\pi}\int_x^1\frac{\mathrm{d}y}{y}q(y, \tau)P_{qq}\left(\frac{x}{y}\right) \tag{5.91}$$

を得る．この式はパートンモデルの $q(x)$ を，QCD効果を取り入れた $q(x, \tau)$ でおき換えることによって得られるから，多重グルーオン放出効果を含んでいる．また，上式の α_s は，繰り込み群の議論に従って，$\alpha_s \to \alpha_s(Q^2)\equiv\alpha_s(\tau)$ としてある．この式が以下の議論の基本となる方程式であり，ある Q^2 の値で与えられた分布関数が，Q^2 が変わるにつれてどう変化するかを示す発展方程式である．

5.5.2 DGLAP の発展方程式

a. グルーオン分布関数

さて，ここまでは仮想フォトンのクォークとの散乱のみを考えたわけであるが，核子内にはグルーオンも存在するので，フォトンとグルーオンとが融合して，$q\bar{q}$ 対をつくる過程をも取り入れる必要がある (図 5.12 (d), (e))．図 5.12 (d), (e) に対応する行列要素は，QCD コンプトンの行列要素 (5.85) と同じように求められる．

$$\Sigma|\mathcal{M}(\gamma^* g \to q\overline{q}|^2=2e^2\lambda_q{}^2 g_s{}^2\frac{1}{2}\left[-\frac{\hat{u}}{\hat{t}}-\frac{\hat{t}}{\hat{u}}+\frac{2Q^2\hat{s}}{\hat{t}\hat{u}}\right] \tag{5.92}$$

この式は，(5.56) のコンプトン散乱式から，交叉と $e^4 \to e^2(g_s{}^2/2)$ の置き換え後，グルーオンの自由度の数 8 を掛け，グルーオンの自由度 8 で平均をとれば得られる．これより (5.87) に対応する微分断面積は

$$\frac{\sigma(\gamma^* g \to q\bar{q})}{\sigma_0}=\frac{\alpha_s}{2\pi}\{P_{qg}(z)+P_{\bar{q}g}(z)\}\ln\left(\frac{Q^2}{m_g{}^2}\right) \tag{5.93}$$

$$P_{qg}(z)=P_{\bar{q}g}(z)=\frac{1}{2}[z^2+(1-z)^2] \tag{5.94}$$

で与えられる．z は (5.83) で定義されている．質量異常による発散は，$\hat{t}\to 0$ と $\hat{u}\to 0$ の双方に存在するので，(5.92) は，おのおのの領域で優勢な二つの寄与に分けて，それぞれ $\hat{t}$ および $\hat{u}$ で積分する．$\hat{t}$ についての積分はグルーオンがクォークを放出する分割関数 P_{qg} を与え，$\hat{u}$ についての積分は反クォークを放出する分割関数 $P_{\bar{q}g}$を与える．

グルーオン分布を含む場合に (5.91) を拡張するのは容易である．核子内のグルーオン分布関数を $g(x,\tau)$ とし，仮想フォトンの見るクォークは，元の核子の提供するクォークおよびグルーオンよって供給される 2 次的なクォークの和であるという式を書けば，

$$\frac{\mathrm{d}q(x,\tau)}{\mathrm{d}\tau}=\frac{\alpha_s(\tau)}{2\pi}\int_x^1\frac{\mathrm{d}y}{y}\left[q(y,\tau)P_{qq}\left(\frac{x}{y}\right)+g(y,\tau)P_{qg}\left(\frac{x}{y}\right)\right] \tag{5.95}$$

同様にグルーオン分布関数に対しては，

$$\frac{\mathrm{d}g(x,\tau)}{\mathrm{d}\tau}=\frac{\alpha_s(\tau)}{2\pi}\int_x^1\frac{\mathrm{d}y}{y}\left[q(y,\tau)P_{gq}\left(\frac{x}{y}\right)+g(y,\tau)P_{gg}\left(\frac{x}{y}\right)\right] \tag{5.96}$$

が成り立つ．ただし，P_{gq} はクォークがグルーオンを，P_{gg} はグルーオンがグルーオンを放出する分割関数である．ここで，クォークの香り i および反クォークとクォークを区別して，分布関数 $q_i(x,\tau)$, $\bar{q}_i(x,\tau)$ を導入し，一重項分布関数 Σ，非 1 重項関数 Δ を次式で定義する．

$$\Sigma(x,\tau)\equiv\Sigma[q_i(x,\tau)+\bar{q}_i(x,\tau)]=F_2(x,\tau)/x \tag{5.97}$$

$$\Delta(x,\tau)\equiv\Sigma[q_i(x,\tau)-\bar{q}_i(x,\tau)]=F_3(x,\tau) \tag{5.98}$$

F_2, F_3 は深非弾性散乱に現れるスケーリング関数 (3.69) である．これらの満たす方程式は，(5.95)，(5.96) を入れれば得られるから

$$\frac{\mathrm{d}\Delta(x,\tau)}{\mathrm{d}\tau}=\frac{\alpha_s(\tau)}{2\pi}\int_x^1\frac{\mathrm{d}y}{y}\left[\Delta(y,\tau)P_{qq}\left(\frac{x}{y}\right)\right] \tag{5.99}$$

$$\frac{\mathrm{d}\Sigma(x,\tau)}{\mathrm{d}\tau}=\frac{\alpha_s(\tau)}{2\pi}\int_x^1\frac{\mathrm{d}y}{y}\left[\Sigma(y,\tau)P_{qq}\left(\frac{x}{y}\right)+2n_f g(y,\tau)P_{qg}\left(\frac{x}{y}\right)\right] \tag{5.100}$$

$$\frac{\mathrm{d}g(x,\tau)}{\mathrm{d}\tau}=\frac{\alpha_s(\tau)}{2\pi}\int_x^1\frac{\mathrm{d}y}{y}\left[\Sigma(y,\tau)P_{gq}\left(\frac{x}{y}\right)+g(y,\tau)P_{gg}\left(\frac{x}{y}\right)\right] \tag{5.101}$$

n_f は香りの数である．この方程式を DGLAP の発展方程式と呼ぶ[6,7]．この方程式は 2 個の変数 x, Q^2 を含む．Q^2 を与えたとき，x の変数としての構造関

数はQCDで摂動計算することはできない．しかし，構造関数がある$Q^2=Q_0^2$でxの関数として与えられるならば，Q^2を変えたときにどう発展していくかは発展方程式で完全に決まる．

発展方程式を解くにあたっては分割関数P_{gg}を知る必要があるが，分割関数は対数第1近似では，対象とする物理過程の種類によらない普遍関数であり，一般的に計算する方法が与えられている（文献[6,7]および付録C.6)．

$$P_{gg}(z)=6\left\{\frac{1-z}{z}+\frac{z}{1-z}+z(1-z)\right\} \tag{5.102}$$

対称性より，分割関数には次の性質がある．

$$P_{qq}(z)=P_{gq}(1-z),\ P_{qg}(z)=P_{\bar{q}g}(1-z),\ P_{gg}(z)=P_{gg}(1-z) \tag{5.103}$$

ここで発展方程式に対する二，三の留意点を述べる．

b. グルーオンの偏極

(5.99)～(5.101)の発展方程式は，パートン分布関数のQ^2の変化による発展を記述している．すなわち，Q^2による発展はすべて，仮想フォトンと相互作用する前に完了しているという物理的解釈に立つ．ところが，クォークによるグルーオン放出は始状態でも終状態でも可能であり，この二つの振幅を可干渉的に足し算したものの和が(5.87)の放出確率を与えている．この二つの可干渉な振幅の和の自乗を，確率という言葉を使ってあたかも一つの統計的に独立な過程（始状態パートンのグルーオン放出）のように扱うのは，いささか強引に見えるかもしれない．こうした議論を正当化する理由は次の通りである．始状態（仮想フォトンと相互作用する前）のパートンからの放出振幅は$1/\hat{t}$に比例するのに反し，終状態からの放出振幅は$1/\hat{s}$に比例し対数第1近似$(1/\hat{t}\gg1/\hat{s})$では無視してよい．ただし干渉項には$1/\hat{t}$に比例する項があるのでやはり始状態放出のみでは正しくないように見える．しかし，よく観察すると終状態放出項は，ゲージ不変性を保証するために存在するので，この項の寄与は非物理的なスカラーおよび縦波グルーオンを消去するためにのみ存在する．もしグルーオンについては物理的な横偏極のみ考慮することにすれば，たとえば$\Sigma_\lambda\varepsilon_\mu(\lambda)\varepsilon_\nu(\lambda)=-g_{\mu\nu}$の共変ゲージの代わりに，

$$\Sigma_\lambda\varepsilon_\mu(\lambda)\varepsilon_\nu(\lambda)=-g_{\mu\nu}+\frac{n_\mu k_\nu+n_\nu k_\mu}{n\cdot k}-\frac{n^2k_\mu k_\nu}{(n\cdot k)^2} \tag{5.104}$$

$$(n \cdot \varepsilon)=0$$

で定義される軸性ゲージ (axial gauge) を採用し，n を適当に選べば LLA では純粋に始状態放出項のみ考慮すればよく[8]，上記のグルーオン放出の統計的独立という性質は保証される．このことはグルーオンをカスケードに放出させるシャワー現象への応用を可能にするという意味で重要である．

c．分割関数の正則化

赤外発散（ソフトグルーオン発生）の処理：対角的な P 関数 P_{qq}, P_{gg} は，$z=1$ で発散する．これは，エネルギー 0 のグルーオンを発生することに起因する赤外発散である．この困難を処理するために，$e^+e^- \to q\bar{q}g$ 反応において赤外発散がなかったことの理由を思い起こそう．グルーオン発生断面積は赤外発散項をもつが，全変数領域で積分すれば仮想グルーオン交換効果と相殺して，全断面積に対する寄与は有限な補正を与えた（式 (5.69)）．すなわち

$$\sigma_{\mathrm{TOT}}{}^{ee}=\sigma_0{}^{ee}\left(1+\frac{\alpha_s}{\pi}+\cdots\right) \tag{5.105 a}$$

同様な相殺は電子非弾性散乱 ($eq \to eqq$) でも生じる．1 グルーオン発生項の寄与と仮想グルーオン交換項の効果を含めた非弾性散乱の $O(\alpha_s)$ までの全断面積 σ^{DIS} を，赤外発散項を正則化した上で正しく計算すると

$$\sigma_{\mathrm{TOT}}{}^{\mathrm{DIS}}=\sigma_0{}^{\mathrm{DIS}}+\int_0^1\frac{\mathrm{d}\sigma^q}{\mathrm{d}z}\mathrm{d}z+\sigma(\mathrm{virtual})=\sigma_0{}^{\mathrm{DIS}}\left(1-\frac{\alpha_s}{\pi}+\cdots\right) \tag{5.105 b}$$

となることが示せる．電子陽電子反応の場合は終状態のグルーオンとクォークは一重項状態にあり，引力が働くので全体として正の補正を与えたが，深非弾性散乱の場合の QCD 第 1 次補正は，負の補正であることに注意しよう．(5.105 b) を書き直すと

$$\int_0^1\left[\frac{1}{\sigma_0}\frac{\mathrm{d}\sigma^q}{\mathrm{d}z}+\left\{\frac{\sigma(\mathrm{virtual})}{\sigma_0}+\frac{\alpha_s}{\pi}\right\}\delta(1-z)\right]\mathrm{d}z=0 \tag{5.106}$$

ここで，正則な＋（プラス）関数を次のように定義すると，

$$\int_0^1\left[\frac{\mathrm{d}\sigma^q}{\mathrm{d}z}\right]_+\mathrm{d}z=0 \tag{5.107}$$

グルーオン発生の断面積を

$$\frac{1}{\sigma_0}\frac{\mathrm{d}\sigma_{\mathrm{DIS}}}{\mathrm{d}z}=\left[\frac{1}{\sigma_0}\frac{\mathrm{d}\sigma^q}{\mathrm{d}z}\right]_+-\frac{\alpha_s}{\pi}\delta(1-z) \tag{5.108}$$

のような形に書き表すことができる．

右辺第1項は，$z \neq 1$ のとき，対数第1近似の範囲で式 (5.88) 右辺の中の第2項に等しい量であるから，

$$\left[\frac{1}{\sigma_0}\frac{\mathrm{d}\sigma^q}{\mathrm{d}z}\right]_+ = \frac{\alpha_s}{2\pi}P_{qq}(z)\ln\left(\frac{Q^2}{m_g{}^2}\right) \tag{5.109}$$

$$P_{qq}(z) = \frac{4}{3}\left[\frac{1+z^2}{1-z}\right]_+ \tag{5.110}$$

この定義しなおした $P_{qq}(z)$ は，$z \neq 1$ では (5.87 b) に等しいが，積分すれば0になるという条件

$$\int_0^1 P_{qq}(z)\mathrm{d}z = 0 \tag{5.111}$$

がついた分だけこれまでの $P_{qq}(z)$ とは異なる．この式を成立させるためには，$P_{qq}(z)$ を正則化しなければならないが，これは次のような性質をもつ＋関数を導入することにより達成される．

$$\frac{1}{(z-a)_+} = \frac{1}{z-a}, \qquad z \neq a \tag{5.112 a}$$

$$\int \frac{f(z)}{(z-a)_+}\mathrm{d}z = \int \frac{f(z)-f(a)}{(z-a)}\mathrm{d}z \tag{5.112 b}$$

条件 (5.111) と (5.112) を使えば，$P_{qq}(z)$ を決めることができて，

$$P_{qq}(z) = \frac{4}{3}\left[\frac{1+z^2}{1-z}\right]_+ = \frac{4}{3}\left[\frac{1+z^2}{(1-z)_+} + \frac{3}{2}\delta(1-z)\right] \tag{5.113}$$

を得る．もともと核子の供給するパートンフラックスの z 分布式 (5.88)

$$\mathrm{d}P(z,\tau)\mathrm{d}z = \left[\delta(1-z) + \frac{\alpha_s}{2\pi}P_{ji}(z)\tau\right]\mathrm{d}z \tag{5.114}$$

の形で定義したのであるから，パートンフラックスを全部足し上げたものは，元の核子が供給するものに等しくなければならない．$\mathrm{d}P(z,\tau)$ を z について積分したものは1でなければならないから[*6)]，第2項について条件 (5.111) を要求するのは理にかなっている．

---

*6) (5.105 b) を考慮すれば，$\delta(1-z)$ の係数もまた $1-\alpha_s/\pi$ に変更されるが，補正された全断面積で再規格化すれば，$O(\alpha_s{}^2)$ では (5.114) が依然として成立する．

(5.111) は，クォーク数保存則を意味する．それは次のようにして見ることができる．N_v をヴァレンスクォークの数として，クォーク数保存則および運動量保存則を書くと次の式が成立するから，

$$\int dz \sum_i [q_i(z,\tau) - \bar{q}_i(z,\tau)] = N_v \tag{5.115 a}$$

$$\int dz\, z \sum_i [q_i(z,\tau) + \bar{q}_i(z,\tau) + g(z,\tau)] = 1 \tag{5.115 b}$$

τ で微分して，(5.97)〜(5.101) を使えば，(5.111) と

$$\int_0^1 z[P_{qq}(z) + P_{gq}(z)]dz = 0$$

$$\int_0^1 z[2n_f P_{gq}(z) + P_{gg}(z)]dz = 0 \tag{5.116}$$

が得られる．

演習 5.6 正則化した分割関数について，次式を証明せよ．

$$P_{gg}(z) = 6\left[\frac{1-z}{z} + \frac{z}{(1-z)_+} + z(1-z)\right] + \left(\frac{11}{2} - \frac{n_f}{3}\right)\delta(1-z) \tag{5.117}$$

＋関数を導入して書き直した (5.108) や，(5.114) の表式は，$z \neq 1$ での表式と全積分量を指定すれば，完全に決まる関数であり，物理的解釈もつけられる．赤外発散を回避するために余分なパラメターを導入する必要もなく，便利な簡便式である．ただし，z が 1 に近いところでは，近似が悪くなり使用できないという限界は心得ておく必要がある．

d．高次の寄与

パートンモデルでは，パートンの運動量分布関数 $q(x,\tau)$ を $\sigma_T/\sigma_0 = 2F_1(x, Q^2)$ で定義しても，$(\sigma_T + \sigma_L)/\sigma_0 = F_2(x,\tau)/x$ で定義してもよい．また QCD 効果を入れても対数第 1 近似をとる限りは差は出ないので，ここでは区別しなかった．しかし，$O(\alpha_s)$ の量である $\sigma_L/\sigma_0 = F_L/x \equiv (F_2 - 2xF_1)/x$ を考慮するときは，その差を問題にしなければならない．このときは，(5.86 a) の第 2 項以下を高次計算の中に取り入れなければいけない．

5.6　発展方程式の解法

5.6.1　モーメントの方法

a.　異常次元

DGLAP の方程式を解くのは，特に非一重項の場合は簡単になる．次のようなモーメント（メラン変換）

$$M_n(\tau)\equiv\int_0^1 \mathrm{d}x x^{n-1}\Delta(x,\tau) \tag{5.118 a}$$

$$\gamma_n\equiv\int_0^1 \mathrm{d}x x^{n-1}P_{qq}(x) \tag{5.118 b}$$

を定義すれば，(5.99) の DGLAP 方程式は，

$$\frac{\mathrm{d}M_n(\tau)}{\mathrm{d}\tau}=\frac{\alpha_s(\tau)}{2\pi}\int_0^1 \mathrm{d}x x^{n-1}\int_x^1\frac{\mathrm{d}y}{y}\Delta(y,\tau)P_{qq}\left(\frac{x}{y}\right)=\frac{\alpha_s(\tau)}{2\pi}\gamma_n M_n \tag{5.119}$$

$\alpha_s(\tau)$ の表式 (5.30) に留意すれば，

$$\frac{\mathrm{d}\ln M_n(\tau)}{\mathrm{d}\tau}=\frac{\alpha_s(\tau)}{2\pi}\gamma_n=\frac{\gamma_n}{2\pi}\frac{\alpha_s(0)}{1+b_0\alpha_s(0)\tau} \tag{5.120}$$

$$b_0=\frac{\beta_0}{4\pi}$$

となるので積分すれば

$$\ln\left[\frac{M_n(\tau)}{M_n(0)}\right]=\frac{\gamma_n}{2\pi b_0}\ln\left[\frac{\alpha_s(0)}{\alpha_s(\tau)}\right]\equiv-d_n\ln\left[\frac{\alpha_s(0)}{\alpha_s(\tau)}\right] \tag{5.121 a}$$

ここに

$$d_n=-\frac{\gamma_n}{2\pi b_0} \tag{5.121 b}$$

は異常次元と呼ばれる量である．したがって

$$\ln\left[\frac{M_n(\tau)}{M_n(0)}\right]=\frac{d_n}{d_k}\ln\left[\frac{M_k(\tau)}{M_k(0)}\right] \tag{5.122}$$

または

$$M_n(\tau)=M_n(0)\left[\frac{\alpha_s(0)}{\alpha_s(\tau)}\right]^{-d_n} \tag{5.123}$$

すべての n についてモーメントがわかれば逆メラン変換で元の構造関数が求められる．この解は，対数第 1 近似で成立する解である．この解によれば，構

造関数（のモーメント）の発展の仕方は異常次元のみで決まり，構造関数自身にはよらない．モーメント同士の比は d_n のみで決まる．γ_n の計算は

$$\gamma_n \equiv \int_0^1 dx x^{n-1} P_{qq}(x) = \frac{4}{3}\left[\frac{3}{2} + \int_0^1 dx \frac{x^{n-1}+x^{n+1}-2}{1-x}\right]$$
$$= \frac{4}{3}\left[-\frac{1}{2} + \frac{1}{n(n+1)} - 2\sum_{j=2}^{n}\frac{1}{j}\right] \tag{5.124}$$

で与えられる．γ_n の値をいくつかあげておくと

$$\gamma_1=0,\ \gamma_2=-1.78,\ \gamma_3=-2.78,\ \gamma_4=-3.49,\ \gamma_5=-4.04,\ \gamma_6=-4.50$$

非一重項分布関数はニュートリノ深非弾性散乱における $F_3(x, Q^2)$ で求められているので，QCD の予言と実験データを比較することが可能である．図 5.14[9] は，CERN の BEBC グループによるデータとの比較である．

傾きは QCD の予言とよくあっている．スカラーグルーオンの仮定とは合わない．(5.123) によって個々のモーメント M_n を直接データと比較することも可能であるが，$\alpha_s(0)$ の値が必要であるなど，より多くの情報が必要である．図 5.15 にそうした比較の一例をあげる[10]．図は M_n^{-1/d_n} を $\ln Q^2$ の関数としてプロットしたものである．$\alpha_s(\tau)$ は，LLA 近似で $4\pi/[\beta_0 \ln(Q^2/\Lambda^2)]$ であるから (5.32)，LLA では $\ln Q^2$ の関数として直線になるはずであり，データの範囲ではそうなっている．

また，$M_n^{-1/d_n} \propto \ln Q^2 - \ln \Lambda^2$ であるので，直線が横軸を切る点が，Λ^2 を与

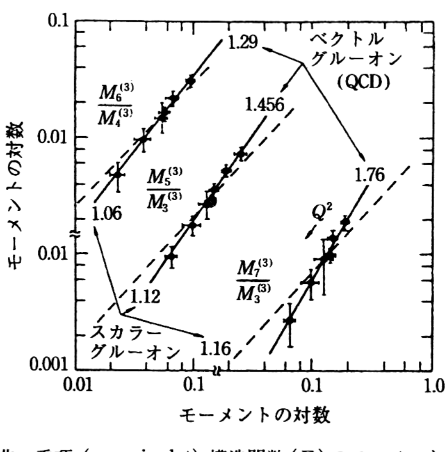


図 5.14　非一重項 (non-singlet) 構造関数 (F_3) のモーメントと QCD の比較[9]

えるから Λ についてある程度の推量はできる．しかし，図5.15を見ればわかるように，変数を x から ξ*7) に変えたNachtmanモーメントを使うと，データとの一致はよくなるが[10]，Λ の値が変わる．使う変数により不定性があることは，この Λ の値があまり信用できないことを意味する．

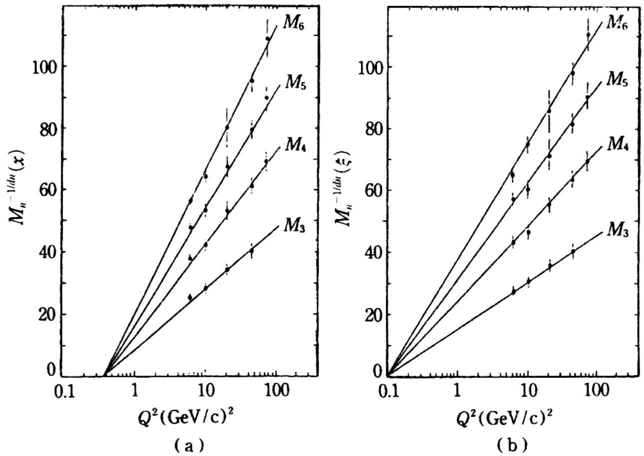


図5.15 (a) 深非弾性散乱構造関数のモーメントの対数を $n=3\sim6$ についてプロットしたもの[10]．(b) は核子の質量効果をとり入れて $x\to\xi$ (Nachtmanモーメント) 変数を使ったもの．変数のとり方により座標軸を切る点 (ここが Λ^2 の値を与える) が変わる．

なお，α_s を τ の関数でなく定数であるとした場合，(5.120) から

$$M_n(\tau)=M_n(0)\exp(\alpha_s\gamma_n\tau/2\pi)=M_n(0)(Q^2/Q_0{}^2)^{\alpha_s\gamma_n/2\pi} \qquad (5.125)$$

となって，$\ln Q^2$ でなく Q^2 のべきで変化する．これはデータと合わない．

b. $Q^2=\infty$ での運動量分布

一重項分布関数 Σ とグルーオン分布関数のモーメントを計算すると

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\begin{bmatrix}\Sigma_n\\ g_n\end{bmatrix}=\frac{\alpha_s}{2\pi}\begin{bmatrix}\gamma_n(qq), & 2n_f\gamma_n(qg)\\ \gamma_n(gq), & \gamma_n(gg)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\Sigma_n\\ g_n\end{bmatrix} \qquad (5.126)$$

となる．$\Sigma_n, g_n, \gamma_n(qq)\cdots$ などは，$\Sigma, g, P_{qq}, \cdots$ のモーメントという意味である．$\gamma_n(qq)$ は (5.124) で与えた．同様の計算から

*7) $\xi=\dfrac{2x}{1+\left[1+\dfrac{4m_p{}^2x^2}{Q^2}\right]^{1/2}}$

$$\gamma_n(qg)=\frac{1}{2}\left[\frac{n^2+n+2}{n(n+1)(n+2)}\right] \tag{5.127 a}$$

$$\gamma_n(gq)=\frac{4}{3}\left[\frac{n^2+n+2}{n(n^2-1)}\right] \tag{5.127 b}$$

$$\gamma_n(gg)=6\left[-\frac{1}{12}+\frac{1}{n(n-1)}+\frac{1}{(n+1)(n+2)}-\Sigma\frac{1}{j}-\frac{n_f}{18}\right] \tag{5.127 c}$$

いま $n=2$ とすると Σ_2, G_2 はクォークおよびグルーオンの平均運動量を表す．計算結果は

$$\gamma_2(ij)=\begin{bmatrix}-16/9, & n_f/3\\ 16/9, & -n_f/3\end{bmatrix} \tag{5.127 d}$$

で，運動量保存則（3.74）が明瞭に見える．この固有値を求めると二つの解

$$\lambda_+=-(16+3n_f)/9, \qquad \lambda_-=0 \tag{5.128}$$

を得る．異常次元は $d_{2+}=\lambda_+/\{(33-2n_f)/6\}>0$，$d_{2-}=0$ である．モーメントは，(5.123) によって，

$$\left[\frac{\alpha_s(0)}{\alpha_s(\tau)}\right]^{-d_n}$$

のように発展するので，λ_+ に対応する解は $Q^2\to\infty$ で 0 となる．λ_- に対応する固有ベクトルは

$$\begin{bmatrix}\Sigma_2(\infty)\\ g_2(\infty)\end{bmatrix}=\frac{1}{16+3n_f}\begin{bmatrix}3n_f\\ 16\end{bmatrix}\overset{n_f=6}{=}\begin{bmatrix}9/17\\ 8/17\end{bmatrix} \tag{5.129}$$

であるので，クォーク 1 個あたりの運動量は $\Sigma_2(\infty)/2n_f=3/68$，グルーオンは 8/17 となる．

5.6.2　数　値　解　法

a．QCD のテスト

理論的にはモーメントの方法はわかりやすいし，構造関数の発展の仕方も教えてくれる．しかし，実際に使う場合には，x の非常に小さいところと大きいところでのデータは得難く，正確なモーメントを取り出すことが困難である．そこで，ある x の値での構造関数の勾配 $\mathrm{d}\ln F_i/d\tau$ は，$y>x$ での構造関数の値のみにより決まることに着目し，測定値を基にして決めることを考えよう．理論的にも実験的にも海クォークやグルーオンの寄与は x の小さいところに

限られるから，$x > x_0$ では，発展方程式の中の海クォークやグルーオンの寄与は価クォークに比べて無視でき，一重項 Σ の発展方程式は非一重項 Δ の発展方程式と同一になる．実際的には $x_0 \fallingdotseq 0.25 \sim 0.3$ ととれる．この近似で F_2 を発展させた結果を，いくつかの x について Q^2 の関数として描いた図（図 5.16）と，そのおのおのの x について計算した勾配 $d \ln F_2/d\tau$ の図（図 5.17）を，BCDMS のデータ[11] と比較して示した[*8]．勾配 $d \ln F_2/d\tau$ は x の関数であり，それぞれの x の値により違う値をとるが，これが一つのパラメター $\Lambda_{\overline{MS}}$ で再現できるかどうかが QCD のテストとなる．データは理論計算を非常によく再現する．また，$\Lambda_{\overline{MS}}$ の値にどのくらい依存するかをも示した．

構造関数が $\ln Q^2$ の依存性をもちつつ発展していくことは QCD（または非可換ゲージ群）の特徴であり，歴史的には深非弾性散乱のデータによって QCD の正しさがほぼ裏づけられた．

b. グルーオン分布関数の測定

グルーオンは電磁相互作用も弱相互作用もしないので，深非弾性散乱断面積にはグルーオン分布関数が直接に測定できる量として現れることはない．

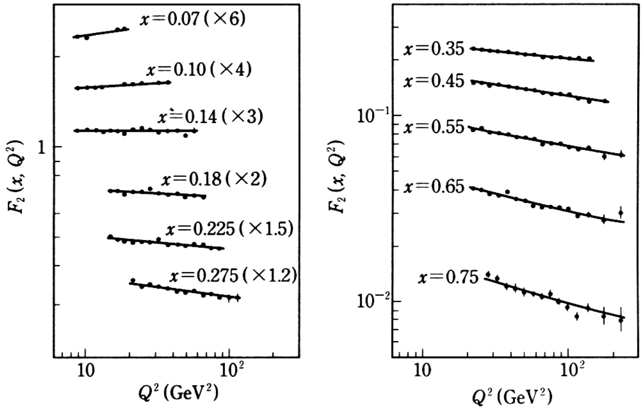


図 5.16 μp 散乱構造関数 $F_2(x, Q^2)$ の発展と QCD による比較[11]

[*8] 実際のデータ最適化では対数第 2 近似（NLLA）を採用している．この場合，

$$P_{ij}(z) \to P_{ij}^{(0)}(z) + \frac{\alpha_s(\tau)}{2\pi} P_{ij}^{(1)}(z) + \cdots$$

$$\alpha_{s\text{LLA}}(\tau) \to \alpha_{s\text{NLLA}}(\tau)$$

とする．ここで第 1 項は本文中で与えた対数第 1 近似の分割関数で，第 2 項以下も計算されている[12]．

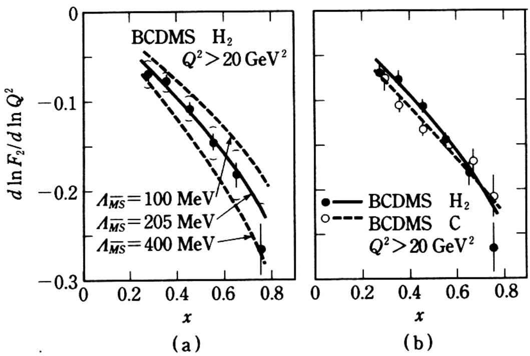


図 5.17 構造関数 F_2 の対数微分を x の関数としてみる[11)]
(a) は水素標的データを QCD の $\Lambda_{\overline{MS}}$ をいろいろ変えてみたもの. (b) は水素標的と炭素標的の比較.

DGLAP 発展方程式を使って，深非弾性散乱データから決めることは可能であるが，この場合，$\Lambda_{\overline{MS}}$ の値とグルーオン分布関数間の相関が強くなる．また，$x<x_0$ でのクォークやグルーオンの分布関数を正確に決めるためにも，正しい初期関数を与える必要があるので，グルーオン分布関数を，少なくとも Q^2 のある一点で独立に実験的に決めることが望ましい．例えば次の反応がグルーオン分布関数を決めるのに使える．

$$p+p\to\gamma+X \tag{5.130 a}$$

$$\gamma+N\to J/\psi+X \tag{5.130 b}$$

ハドロン反応で直接フォトンを生成する過程は主として

$$q+g\to\gamma+q \tag{5.131 a}$$

という QCD コンプトン反応が効く．

$$q+\bar{q}\to\gamma+g \tag{5.131 b}$$

の対消滅反応も寄与するが，pp 反応では前者が優勢である．pp 反応で観測されるフォトンは，π^0, η^0, η'^0 生成とその崩壊を通して生成される過程の寄与が大きいが，p_T の大きいところでは直接生成過程も大きく，π^0 などの生成を 2 個のフォトンで同定したうえで，分離することは可能である[13)]．

また，フォトンによる J/ψ 生成の最低次の寄与は，

$$\gamma+g\to c+\bar{c} \tag{5.132}$$

であるので，やはり核子の中のグルーオン分布が直接測定できる．図5.18にチャーム対生成から求めたグルーオン関数を示す[14]．

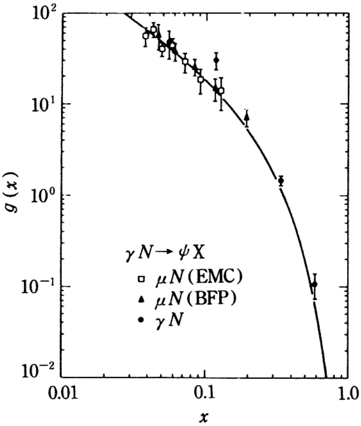


図5.18　$\sigma(\gamma N \to \psi X)$ より求めたグルーオン分布関数[14]
実線は $g(x)=3(1-x)^5/x$

c. コンピューターによる構造関数の計算

現在では，上記の数値解法を一般的に拡張しコンピュータ化して，任意の x, Q^2 での構造関数を求める手法が確立していて，いくつかの標準的プログラムが存在する．このためには，初期関数としてある参照点 Q_0 のところで，クォークやグルーオン分布関数の形を

$$xf_i(x, Q_0)=A_i x^{B_i}(1-x)^{C_i}(1+D_i\sqrt{x}+E_i x) \tag{5.133}$$

のように関数化してパラメターを決める．指数 B は $x\to 0$ ($Q^2\to 0$, $E\to$ 無限) のところでレッジェ的な形を満たすようにし（複数のレッジェ項の寄与を入れるために D_i, E_i の項がある)，指数 C_i は $x\to 1$ で弾性散乱を再現するように決める．反応の際有限な x をもつパートンの数を n とすると，$C=2n-3$ で与えられるという議論があり[15]（価クォークで $C=3$，海クォークで $C=7$，グルーオンで $C=5$)，現象解析ではその値の近傍で C を動かす．係数 A の一部はパートンの加算則 ((3.71)～(3.74)) を使って決められる．

グルーオン関数の場合 ($i=g$)，QCD 理論の考察[16]によれば，$B_g\fallingdotseq-\alpha_s(12\cdot\ln 2)/\pi\fallingdotseq-0.5$ であり，$x\to 0$ で大きく増大するが，$x\gtrsim 0.04$ では，

$$x^{B_g}(1+D_g\sqrt{x}+E_g x)\sim \text{const.} \tag{5.134}$$

としてよい近似である．実際，図 5.18 では，データが $xg(x)=3(1-x)^5$ という式によく合うことを示している．しかし，TEVATRON や LHC などの高エネルギーハドロン衝突型加速器での QCD 過程や，HERA の実験などでは，x の非常に小さい値のところを使うので，x の小さいところでの正しい振る舞いをする関数形が必要である．ちなみに，HERA では $x\fallingdotseq 10^{-4}$ まで到達可能であり，精密なデータが得られている．パラメターを決めるにあたっては，光発生やドレル-ヤン過程をも含め，総合的に決める必要があるが，関数の近似法の微調整や，どのデータをどれだけの重みをもって取り入れるかはグループにより異なり，数値は変わってくる．最近の処方箋[17~19]の中から，MRS (セット A) と H1 グループによる計算例を表 5.2，5.3 に示す．

表 5.2 初期関数形 ($Q^2=Q_0^2$)

$xg(x)=A_g x^{Bg}(1-x)^{Cg}(1+E_g x)$
$xu_v(x)=A_u x^{Bu}(1-x)^{Cu}(1+D_u x^{1/2}+E_u x)$
$xd_v(x)=A_d x^{Bd}(1-x)^{Cd}(1+D_d x^{1/2}+E_d x)$
$xs(x)=x(\bar{u}(x)+\bar{d}(x)+\bar{s}(x)+\bar{c}(x))$
$\quad =A_S x^{Bs}(1-x)^{Cs}(1+D_S x^{1/2}+E_S x)$

ここで，u_v, d_v は価クォークの分布関数を表す．

表 5.3 MRS(A)[17] と H1[19] のパラメターセット

MRS(A) の初期値は $Q_0{}^2=4\ \text{GeV}^2$, H1 は $Q_0{}^2=5\ \text{GeV}^2$ (— で表したところは，境界条件により決められる量である)．

	A_g	B_g	C_g		E_g	A_u	B_u	C_u	D_u	E_u
MRS(A)	0.775	−0.3	5.3		5.2	—	0.538	3.96	−0.39	5.13
H1	2.24	−0.2	8.52		0.0	2.84	0.55	4.19	4.42	−1.40
	A_d	B_d	C_d	D_d	E_d	A_S	B_S	C_S	D_S	E_S
MRS(A)	—	0.33	4.71	5.03	5.56	0.206	−0.3	9.27	−1.15	15.6
H1	1.05	0.55	6.44	−1.16	3.87	0.27	−0.19	1.66	0.16	−1.00

図 5.19 には，MRS(A) の $Q^2=10$, $10^4\ \text{GeV}^2$ での関数を図示した．こうした考え方で得た構造関数の Q^2 発展とデータの整合性の例を図 5.20[19] に示す．これらの分布関数は，深非弾性散乱実験データを再現するだけでなく，W, Z 生成断面積を計算したり，LHC などの高エネルギーハドロンコライダーでの実験予想を立てるのにも使われる．

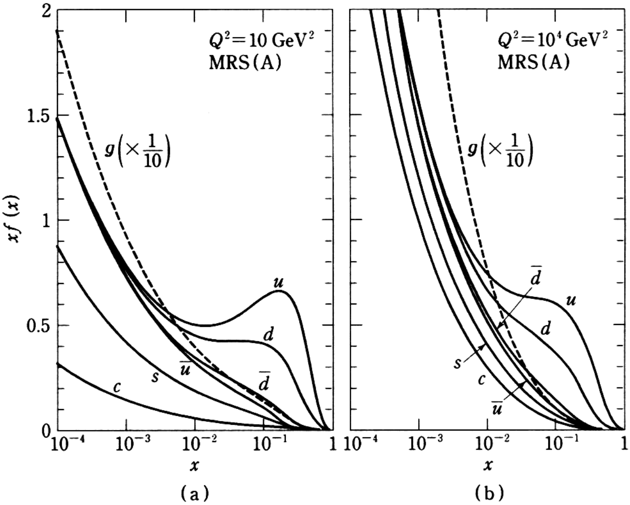


図 5.19 MRS(A) パートン分布関数[17)]

MSR(A) のパラメターセットにより発展させたクォーク分布関数 (u, d, s) とグルーオン分布関数 (g)

(a) $Q^2=10\,\mathrm{GeV}^2$, (b) $Q^2=10^4\,\mathrm{GeV}^2$

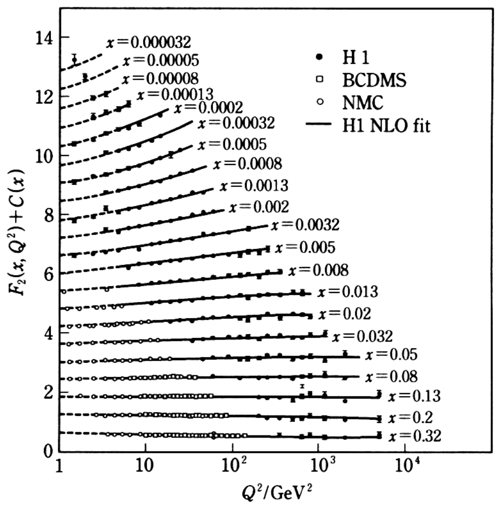


図 5.20 陽子構造関数 F_2 のデータと数値計算 (H1 パラメター) との比較[19)]

データは HERA (ZEUS, H1); μ-深非弾性散乱 (E665, NMC)

5.7　ドレル-ヤン過程

§3.7 の議論から，ドレル-ヤン (Drell-Yan (以下 DY と書く)) 過程

$$p(p_A)+\bar{p}(p_B)\longrightarrow \mu(p_c)+\bar{\mu}(p_d)+X \tag{5.135}$$

の生成断面積の式 (3.80) をここに再現すると

$$s^2\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}q^2}=\frac{4\pi\alpha^2}{9\tau}\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}\tau}(\tau) \tag{5.136 a}$$

$$\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}\tau}(\tau)=\int\delta(x_1x_2-\tau)\Sigma\lambda_i^2[q_i(x_1)\bar{q}_i(x_2)+q_i(x_2)\bar{q}_i(x_1)]\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2 \tag{5.136 b}$$

であった．ここに，$s=(p_A+p_B)^2$, $q^2=(p_c+p_d)^2$, $\tau=q^2/s$ であり，λ_i はクォーク i の電荷を表す．$p\bar{p}$ の重心系におけるパートンの運動量変数は

$$p_1=\frac{\sqrt{s}}{2}(x_1;0,0,x_1),\qquad p_2=\frac{\sqrt{s}}{2}(x_2;0,0,-x_2) \tag{5.137}$$

と表される．以上はパートンモデルで成立する式である．ここで，QCD の高次効果 (図 5.21) を考慮するとどう変わるかを見よう．パートンで書いたファインマン図は電子深非弾性散乱 (以下 DIS と書く) の QCD 効果と酷似し

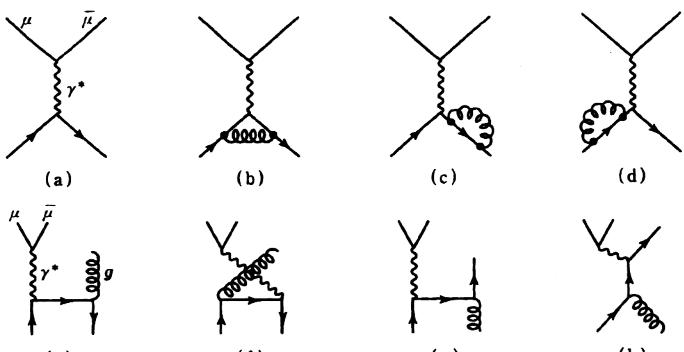


図 5.21　ドレル-ヤン過程 $p\bar{p}\longrightarrow\mu\bar{\mu}+X$
(a)　最低次の過程，最も簡単な $q+\bar{q}\longrightarrow\gamma^*\rightarrow\mu\bar{\mu}$
(b)～(h) QCD の高次過程
(c)，(d)　$q\bar{q}\rightarrow\gamma^*$ 消滅過程
(e)，(f)　$q\bar{q}\rightarrow\gamma^*g$
(g)，(h)　グルーオンとのコンプトン散乱
(b)～(f) は f_q を (g)，(h) は f_g を与える．
本文，式 (5.139)，(5.140) を参照．

ている．仮想フォトンとクォーク線を交叉すれば一方から他方が得られるし，ともにハドロン状態を一定の Q^2（ただし，深非弾性散乱のときは $q^2=-Q^2<0$ で，ドレル-ヤン過程のときは $q^2=Q^2>0$）で指定している．DY 過程のファインマン図を計算し，位相空間の積分（中間状態の仮想クォーク質量についての積分）を行うと，深非弾性散乱と同じように $\ln(Q^2/m_g{}^2)$ 型の質量異常項が出現する．交差以外は同じ行列要素を計算しているから，その係数は同じである．すなわち，DY 過程の対数第 1 近似での QCD 補正には，深非弾性散乱における QCD 補正と同じ関数が現れる．違うところは，DY 過程では始状態に二つのパートンがあるので，二つの分布関数の積をとらねばならないことである．仮想グルーオンの寄与をも考慮した $O(\alpha_s)$ の高次計算によれば繰り込み処方後の表現は次式のようになる[20]．

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}\tau}(\tau)=&\int \mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2\,\mathrm{d}z\;\delta(x_1x_2z-\tau)\sum\lambda_i{}^2[\{q_i(x_1)\,\bar{q}_i(x_2)+(1\leftrightarrow 2)\}\\&\times\left\{\delta(1-z)+\frac{\alpha_s}{2\pi}2P_{qq}(z)\left(\ln\frac{Q^2}{\mu^2}\right)+\frac{\alpha_s(\mu)}{2\pi}DY_q(z)\right\}\\&+\{g(x_1)(q_i(x_2)+\bar{q}_i(x_2))+(1\leftrightarrow 2)\}\\&\times\left\{\frac{\alpha_s}{2\pi}P_{qg}(z)\left(\ln\frac{Q^2}{\mu^2}\right)+\frac{\alpha_s(\mu)}{2\pi}DY_g(z)\right\}]\end{aligned}\qquad(5.138)$$

$P_{qq}(z)$, $P_{qg}(z)$ は，すでに現れたものと同じ分割関数である．$P_{qq}(z)$ の前の係数 2 は，グルーオンを放出できる始状態のクォークが 2 個あることからくる．対数第 1 近似での優勢項以外の寄与は DY という関数にまとめた．この部分の寄与は対応する深非弾性散乱での非優勢項の寄与 DI とは異なる．従って，近似を対数第 2 近似以上に進めるときは，$q(x)$ を深非弾性散乱の $F_2(x)/x$（(5.78)）で定義することとする．$\ln(Q^2/\mu^2)$ の項は深非弾性散乱の場合と同じく，$q(x)$ に繰り込み $q(x)\to q(x, Q^2)$ とすることによって，$q(x, Q^2)$ の定義の中に取り込むことができる．繰り込みスケール μ 依存性を明らかにするため以後 $q(x, \mu)$, $\alpha_s(\mu)$ のように書くことにすると，結局，

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}\tau}(\tau)=&\int \mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2\,\mathrm{d}z\;\delta(x_1x_2z-\tau)\sum\lambda_i{}^2\\&\times\left\{[q_i(x_1,\mu)\,\bar{q}_i(x_2,\mu)+(1\leftrightarrow 2)]\left[\delta(1-z)+\frac{\alpha_s(\mu)}{2\pi}f_q(z)\right]\right.\end{aligned}$$

$$+[g(x_1,\mu)\{q_i(x_2,\mu)+\bar{q}_i(x_2,\mu)\}+(1\leftrightarrow 2)]\left(\frac{\alpha_s(\mu)}{2\pi}f_g(z)\right)\Bigg\} \quad (5.139)$$

$$\begin{aligned} f_q(z)&=DY_q-2DI_q\\ &=\frac{4}{3}\left[\delta(1-z)\left(1+\frac{4\pi^2}{3}\right)-6-4z+\left(\frac{3}{1-z}\right)_+ +2(1+z^2)\left(\frac{\ln(1-z)}{1-z}\right)_+\right]\\ f_g(z)&=DY_g-DI_g\\ &=\frac{1}{2}\left[\{z^2+(1-z)^2\}\ln(1-z)+\frac{3}{2}-5z+\frac{9}{2}z^2\right] \end{aligned} \quad (5.140\,\mathrm{a,b})$$

という形となった．すなわち，QCD 高次効果のうち，ソフトな部分は分離してパートン分布関数の中に繰り込むことができた (factorization)．ハードな部分 (f_q, f_g) は，ドレル-ヤン断面積そのものに対する高次補正と見なせる．

ここで注意すべきは，対消滅項の中の非優勢項の寄与 $f_q(z)$ の中の第 1 項である．これは仮想グルーオンの寄与で，$\delta(1-z)$ に比例するので，第 0 次のパートン分布をまったく変えずに全体の規格化定数を

$$K_\delta=1+\frac{2\alpha_s}{3\pi}\left(1+\frac{4\pi^2}{3}\right) \quad (5.141)$$

だけ変える (ただし $\alpha_s(q^2)$ からくる質量依存性はある)．f_q の残りの寄与およびコンプトン項 f_g は全体として負の寄与を与えるが値は小さい．そこで，K 因子を導入して，第 2 次補正の効果をまとめて

$$\hat{\sigma}_0\rightarrow\hat{\sigma}(\mathrm{QCD})\equiv K(s,q^2)\hat{\sigma}_0 \quad (5.142)$$

と書き表すと，τ が 0.2〜0.7 くらいの範囲で $K\sim K_\delta\sim$定数である．ドレル-ヤン過程がよく調べられている固定標的実験のエネルギー ($Q\fallingdotseq 20-30$ GeV) 程度ではこの K は非常に大きく，1.5〜2.3 くらいにもなる．実際実験的にも $\sigma_{\mathrm{exp}}/\sigma_0$ (第 3 章ではこれを K 因子と定義した) がそのくらい大きいことが確認されており (図 5.22[21])，QCD の高次効果と見なして話のつじつまは合う．K_δ の中の 1 に対する補正項が大きい理由は，ヴァーテックス補正において，$q^2=-Q^2<0$ (深非弾性散乱) から $q^2=Q^2>0$ (DY 過程) への解析接続によって生じる項の寄与があるからで，通常の摂動の高次効果とは区別されねばならない．この観点に立てば，さらに高次の効果を取り入れても K の値はこの K_δ の値からはそれほどは動かないはずであり，摂動計算結果を信頼してよいと正当化できるであろう．

実際，W や Z 生成が問題になるようなハドロン衝突型加速器実験のエネルギー領域では，K 因子の補正は25%程度となる．実験的には K を調整すべき規格化のパラメターと見なしてデータに合うように決めることが多い．

結局，DY 過程における QCD 高次の効果のうちソフトな部分は，$q(x)\to q(x,\mu)$ とし，K 因子を掛けて全体のフラックスを再調整することに集約することができた．深非弾性散乱 ($\mu^2=-q^2=Q^2$) の $q(x,\mu)$ と，ドレル-ヤン過程 ($\mu^2=q^2=M^2$) の $q(x,\mu)$ は，対数第1近似ではまったく同じ形をしていることに留意しよう．

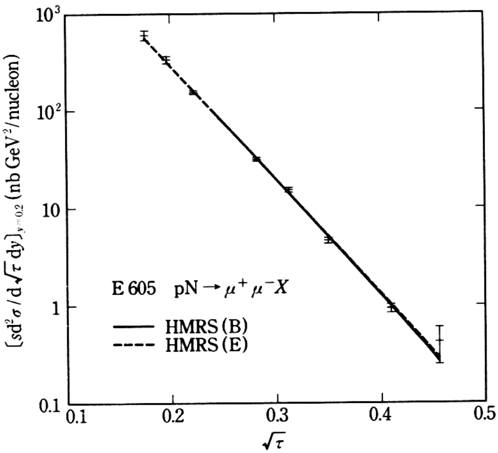


図 5.22 ドレル-ヤン過程と第2次補正まで入れた QCD 計算値との比較 $K=1.5\pm0.2$ (QCD 計算)[21]．

5.8 ハドロン-ハドロン衝突反応

直観的に考えれば，深非弾性散乱で導入された“Q^2 によって発展するパートン分布関数”という概念が同じようにハドロン-ハドロン反応にそのまま適用できるかどうかは必ずしも自明ではない．なぜならば，レプトンがプローブの場合は，パートン分布はパートン同士の短距離相互作用（Q^2 の大きい反応）が起きるまで元の分布を維持すると考えられるが，ハドロン-ハドロン反応の

場合はプローブがパートンであるからソフトグルーオン放出による長距離相互作用が存在し，したがって，短距離相互作用が起きる前にパートン分布が変更されてしまう可能性があるからである．しかし，前節の議論によって少なくもドレル-ヤン過程には，Q^2 の関数として発展するパートン分布関数という概念が適用できることが実際の計算によって示された．さらにすべての高次効果についても，摂動の各次でソフトな部分とハードな部分の分離 (factorization) が可能であること，したがってソフトグルーオン効果はパートン関数に組み入れ可能であることが証明されている[22]．この考察は拡張可能で，一般のハドロン-ハドロン衝突反応にも適用可能である．ハドロン-ハドロン反応は，パートンモデルの段階では

$$\sigma(AB\to cX)=\int dx_a dx_b\{f_A{}^a(x_a)f_B{}^b(x_b)+(A\leftrightarrow B \text{ if } a\neq b)\}\hat{\sigma}_0(ab\to cX) \tag{5.143}$$

と表される．ここに $\hat{\sigma}_0$ はパートンモデルによる $(ab\to cX)$ 反応の断面積または，QCD による最低次の摂動計算式である．$\hat{\sigma}_0$ は，始状態のカラーについては平均を，終状態のカラーについては和をとってあるものとする．パートンモデルが適用できるのはいわゆる堅い反応 (hard process, Q^2 の大きい反応) に限られることに留意しておこう．ハドロン反応が式 (5.143) のように表されるということは，図式的には図 5.23 のように表される．

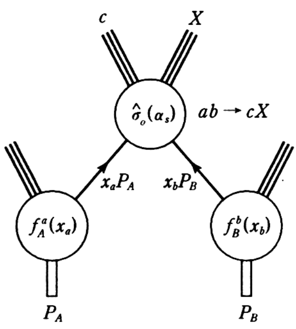


図 5.23 ハドロン反応 $(A+B\to c+X)$ のパートン描像
ハドロン $A(B)$ の中のパートン $a(b)$ が $x_aP_A(x_bP_B)$ の運動量をもって QCD 反応 $a+b\to c+X$ を行う．

QCD を考慮したハドロン-ハドロン反応の断面積は上式から

$$f_A{}^a(x_a),\ f_B{}^b(x_b) \longrightarrow f_A{}^a(x_a, \mu),\ f_B{}^b(x_b, \mu) \tag{5.144 a}$$

$$\hat{\sigma}_0(ab \to cX) \longrightarrow \hat{\sigma}(ab \to cX) = \hat{\sigma}_0\left[1 + \sum_j^n c_j \alpha_s{}^j\right] \tag{5.144 b}$$

と置き換えたものとなる．すなわち

$$\sigma(AB \to cX) = K\int \mathrm{d}x_a\,\mathrm{d}x_b\{f_A{}^a(x_a, \mu) f_B{}^b(x_b, \mu) + (A \leftrightarrow B \text{ if } a \neq b)\} \times \hat{\sigma}(ab \to cX) \tag{5.145}$$

ここに，深非弾性散乱でのパートン分布と同じく $f_A{}^a(x_a, \mu)$ は，$f_A{}^a(x_a)$ から，DGLAP 発展方程式の処方で，μ まで発展させて得られるパートン分布であり，$\hat{\sigma}(ab \to cX)$ は，QCD の n 次の摂動計算による短距離相互作用断面積である．スケール変数 μ は，ドレル-ヤン過程ならば μ 対の不変質量，W や重いクォーク生成ならばその質量，ジェット反応であれば横運動量 p_T にとるのが普通である．

ここで，(5.136 b) を拡張して，次のようなパートンルミノシティ L を定義する．

$$\frac{\mathrm{d}L_{ab}}{\mathrm{d}\tau}(\tau) = \int \mathrm{d}x_a\,\mathrm{d}x_b\,\delta(x_a x_b - \tau)\{f_A{}^a(x_a, \mu) f_B{}^b(x_b, \mu) + (A \leftrightarrow B \text{ if } a \neq b)\} \tag{5.146}$$

$\hat{\sigma}$ が $\hat{s} = \tau s$ にのみ依存するとすれば，パートンの断面積は次のように書き換えられる．

$$\sigma(AB \to cd\,;s) = \sum_{a,b}\int_{\tau_0}^1 \mathrm{d}\tau \frac{\mathrm{d}L_{ab}}{\mathrm{d}\tau}\hat{\sigma}(ab \to cd\,;\tau) \tag{5.147}$$

入射パートン系は重心系ではないので，ローレンツブーストに関し不変な観測量を使うのが望ましい．例えば，観測量としては ab 系の縦運動量 $|\boldsymbol{q}|/\sqrt{s} = x_F = x_a - x_b$ のほかに，ラピディティ y などがよく使われる．パートン a, b 系のもつエネルギー E_{ab}，運動量 P_{ab} は

$$E_{ab} = x_a E + x_b E = (x_a + x_b)E \tag{5.148 a}$$

$$P_{ab} = x_a P + x_b P \fallingdotseq (x_a - x_b)E \tag{5.148 b}$$

であるので

$$y=\frac{1}{2}\ln\frac{(E_{ab}+P_{ab})}{(E_{ab}-P_{ab})}=\frac{1}{2}\ln\frac{x_a}{x_b} \tag{5.149}$$

x_a, x_b は，$\tau(=\hat{s}/s)$，$x_F(=E_{\text{パートン}}/E$；$E_{\text{パートン}}$ はパートン 2 体系の全エネルギー）がわかっているときは，

$$x_{a,b}=(x_F\pm\sqrt{x_F{}^2+4\tau})/2 \tag{5.150 a}$$

から求められるが，τ と y がわかっているときは

$$x_a=\sqrt{\tau}\,\mathrm{e}^{+y}, \qquad x_b=\sqrt{\tau}\,\mathrm{e}^{-y} \tag{5.150 b}$$

を使う．ラピディティを使えば，

$$\frac{\mathrm{d}^2\sigma}{\mathrm{d}y\mathrm{d}\tau}=\frac{\mathrm{d}^2\sigma}{\mathrm{d}x_a\mathrm{d}x_b}=\{f_A{}^a(x_a,\mu)f_B{}^b(x_b,\mu)+(A\leftrightarrow B \text{ if } a\neq b)\}\hat{\sigma} \tag{5.151}$$

まとめると，QCD の高次効果のうち，ソフトな部分（長距離相互作用）は“Q^2 により発展させたパートン分布”という過程の種類によらない普遍関数に繰り込むことができる．K 因子は先にも述べたように対数近似第 2 次の項ではあるが，その主要寄与は，$Q^2<0$（散乱）から，$Q^2>0$（生成）への解析接続による項であり，ハドロン生成過程には共通して現れる．また $\hat{\sigma}$ の高次効果のハードな部分は，パートンを供給するハドロンの種類やハドロンの波動関数などの低エネルギー効果に依存せず，対象とする素過程に特有の効果であることが QCD によって示されたことになる．このように，ハドロン-ハドロン反応においても，Q^2 で発展させたパートンモデルを使ってよいことが QCD によって裏づけられたわけである．

参 考 文 献

1) T. Muta : Foundations of Quantumchromodynamics, World Scientific (1987)
R.D. Field : Applications of Perturbative QCD, Addison Wesley (1989)
2) W.A. Bardeen *et al.* : *Phys. Rev.*, **D18** (1978) 3998
3) PDG ; Review of Particle Properties, *Phys. Rev.*, **D45** (1992), **D54** (1996), EPJ., **C3** (1998)
4) L.R. Surguladze and M.A. Samual : *Phys. Rev. Lett.*, **66** (1991) 560
Erratum : *ibid.*, **66** (1991) 2416
S.G. Gorishny, A.L. Kataev and S.A. Larin : *Phys. Lett.*, **B259** (1991) 144
5) Z. Kunszt : "Perturbative QCD", Proc. 1990 Theor. Ad. Study Institute in Elementary Particle Phys., eds. M. Cvetic and P. Langacker, p. 225, World Scientific, 1991

6) Yu. L. Dokshitzer : *Sov. Phys*., JETP46 (1977) 641
V.N. Gribov and L.N. Lipatov : *Sov. J. Nucl. Phys*., **15** (1972) 438 and 675
7) G. Altarelli and G. Parisi : *Nucl. Phys*., **B126** (1977) 298
8) L.N. Lipatov : *Soviet J. Nucl. Phys*., **20** (1975) 94
9) BEBC ; P.C. Bossetti *et al.* : *Nucl. Phys*., **B142** (1978) 1
CDHS ; J. De Groot *et al.* : *Phys. Lett*., **B82** (1979) 292
10) CDHS ; 9) と J. De Groot *et al.* : *Z. Phys*., **C5** (1980) 127.
11) BCDMS ; A.C. Benvenuti *et al.* : *Phys. Lett*., **B223** (1989) 485 and **B223** (1989) 490
12) G. Curuci, W. Furmanski and R. Petronzio : *Nucl. Phys*., **B175** (1980) 27
W. Furmanski and R. Petronzio : *Phys. Lett*., **B97** (1980) 437
13) WA70 ; M. Bonesini *et al.* : *Z. Phys*., **C38** (1988) 371
14) V. Barger, W.Y. Keung and R.J.N. Phillips : *Phys. Lett*., **B91** (1980) 253
15) G.R. Farrer : *Nucl. Phys*., **B77** (1974) 429
J.F. Gunion : *Phys. Rev*., **D10** (1974) 242
16) L.N. Lipatov : *Sov. J. Nucl. Phys*., **23** (1976) 338
17) P.N. Harriman, A.D. Martin, W.J. Stirling and R.G. Roberts : *Phys. Rev*., **D42** (1990) 798
J. Kwiecinski *et al.* : *Phys. Rev*., **D42** (1990) 3645
A.D. Martin, W.J. Stirling and R.G. Roberts : *Phys. Rev*., **D50** (1994) 6734 ; **D51** (1995) 4756 ; *Phys. Lett*., **B354** (1995) 155
18) CTEC ; J. Botts *et al.* : *Phys. Lett*., **B304** (1993) 159, *Phys. Rev*., **D51** (1995) 4763
GRV ; M. Gluck, E. Reya and A. Vogt : *Z. Phys*., **C67** (1995) 433
19) ZEUS ; M. Derrick *et al.* : *Phys. Lett*., **B316** (1993) 412
H1 ; DESY 96-039
20) J. Kubar-Andre and F.E. Paige : *Phys. Rev*., **D19** (1979) 221
J. Kubar-Andre, M. Le Bellac, J.L. Meunier and G. Plaut : *Nucl. Phys*., **B175** (1980) 251
G. Altarelli, R.K. Ellis and G. Martinelli : *Nucl. Phys*., **B143** (1978) 521 ; *Nucl. Phys*., **B146** (1978) 544 (e) ; *Nucl. Phys*., **B147** (1979) 461
21) R.K. Ellis and W.J. Stirling : Fermilab-Conf-90/104
E605 ; C. Brown *et al.* : *Phys. Rev. Lett*., **63** (1989) 2639
A.D. Martin *et al.* : *Phys. Lett*., **B206** (1988) 327
22) J.C. Collins and D.E. Soper : *Ann. Rev. Nucl. Part. Sci*., **37** (1987) 383

6
W ボ ソ ン

6.1 W, Zの 発 見

6.1.1 歴 史 的 背 景

ニュートリノ反応における中性カレントの発見で，GWS 理論は実験的な裏づけを得たように思える．しかし，決定的な証拠は W, Z ゲージボソンそのものの発見にある．中性カレント実験から得られた $\sin^2\theta_W$ の値から推察すると W の質量は 80 GeV 程度となる．当時稼働していた陽子加速器 (Fermilab, CERN の SPS ; super proton synchrotron) の最高エネルギーは 300 GeV であったが，衝突型ではなく固定標的を使用したから，得られる最高重心エネルギー $\sqrt{s}\sim\sqrt{2m_pE}\sim25$ GeV であり，W 生成には到底足りなかった．W 生成にはこの少なくも 3 倍以上の重心エネルギー，実験室系エネルギーとしては約 10 倍も必要である．したがって衝突型加速器を使うのが有利であるが，当時存在した陽子衝突型加速器の ISR (intersecting storage ring) は，$\sqrt{s}=32.5+32.5$ GeV でやはりエネルギーが不足であった．当時，計画中のイザベル (ISABELLE*[1) : pp 衝突型加速器，$\sqrt{s}=400$ GeV) や，LEP (large electron collider : CERN の e^+e^- 衝突型加速器，$\sqrt{s}=100$ GeV) はエネルギー的には十分であったが，実現は 1980 年代後半と見込まれ遠い将来の話であった．ルビア達は，W 生成を早く実現するために現存する CERN の固定標的用陽子加速器 SPS を衝突型に転換できないものかと考えた[1)]．衝突型にはビームが 2 本必要であるが，固定標的用陽子加速器にはビームを通すパイプは 1 個しかな

---

*1) その後，計画は中止になった．

いので，一つの加速器で2種の粒子を逆方向にまわして衝突型にするためには，他の粒子は反陽子でなければならない．衝突型は固定標的型に比べルミノシティ L（衝突断面積を σ として，$N=L\sigma$ が計数率を与えるような量）が圧倒的に小さい．しかも，反陽子は高エネルギー陽子を物質標的に当てて2次粒子としてつくるので，生成量が少ないうえに運動量・方向の両者とも乱雑に生成されので，加速に適した良好なビーム*2) とは到底いえない．この問題を解決したのがヴァン・デア・メーア（Van der Meer）によるビーム冷却および貯蔵の方法である[2]．この提案はCERNの採用するところとなり，SPSを転換して，$\sqrt{s}=540$ GeVの陽子反陽子衝突型加速器（Sp$\bar{\text{p}}$S）とし，1983年に見事に W および Z 粒子の発見に導いたのであった．この功績でルビアとヴァン・デア・メーアはノーベル賞を授けられている．

6.1.2 UA1 実 験

$W^{\pm}, Z^0$ 生成反応は陽子中のクォークおよび反陽子中の反クォークにより引き起こされる．

$$u+\bar{d}\to W^+, \quad u+\bar{s}\to W^+, \quad d+\bar{u}\to W^-, \quad s+\bar{u}\to W^-$$
$$u+\bar{u}\to Z^0, \quad d+\bar{d}\to Z^0, \quad s+\bar{s}\to Z^0 \tag{6.1 a}$$

W, Z の崩壊モードは，上式の逆反応およびレプトン崩壊反応

$$W^{\pm}\to e^{\pm}\nu, \quad \mu^{\pm}\nu, \quad \tau^{\pm}\nu$$
$$Z^0\to e^+e^-, \quad \mu^+\mu^-, \quad \tau^+\tau^-, \quad \nu\bar{\nu} \tag{6.1 b}$$

である．W, Z の同定は崩壊生成物を再構築して行われる．クォークへの分岐比の方が大きいが，クォークは単独では検出できずジェットとして認識するので，香りを同定するのはむずかしい*3)．また，ジェットの運動学変数の再構築

---

*2) 良好なビームとは，ビームの中の粒子の速さと方向が揃っていること．専門的には，ビーム中心軌道からの位置のズレを $\Delta x(\Delta y)$，方向のビーム軸からのズレを $\Delta x'(\Delta y')$ とし，粒子群が $(\Delta x, \Delta x')((\Delta y, \Delta y'))$ 空間で占める体積をエミッタンスという．エミッタンスの小さいビームが望ましい．

*3) 最近の測定器は，マイクロヴァーテックス検出器，またはRICH (ring image Cherenkov counter) を装備して，b クォークやチャームクォークを含むハドロンを同定できるようにできている．前者は衝突地点近くに10〜50μmの位置分解能をもつ半導体素子よりなる検出器を配備し，10^{-12}〜10^{-13}secの寿命をもつ粒子が崩壊する際につくるキンク（折れ曲がり）もしくはV字形の軌跡パターンを検出することにより，b もしくは c クォークを同定しようとするものである．RICHは高速荷電粒子が発するチェレンコフ

に関しては誤差が大きい．一方，レプトンの方は分岐比は小さいものの，粒子同定および運動学変数の再構築が比較的容易であるので雑音の少ないきれいなサンプルを得やすく，≳10 GeV 以上の 2 次粒子ができるような高エネルギー反応では，レプトン同定に狙いを絞るのが常套手段である．2 粒子状態への崩壊は，2 粒子のエネルギー運動量（$E_1; \boldsymbol{p}_1$, $E_2; \boldsymbol{p}_2$）を測定すれば，親のエネルギー運動量（$E_v = E_1 + E_2; \boldsymbol{p}_v = \boldsymbol{p}_1 + \boldsymbol{p}_2$）および質量 m_v が，原理的には次式により再構築可能である．

$$E_v = E_1 + E_2, \qquad \boldsymbol{p}_v = \boldsymbol{p}_1 + \boldsymbol{p}_2 \tag{6.2 a}$$

$$m_v^2 = (E_1 + E_2)^2 - (\boldsymbol{p}_1 + \boldsymbol{p}_2)^2 \tag{6.2 b}$$

最初に W, Z を検出した UA1 測定器の各粒子の簡単な検出原理を述べる．

a. 電子とフォトン

レプトンのうち，電子は荷電粒子であり磁場内の軌跡から運動量 $\boldsymbol{p}$ が測れる．また電磁カロリメターでシャワーを起こすので，エネルギー E をも測定できる．その比 E/p は電子ならば $=1$ を与えるが，他の粒子特に非常に大きな雑音源である π は，電磁カロリメータにはほとんどエネルギーを落とさず $E/p \ll 1$ となるので，基本的にはこれで電子同定が可能である．軌跡を残さず電磁シャワーを起こす粒子がフォトン（ほとんどは π^0 の崩壊 γ）である．

b. ハドロン

電磁カロリメター内でシャワーを起こさずハドロンカロリメター内でシャワーを起こす粒子がハドロンである．ほとんどが π 粒子である．エネルギーと方向が測れる．

c. ミューオン（μ）

μ は物質との相互作用ではイオン化損失反応しか起こさない．一方ハドロンや γ，電子はカロリメター内で物質と相互作用してシャワーを起こしてほぼ全エネルギーを失うので，十分な量の物質（カロリメター＋電磁石の鉄ヨーク）を通過してなおかつ生き残る粒子を μ と同定する．

＊3) のつづき　光を半導体の光センサで検出することにより，粒子種，特に π/K/p を識別する．b, c クォークを含むハドロンの特徴的な崩壊モードを見ることによって，b, c クォークを同定するものである．

d. ニュートリノ (ν)

ν は見えないエネルギー ($\not{E}$ と書く) として検出する．重心系では，全運動量の和は 0 であるので，観測されるすべての荷電粒子と中性粒子 (γ と中性ハドロン) のエネルギーベクトル (エネルギーと方向が測定できる) のベクトル和の符号を逆にしたものが，見えないエネルギーのベクトルを与える．ただし，個々の粒子の同定は不可能であり，解析にあたっては，同定不可能なすべての粒子を質量 0 の粒子 (または π) と見なすので，個々の粒子に関してはエネルギーベクトルと運動量ベクトルは同じである．見えないエネルギーを精密に測定するには，密閉性 (hermeticity)，つまりどんな粒子をも見逃さないように測定器に死角をつくらないことが大事である．それでも，ビームパイプに逃げる粒子は防げないので，ビーム軸に垂直な成分 $\not{E}_T$ についてのみ測定できる．

図 6.1 と図 6.2 に UA1 および UA2 測定器で得られた典型的な $W \to e\nu$ と $Z^0 \to e^+e^-$ 反応の事象を示す[3]．図 6.1 (a) では，粒子がたくさん放出されているように見えるが，ほとんどは低エネルギーの π 粒子 (ソフトグルーオン放出による QCD 雑音) で，ビーム軸に垂直な大きな運動量 (横運動量 $p_T > 15$ GeV) を要求すると消えてしまう．このことは η-ϕ 平面 (η はラピディティ，ϕ は方位角) に落ちたエネルギーを図示すると (図 6.1 (b)，図 6.2 (a)，このような図をレゴプロットと呼ぶ) 一目瞭然である．特に $Z^0 \to e^+e^-$ の場合は 180 度方向にエネルギーの等しい粒子が出ていることがわかる．Z の場合は，式 (6.2 b) による質量決定が容易で ~90 GeV と決められた．

これに比べると，W 崩壊はニュートリノを含むために同定がやや困難である．W 崩壊での見えないエネルギーが確かに W から崩壊したニュートリノであることを示すために，見えないエネルギーのベクトルの方向と大きさの電子のエネルギーベクトルに対する相関を図 6.3 に示す．電子の横エネルギー E_{eT} と $\not{E}_T$ の大きさが同じで，ビーム軸に垂直な平面上で 180 度逆方向に出ていることや，E_{eT} と $\not{E}_T$ の和の最大値が ~80 GeV で W の質量値にほぼ等しいことなどから $W \to e\nu$ であると確認できる．

かくして，W および Z という GWS 理論における最も重要な粒子が発見され，しかもその質量値は中性カレント反応から得られた $\sin^2\theta_W$ の値を使って

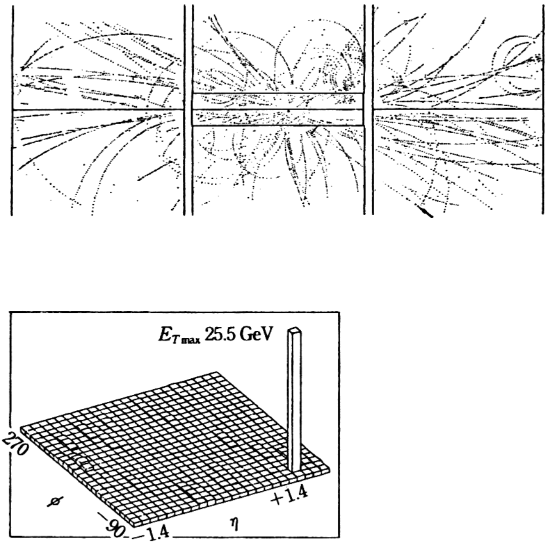


図 6.1 UA1 による W 粒子生成[3)]

(a) 荷電子粒子の軌跡．矢印は P_T の大きな電子．

(b) 各粒子のエネルギーを η-ϕ 平面にヒストグラムとして表したもの（レゴプロット）．η はラピディティである．1 個の電子だけがきわめて大きい P_T をもつことがわかる．

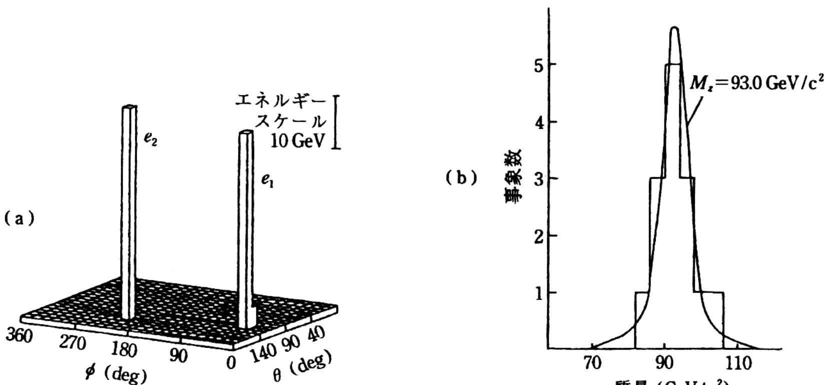
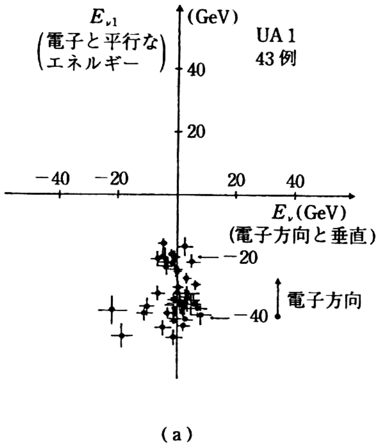


図 6.2 UA2 測定器による $Z^0 \to ee$ 過程[3)]

(a) ϕ-θ 面でのレゴプロット．2 個の電子の，ビーム軸に垂直なエネルギー E_T が，180°方向（ϕ が 180° 異なる）方向に放出されたのがわかる．ビーム軸に平行な方向の角度 (θ) には 180°の差はない．

(b) 14 例の Z^0 崩壊事象における e^+e^- の不変質量分布．$M_Z \fallingdotseq 93.0$ GeV とわかる．



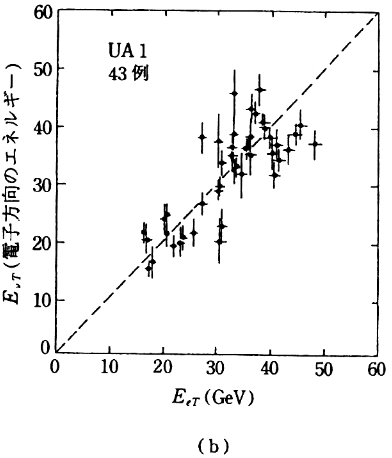


図 6.3 $q\bar{q}' \to W^\pm \to e^\pm + \nu$ 反応の同定[3)]

(a) 見えないエネルギーと電子の方向との相関．電子と反対方向に出ている．

(b) 見えないエネルギーと電子エネルギーの相関．

(a), (b) より $E_\nu = -E_e$, $\max(E_\nu + E_T) \sim M_W \fallingdotseq 80$ GeV がわかる．

予言した値 ($m_W = 37.5/\sin\theta_W$) と一致した．GWS 理論の正しいことを疑いの余地なく検証したものといえる．これ以後 GWS 理論は（電弱相互作用の）標準理論と呼ばれるようになる．

6.2 崩壊幅の計算

GWS 標準理論によればゲージボソンとフェルミオンの相互作用ラグランジアンは

$$-\mathcal{L}_I = eA_\mu J_{EM}{}^\mu + g_Z Z_\mu J_{NC}{}^\mu + \frac{g_W}{\sqrt{2}}(W_\mu{}^+ J_{CC}{}^\mu + \text{h.c.}) \tag{6.3 a}$$

$$g_Z = \frac{g_W}{\cos\theta_W} = \frac{e}{\sin\theta_W \cos\theta_W} \tag{6.3 b}$$

$$J_{EM}{}^\mu = Q\bar{\psi}\gamma^\mu\psi \tag{6.4 a}$$

$$J_{NC}{}^\mu = \bar{\psi}_L \gamma^\mu I_3 \psi_L - \sin^2\theta_W\, J_{EM}{}^\mu = \frac{1}{2}\bar{\psi}\gamma^\mu(v_f - a_f\gamma^5)\psi \tag{6.4 b}$$

$$v_f = I_{3L} - 2Q\sin^2\theta_W, \qquad a_f = I_{3L} \tag{6.4 c}$$

$$J_{CC}{}^\mu = \bar{\psi}_L \gamma^\mu I_+ \psi_L = \frac{1}{2}\sum V_{ij}\bar{\psi}_i \gamma^\mu (1-\gamma^5) I_+ \psi_j \tag{6.4 d}$$

$$m_W{}^2 = \frac{\pi\alpha}{\sqrt{2}G_F \sin^2\theta_W} \fallingdotseq (80.2\,\text{GeV})^2 \tag{6.5 a}$$

$$m_Z{}^2 = \frac{m_W{}^2}{\cos^2\theta_W} \fallingdotseq (91.2\,\text{GeV})^2 \tag{6.5 b}$$

$$\sin^2\theta_W \fallingdotseq 0.225 \tag{6.5 c}$$

で与えられる．I_{3L} は左巻き成分にのみ作用するという意味である．例えば $I_3 e_L = -1/2$, $I_3 e_R = 0$ である．Q は陽子電荷を単位としたフェルミオンの電荷の大きさ，V_{ij} は小林-益川行列（i, j がレプトンのときは $V_{ij} = \delta_{ij}$）である．トップクォークは W より重いから，W 粒子が実際に崩壊してできる粒子対は，(ν_e, e), (ν_μ, μ), (ν_τ, τ), (u, d'), (c, s') に限られる． ここに $d' = V_{1j}d_j$, $s' = V_{2j}d_j, \cdots$ である．

まず W のレプトン崩壊を考えよう．$W^+(q) \to l^+(p_1)\nu(p_2)$ 反応の崩壊行列は，W 粒子の偏光ベクトルを ε^μ として

$$\langle l^+(p_1),\ \nu(p_2)|T|W^+(q, \varepsilon)\rangle = -i(2\pi)^4\delta^4(q - p_1 - p_2)\mathcal{M}(W \to e\nu) \tag{6.6 a}$$

$$\mathcal{M}(W \to e\nu) = \frac{g_W}{\sqrt{2}}\bar{u}(p_2)\gamma^\mu\left(\frac{1-\gamma^5}{2}\right)v(p_1)\varepsilon_\mu \tag{6.6 b}$$

で与えられる．これから崩壊率を計算すると

$$\Gamma(W^+ \to l^+\nu) = \frac{1}{2m_W}\sum_{\substack{\text{スピン} \\ \text{pol}}}|\mathcal{M}|^2 \mathrm{d}LIPS \tag{6.7}$$

$$\mathrm{d}LIPS = (2\pi)^4\delta^4(q - p_1 - p_2)\frac{\mathrm{d}^3p_1\mathrm{d}^3p_2}{(2\pi)^6 2E_1 2E_2} \tag{6.8}$$

となる．ただし $\overline{\sum}$ はスピン和と偏極の平均を示す．フェルミオン波動関数のスピン和は付録 (B.19), (B.22) を使って

$$\begin{aligned} U &\equiv \sum_{\text{スピン}}|\bar{u}(p_2)\gamma^\mu(1-\gamma^5)v(p_1)\varepsilon_\mu|^2 = 4K_L{}^{\mu\nu}\varepsilon_\mu\varepsilon_\nu{}^* \\ &= 8[(p_2\varepsilon)(p_1\varepsilon^*) + (p_1\varepsilon)(p_2\varepsilon^*) - (p_1p_2)(\varepsilon\varepsilon^*) + i\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\varepsilon_\mu\varepsilon_\nu{}^* p_{1\rho}p_{2\sigma}] \end{aligned} \tag{6.9}$$

となる．

演習 6.1 $W^- \to e^-\bar{\nu}$ の場合は (6.9) の [⋯] の中の第 4 項の符号が変わるのみであることを示せ．

演習 6.2 レプトンの質量を無視すると，(6.9) は W^+ の静止系では

$$U=4m_W^2[1-(\boldsymbol{n}_1\cdot\boldsymbol{\varepsilon})(\boldsymbol{n}_1\cdot\boldsymbol{\varepsilon}^*)-i(\boldsymbol{\varepsilon}\times\boldsymbol{\varepsilon}^*\cdot\boldsymbol{n}_1)] \tag{6.10}$$
$$\boldsymbol{n}_1=\boldsymbol{p}_1/|\boldsymbol{p}_1|$$

となる．これから W の偏極状態 $\lambda=\pm1,0$ に対応してレプトンの角分布は偏極軸に対して，$\sim((1\pm\cos\theta)/2)^2, \sin^2\theta$ のようになることを示せ．

W が偏極していない場合は，偏極についての平均をとる必要がある．

$$\frac{1}{3}\sum_\lambda \varepsilon^\mu(\lambda)\varepsilon^\nu(\lambda)^*=\frac{1}{3}\left(-g^{\mu\nu}+\frac{q^\mu q^\nu}{m_W^2}\right) \tag{6.11}$$

これは，指標 $\mu\nu$ について対称であるので (6.9) の第 4 項は寄与しない．さらにレプトンの質量が 0 の近似では $q_\mu K_L^{\mu\nu}=0$ であることを使うと，$U=8q^2/3$ であることが示せる．行列要素が角度依存性を含まないので，dLIPS はそのまま積分できて，$dLIPS=1/8\pi$ となる．結局

$$\Gamma(W^\pm\to l^\pm\nu)=\frac{g_W^2 m_W}{48\pi}=\frac{G_F m_W^3}{6\sqrt{2}\pi}\equiv\Gamma_l \tag{6.12}$$

同様にクォークへ崩壊するときは，やはり質量を無視する近似で

$$\Gamma(W\to q_i\bar{q}_j)=N_c|V_{ij}|^2\Gamma_l=\frac{G_F m_W^3}{2\sqrt{2}\pi}|V_{ij}|^2 \tag{6.13}$$

ただし，N_c はカラー因子である．

演習 6.3 $W\to q_i\bar{q}_j$ とし，m_i, m_j を無視しないときは

$$\Gamma(W\to q_i\bar{q}_j)$$
$$=N_c|V_{ij}|^2\Gamma_l\lambda(1,x,y)\left[1-\frac{x+y}{2}-\frac{(x-y)^2}{2}\right] \tag{6.14}$$
$$\lambda(1,x,y)=(1+x^2+y^2-2xy-2x-2y)^{1/2} \tag{6.15}$$
$$x=m_i^2/m_W^2,\qquad y=m_j^2/m_W^2$$

であることを示せ (付録 (C.24) を使え)．

精密な値を求めるときは，QCD 補正を考慮する必要があり，

$$\Gamma(W\to q_i\bar{q}_j)\to\Gamma(W\to q_i\bar{q}_j)(1+\alpha_s(m_W^2)/\pi+\cdots) \tag{6.16}$$

とする．QCD 補正は $\alpha_s(m_W^2)/\pi\fallingdotseq0.036\pm0.005$ 程度である．これらの式を使って計算した W 崩壊の部分幅と分岐比を表 6.1 に示す．

表 6.1　W ボソンの崩壊幅と分岐比の計算値（$m_W=79.9$ GeV）

崩壊モード	部分幅（GeV）	分岐比（%）
$e\bar{\nu}$	0.223	10.8
$\mu\bar{\nu}$	0.233	10.8
$\tau\bar{\nu}$	0.233	10.8
$\bar{u}d(g)$	0.662	32.1
$\bar{c}s(g)$	0.661	32.1
$\bar{u}s(g)$	0.034	1.6
$\bar{c}d(g)$	0.034	1.6
$\bar{c}b(g)$	0.001	0.05
$\bar{u}b(g)$	0.000	0.00
	全幅 $\Gamma_W=2.09$ GeV	

6.3　W, Z のハドロン生成

Z の e^+e^- 反応による生成は第 7 章で述べることにし，ここではハドロン反応での W および Z^0 の生成について述べる．まず Z の生成を扱うことにする．

$$q(p_1)+\bar{q}(p_2)\rightarrow Z(q,\,\varepsilon(\lambda)) \tag{6.17}$$

の遷移行列および生成断面積は，次式のように表せる．

$$\langle Z(q,\,\varepsilon)|S|q(p_1)\,\bar{q}(p_2)\rangle=-i(2\pi)^4\delta^4(q-p_1-p_2)$$
$$\times\frac{g_Z}{2}\,\bar{v}(p_2)\gamma^\mu(v_f-a_f\gamma^5)u(p_1)\varepsilon_\mu{}^* \tag{6.18}$$

$$d\sigma(q\bar{q}\rightarrow Z)=\frac{1}{2\hat{s}\lambda}\frac{{g_Z}^2}{4}$$
$$\times\frac{1}{3}\frac{1}{4}\sum_{\substack{\text{スピン}\\ \text{pol}}}|\,\bar{v}(p_2)\gamma^\mu(v_f-a_f\gamma^5)u(p_1)\varepsilon_\mu{}^*|^2\mathrm{d}LIPS \tag{6.19 a}$$

$$\mathrm{d}LIPS=(2\pi)^4\delta^4(q-p_1-p_2)\frac{\mathrm{d}^3q}{(2\pi)^3 2\omega} \tag{6.19 b}$$

$$\hat{s}=(p_1+p_2)^2$$

ここで，$2\hat{s}\lambda=2\hat{s}\lambda(1,\,m_1{}^2/s,\,m_2{}^2/s)$ はフラックス因子で，パートンの質量を無視すれば $\lambda=1$ である．s でなく $\hat{s}$ と記したのは，入射粒子がパートンである

ことに注意を喚起するためである．偏極和の前の 1/3, 1/4 はカラーおよびスピンの平均をとることからくる因子である．偏極和の計算は崩壊幅の計算のときとまったく同一であるから容易に実行できて，

$$\sigma_Z = \frac{\pi}{3}\sqrt{2}G_N m_Z^2 (v_f^2 + a_f^2)\delta(\hat{s} - m_Z^2) \tag{6.20}$$

W のハドロン生成 $(q_i(p_1)\bar{q}_j(p_2) \to W(q))$ の断面積は，

$$g_Z \to V_{ij} g_W/\sqrt{2} \text{ (または } G_N m_Z^2 \to G_F m_W^2 |V_{ij}|^2/2)$$
$$v_f \to 1, \qquad a_f \to 1 \tag{6.21}$$

と置き換えればよいから

$$\sigma_W = \frac{\pi}{3}\sqrt{2}G_F m_W^2 |V_{ij}|^2 \delta(\hat{s} - m_W^2) \tag{6.22}$$

$p\bar{p}$ 反応では，$p, \bar{p}$ の運動量を p_A, p_B とおき，その中の $x_a p_A, x_b p_B$ の運動量をもつパートンが反応して $V = W, Z$ を生成する．$s = (p_A + p_B)^2$ とし，(6.20), (6.22) の断面積で，$\delta(\hat{s} - m_Z^2)$ を $\delta(x_a x_b s - m_V^2)$ と書き直したものを $\hat{\sigma}$ とおき[*4]，(5.145) の QCD の式を入れて，

$$\sigma(p(p_A)\bar{p}(p_B) \to VX) = K\int dx_a dx_b \sum_{a,b}[\{f_p{}^a(x_a, m_V) f_{\bar{p}}{}^b(x_b, m_V) + (a \leftrightarrow b)\}\ \hat{\sigma}(ab \to V)] \tag{6.23}$$

$$\hat{\sigma}(ab \to Z) = \frac{\pi}{3}\sqrt{2}G_N m_Z^2 (v_f^2 + a_f^2)\delta(s x_a x_b - m_Z^2) \tag{6.24 a}$$

$$\hat{\sigma}(ab \to W) = \frac{\pi}{3}\sqrt{2}G_F m_W^2 |V_{ij}|^2 \delta(s x_a x_b - m_W^2) \tag{6.24 b}$$

ここに，K は，ドレル-ヤン効果に現れたのと同じ K 因子 (5.141) であり，QCD の高次効果を含めると現れる因子である．計算によれば[4,5]

$$\sigma(p\bar{p} \to W^+X) = \sigma(p\bar{p} \to W^-X) = 2.7^{+0.8}_{-0.4}\,nb \quad \sqrt{s} = 630\ \text{GeV}$$
$$9.5^{+2.5}_{-1.8}\,nb \quad \sqrt{s} = 1.8\ \text{TeV} \tag{6.25}$$
$$\sigma(p\bar{p} \to ZX) = 1.7^{+0.5}_{-0.3}\,nb \quad \sqrt{s} = 630\ \text{GeV}$$
$$5.8^{+1.6}_{-1.0}\,nb \quad \sqrt{s} = 1.8\ \text{TeV} \tag{6.26}$$

*4)　実際の W, Z には幅があるので，

$$\delta(\hat{s} - m^2) \longrightarrow \frac{m\Gamma}{\pi}\frac{1}{(\hat{s} - m^2)^2 + m^2\Gamma^2}$$

のような置き換えをする．

実際の観測は，$W^+ \to e^+\nu$ と $W^- \to e^-\bar{\nu}$ モードの和（分岐比 10.8%×2），および $Z \to e^+e^-$（分岐比 3.34%）モードを通し，電子および陽電子を観察することによって行った．計算結果と実験値を図 6.4 および表 6.2 に示す．ただし，QCD 計算は，グルーオン放出を含む $O(\alpha_s)$ までの近似（後述，§6.6）を採用している．QCD の高次効果まで含めた W, Z の生成断面積計算はデータをほぼ再現するといってよいであろう．

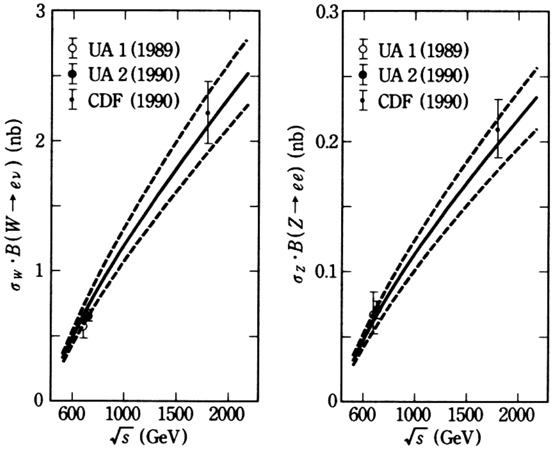


図 6.4 (a) $\sigma(\bar{p}p \to W)BR(W \to e\nu)$
(b) $\sigma(\bar{p}p \to Z)BR(Z \to ee)$ のデータと QCD 計算値[6,7]
計算のパラメターは $M_W=80$, $M_Z=91.16$ GeV，パートン分布関数は HMRS (B)．ダッシュ線は ±10% の理論的不定性．主として $O(\alpha_s^2)$QCD 補正と分布関数の不定性が原因．

表 6.2 $\sigma(p\bar{p} \to WX)BR(W \to e\nu)$, $\sigma(p\bar{p} \to ZX)BR(Z \to e^+e^-)$ の UA2[6,8], CDF[7] のデータと計算値[9]

モード	$\sqrt{s}$(GeV)	グループ	$\sigma \cdot B$(nb)	理論値
			(stat) (sys)	
$W \longrightarrow e\nu$	630	UA2	0.682±0.012±0.040	0.75
	1800	CDF	2.19±0.04 ±0.21	2.34
$Z \longrightarrow e\bar{e}$	630	UA2	0.0656±0.004±0.0038	0.0728
	1800	CDF	0.209±0.013±0.017	0.220

6.4 スピンの決定

W のスピンを知るには，W から崩壊して出る電子の角分布をみる必要がある．中間状態として W を経過するという条件で，2体反応

$$d(p_1)+\bar{u}(p_2)\to e^-(p_3)+\bar{\nu}(p_4) \tag{6.27 a}$$

$$u(p_1)+\bar{d}(p_2)\to e^+(p_3)+\nu(p_4) \tag{6.27 b}$$

の断面積を計算する．

$$\begin{aligned}&\langle e(p_3)\bar{\nu}(p_4)|T|d(p_1)\bar{u}(p_2)\rangle\\&=(2\pi)^4\delta^4(p_1+p_2-p_3-p_4)\left(\frac{-ig_W}{\sqrt{2}}\right)^2 V_{ud}{}^*\,\bar{u}(p_3)\gamma^\mu\frac{1-\gamma^5}{2}v(p_4)\\&\quad\times\frac{(i)\left(-g_{\mu\nu}+\dfrac{q_\mu q_\nu}{m_W{}^2}\right)}{\hat{s}-m_W{}^2+im_W\Gamma_W}\bar{v}(p_2)\gamma^\nu\frac{1-\gamma^5}{2}u(p_1)\end{aligned} \tag{6.28}$$

レプトンやクォークの質量を無視すると，

$$d\sigma_{W\to e}=\frac{1}{2\hat{s}}\left[\frac{g_W{}^2}{8}\right]^2\left(\frac{4}{3}\right)|V_{ud}|^2\frac{K_L{}^{\mu\nu}(p_4,p_3)K_{L\mu\nu}(p_1,p_2)}{(\hat{s}-m_W{}^2)^2+m_W{}^2\Gamma_W{}^2}\,\mathrm{d}LIPS \tag{6.29 a}$$

$$K_L{}^{\mu\nu}(p_1,p_2)=\frac{1}{4}\sum_{\text{spin}}\bar{v}(p_2)\gamma^\mu(1-\gamma^5)u(p_1)\left[\bar{v}(p_2)\gamma^\nu(1-\gamma^5)u(p_1)\right]^* \tag{6.29 b}$$

付録 (B.23) を使えば

$$K_L{}^{\mu\nu}(p_4,p_3)K_{L\mu\nu}(p_1,p_2)=16(p_1p_4)(p_2p_3)=4\hat{u}^2 \tag{6.30 a}$$

$$\hat{u}=(p_1-p_4)^2=-\frac{\hat{s}}{2}(1+\cos\theta) \tag{6.30 b}$$

であるから，

$$\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega}=\frac{1}{3}\left(\frac{G_Fm_W{}^2}{\sqrt{2}}\right)^2|V_{ud}|^2\frac{1}{16\pi^2}\frac{\hat{s}(1+\cos\theta)^2}{(\hat{s}-m_W{}^2)^2+m_W{}^2\Gamma_W{}^2} \tag{6.31}$$

を得る．ただし θ は d（すなわち陽子）と e^- がなす角である．陽電子生成の式は $\hat{u}\to\hat{t}$，すなわち $1+\cos\theta\to(1-\cos\theta)$ として得られる．全断面積 $\sigma_{W\to e}$ は (6.31) を積分して

$$\sigma_{W\to e}=\frac{|V_{ud}|^2}{9\pi}\left(\frac{G_Fm_W{}^2}{\sqrt{2}}\right)^2\frac{\hat{s}}{(\hat{s}-m_W{}^2)^2+m_W{}^2\Gamma_W{}^2} \tag{6.32}$$

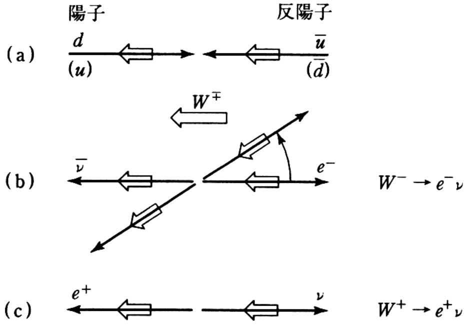


図 6.5 $p+\bar{p} \to W^{\mp}X \to e^{\mp}\nu$ で角分布が $(1\pm\cos\theta)^2$ になることの定性的説明 (p 方向を z 軸にとる). 弱相互作用のもつ V-A 結合により, 粒子は左巻きが, 反粒子は右巻きのみが関与する.

(a) $d+\bar{u} \to W^-$, $u+\bar{d} \to W^+$ いずれもヘリシティは逆方向, スピンの向きは陽子の進むのと逆方向. $J_z=-1$ のみ.

(b) $e^-\bar{\nu}$ が $J_z=-1$ をつくるためには電子が前方に, (c) $e^+\nu$ が $J_z=-1$ をつくるためには陽電子が後方に放出されれば角運動量は完全に保存する. この説明は $\nu e \to \nu e$, $\bar{\nu}e \to \bar{\nu}e$ で角分布が等方的, $(1+\cos\theta)^2$ になるのと同じ理由であることを示す (注: $V+A$ でも同じ角分布になることに注意).

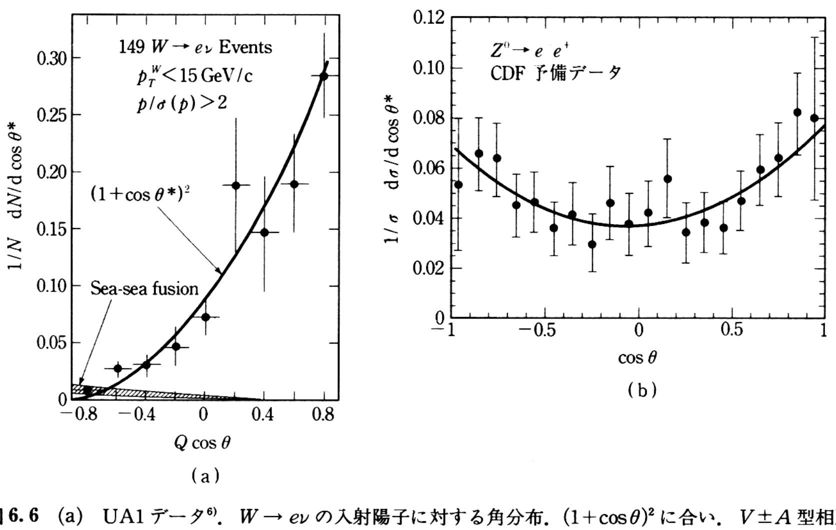


図 6.6 (a) UA1 データ[6]. $W \to e\nu$ の入射陽子に対する角分布. $(1+\cos\theta)^2$ に合い, $V\pm A$ 型相互作用であることを示す.

(b) CDF[10] $Z \to ee$ 分布. 曲線は $\sin^2\theta_W=0.231$ とした標準理論値.

(6.31) の角分布 $(1\pm\cos\theta)^2$ は，回転関数 $d^1_{\mp1,-1}(\theta)$ の自乗に比例することに留意しよう．この事実は弱い相互作用の特徴の V-A 構造から容易に理解ができる．電子は $d\bar{u}\rightarrow W^-\rightarrow e^-\bar{\nu}_e$ より，陽電子は $u\bar{d}\rightarrow W^+\rightarrow e^+\nu_e$ よりつくられる．V-A によって，d, u のヘリシティは負，$\bar{u}, \bar{d}$ のヘリシティは正であるから，$W^{\mp}$ は陽子 p の方向を z 軸としたときに $S_z=-1$ をもってつくられる (図 6.5 参照)．$e^-(e^+)$ は負 (正) のヘリシティをもつから $e^-(e^+)$ は $\theta=0^\circ(180^\circ)$ の方向に出るとき角運動量の第 3 成分が保存され，$\theta=180^\circ(0^\circ)$ のときに角運動量が保存しない．

$q\bar{q}\rightarrow Z\rightarrow e\bar{e}$ の散乱断面積も同様の計算により

$$\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega}=\frac{1}{3}(\sqrt{2}G_N m_Z{}^2)^2\frac{\hat{s}}{16\pi^2}\frac{[A(1+\cos\theta^2)+B\cos\theta]}{(\hat{s}-m_Z{}^2)^2+m_Z{}^2\Gamma_Z{}^2} \tag{6.33 a}$$

$$A=(1/4)[(v_e{}^2+a_e{}^2)(v_f{}^2+a_f{}^2)]$$

$$B=2v_e a_e v_f a_f \tag{6.33 b}$$

と求められる．W, Z 崩壊からのレプトン角分布データとの比較を図 6.6 に示す．データは，理論予想値とよくあっており，W, Z のスピンが 1 であること，また W は V-A, Z は V, A の線型和の相互作用をすることなどを示している．

6.5　W の質量と幅の決定

6.5.1　質　　　量

a.　崩壊レプトンの横運動量分布

式 (6.31), (6.32) から

$$\frac{\mathrm{d}\sigma_{W\rightarrow e\mp}}{\mathrm{d}\cos\theta}=\sigma_{W\rightarrow e}\frac{3}{8}(1\pm\cos\theta)^2 \tag{6.34}$$

と書けるから，電子の横運動量 $\hat{p}_T$ 分布は

$$\hat{p}_T{}^2=\hat{p}^2\sin^2\theta=\frac{\hat{s}}{4}(1-\cos^2\theta) \tag{6.35}$$

を使えば

$$\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\hat{p}_T{}^2}=\frac{2}{\hat{s}\cos\theta}\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\cos\theta}=\frac{3}{4}\sigma_{We}\frac{1+\cos^2\theta}{\hat{s}\cos\theta}$$

$$=\frac{3}{2}\frac{\sigma_{We}}{\hat{s}}\frac{(1-2\hat{p}_T{}^2/\hat{s})}{(1-4\hat{p}_T{}^2/\hat{s})^{1/2}} \tag{6.36}$$

$\hat{p}_T$ は $\theta \leftrightarrow \pi-\theta$ で対称であるから $\cos\theta$ 項は寄与しない．上式は $\hat{p}_T=\sqrt{\hat{s}}/2$ のところで無限大になる．この無限大はジャコビアン頂上 (Jacobian peak) と呼ばれ，2体の運動学に現れる特徴である (図 6.7 (a))．$\hat{p}_T$ 分布が $m_W/2$ のところで急激に切れるため，m_W の決定に役に立つ．もし W をつくるパートンが横運動量をもたなければ，実験室で観察される崩壊電子の p_T は上で与えた $\hat{p}_T$ に等しい．実際はパートンの分布について積分するので特異性はなくなり有限の高さとなる (図 6.7 (b))．次に，W が横運動量をもつとすると，その分だけ p_T 分布がさらにぼけるので p_T 分布から W の質量を正確に決めるのはややむずかしくなる．このときは，p_T 分布に左右されにくい変数として次の横質量 m_T を使う．

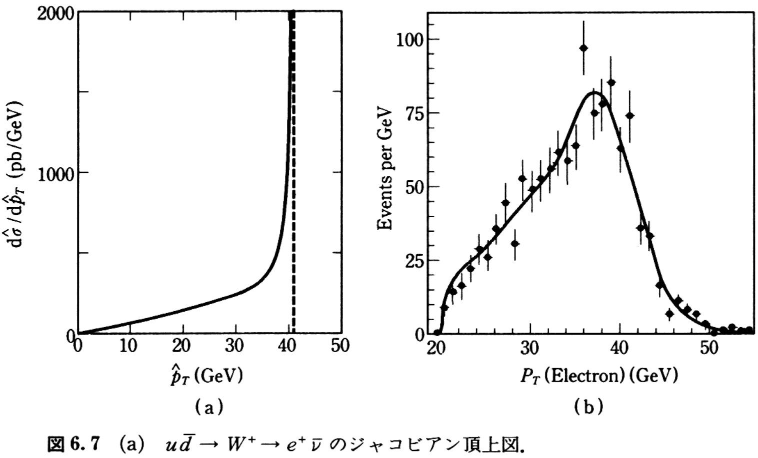


図 6.7 (a) $u\bar{d} \to W^+ \to e^+\bar{\nu}$ のジャコビアン頂上図．
(b) Γ_W, p_{WT} のあるおかげで滑らかな曲線になる．データは UA2[6,8]．

b. 横質量分布

衝突型加速器実験ではビームパイプの存在のため前方に放出されたジェットを完全に捕まえるのはむずかしく，反応2次生成粒子の縦方向の運動量バランスは得られない．しかし，横方向の運動量は効率よく観測できるので，見えない運動量 $\not{\boldsymbol{p}}_T=-$(見える横運動量ベクトルの総和) は貴重な情報であり，特に $W\to e\nu$ 反応の場合は，ν の横運動量と見なせる．すなわち，$\not{\boldsymbol{p}}_T=\boldsymbol{p}_{\nu T}$ であ

る．そこで横質量 m_T を

$$m_T{}^2(e,\nu)\equiv(|\boldsymbol{p}_{\nu T}|+|\boldsymbol{p}_{eT}|)^2-(\boldsymbol{p}_{\nu T}+\boldsymbol{p}_{eT})^2$$
$$=2|\boldsymbol{p}_{\nu T}||\boldsymbol{p}_{eT}|(1-\cos\Delta\phi) \qquad (6.37)$$

で定義する．ただし，$\Delta\phi$ はビーム軸に垂直な平面における $\boldsymbol{p}_{\nu T}$ と $\boldsymbol{p}_{eT}$ とのなす角である．正確な不変質量

$$m_W{}^2=m^2(e,\nu)=(|\boldsymbol{p}_\nu|+E_e)^2-(\boldsymbol{p}_\nu+\boldsymbol{p}_e)^2 \qquad (6.38)$$

と比較すれば m_T は 0 と m_W の間にあることが示せる．特に $\boldsymbol{p}_{WT}=0$ のときは，m_T は $2|\not{p}_{eT}|$ に等しいので，m_T 分布は，(6.36) の $\hat{p}_T\rightarrow m_T/2$ としたものに等しく，p_T 分布と同じようにジャコビアン頂上が現れる．このとき

$$\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}m_T{}^2}\sim\frac{1}{(\hat{s}-m_W{}^2)^2+m_W{}^2\Gamma_W{}^2}\frac{(2-m_T{}^2/\hat{s})}{(1-m_T{}^2/\hat{s})^{1/2}} \qquad (6.39)$$

と表される．W が横運動量もっている場合でも $\mathrm{Max}(m_T)=m_W/2$ は変わらないから，m_T 分布の終端点付近の分布から，m_W が p_T 分布よりは正確に求められる（ただし，崩壊幅 Γ_W による広がり効果は考慮にいれる必要がある)．データの精度が十分上がれば，Γ_W も決めることができるであろう．図 6.8 に UA2 グループのデータ[8] と m_W, Γ_W を適切にとったときの理論値を示す．実験的に決められた値は

$$\begin{aligned}(m_T)\ \text{分布から}\quad & m_W=80.79\pm0.31(\mathrm{stat})\pm0.21(\mathrm{sys})\\ (p_{eT})\ \text{分布から}\quad & m_W=80.85\pm0.38(\mathrm{stat})\pm0.30(\mathrm{sys})\\ (p_{\nu T})\ \text{分布から}\quad & m_W=80.48\pm0.41(\mathrm{stat})\pm0.47(\mathrm{sys})\end{aligned} \qquad (6.40)$$

m_T 分布から得られる質量値が最も小さい統計誤差と系統誤差をもつことがわ

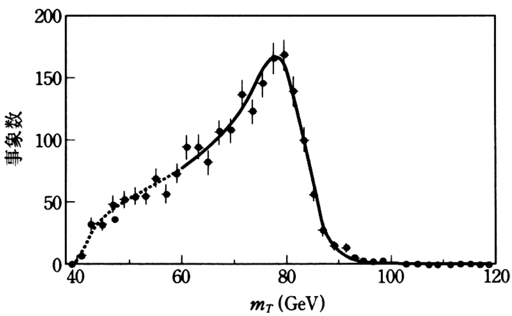


図 6.8　$W\rightarrow e_\nu$ の m_T 分布（データ，図 6.7 に同じ）

かる．まとめて

$$m_W=80.79\pm0.31(\mathrm{stat})\pm0.21(\mathrm{sys})\pm0.81(\mathrm{scale}) \tag{6.41}$$

ここで (6.41) のスケール誤差とは電子の運動量と見えない運動量の絶対値を決めるため，同じ測定器で Z の質量を測り，それを一番信頼できると思われる LEP の Z の質量値と比較して補正することによる誤差である．この方法により決めた W 質量の最近の世界値は[11]

$$m_W=80.41\pm0.10 \tag{6.42}$$

となる．

6.5.2　Γ_W

m_T 分布において，m_W と Γ_W をパラメターとすることにより，Γ_W を決めることができる．CDF グループは m_T 分布をだした同じデータから

$$\Gamma_W=2.11\pm0.28(\mathrm{stat})\pm0.10(\mathrm{sys}) \tag{6.43}$$

を得ている[12]．しかし多少の理論情報を使えば，はるかに正確に Γ_W を決めることができる．これは観測量の絶対値を正確に決めることはむずかしいが，比は比較的容易に決められることを利用する．R を W 崩壊と Z 崩壊から得られる電子数の比とすると

$$R\equiv\frac{W\to e\nu\ \text{の崩壊数}}{Z\to e\bar{e}\ \text{の崩壊数}}=\frac{\sigma_W\cdot\Gamma(W\to e\nu)}{\sigma_Z\cdot\Gamma(Z\to e\bar{e})}\cdot\frac{\Gamma_Z}{\Gamma_W} \tag{6.44}$$

レプトン崩壊幅の比の理論計算は信頼してよいであろう．W,Z 生成断面積の理論計算には，パートン分布その他の不定性はあるものの，比に関してはかなり誤差の評価が可能である．例えば，理論評価としては[13]，

$$\frac{\Gamma(W\to e\nu)}{\Gamma(Z\to e\bar{e})}=2.710\pm0.018,\qquad \frac{\sigma_W}{\sigma_Z}=3.33\pm0.03 \tag{6.45}$$

を使い，R の実験値[14]

$$R=10.90\pm0.32(\mathrm{stat})\pm0.29(\mathrm{sys}) \tag{6.46}$$

を入れて Γ_W/Γ_Z を計算した上で，Γ_Z として最近の LEP データ[15]

$$\Gamma_Z=2.4963\pm0.0032\ \mathrm{GeV} \tag{6.47 a}$$

$$\Gamma(Z\to e\bar{e})=83.93\pm0.14\ \mathrm{MeV} \tag{6.47 b}$$

を代入すると

$$\Gamma_W = 2.06 \pm 0.06\ \mathrm{GeV} \tag{6.48}$$

が得られる[11]．これらはいずれも標準理論による計算（表 6.1）と非常によく合っている．実験的に，より正確な Γ_W の値は，LEP200[*5] において W 対生成から決められるであろうが，それまではこの方法が最もよい精度を与えると考えられる．

6.6　W の横運動量分布

6.6.1　グルーオン放出効果

QCD 効果を入れて Q^2 発展をとり入れたパートン分布でも，クォークに平行に放出されたグルーオンの効果しか入っていないから，最低次の効果 $(q+\bar{q} \to W)$ を考える限り，パートン衝突反応で生成された W は横運動量 p_T をもたない．すなわち理論的には，ハードグルーオン放出を入れてはじめて横運動量の導入が可能となる．ただし，パートンが核子の中で本来もっている運動量 (primordial momentum～350 MeV)[*6] は，ここでは無視する．p_T 分布を導入するために QCD の高次効果を考える．クォーク消滅過

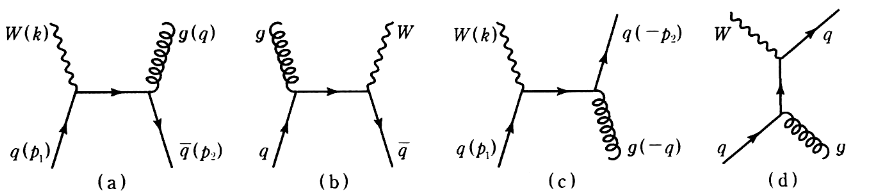


図 6.9　ハドロンによる W 生成の QCD の $O(\alpha_s)$ 効果は，W 粒子とグルーオンによるコンプトン効果およびその交叉と見なせる．
(a), (b)　$q\bar{q} \longrightarrow Wg$　　(c), (d)　$qg \longrightarrow Wq$

---

*5)　LEP のエネルギーを，$\sqrt{s}$～200 GeV に増強する計画

*6)　深非弾性散乱データよりクォークのもつ平均運動量は核子の～1/3 であるから，ナイーヴに考えると，

$$\langle p_T{}^2 \rangle = \langle p_x{}^2 \rangle + \langle p_y{}^2 \rangle \sim (2/3)(m_p/3)^2 \sim (0.26\ \mathrm{GeV})^2$$

である．生成反応では 2 個のクォークが関与するので，$\sqrt{2}\times 0.26 \sim 0.36$ GeV となる．この値は，高エネルギー pp 反応で生成される π が平均横運動量～350 MeV をもつ実験事実とも整合する．

程とグルーオンコンプトン散乱（図 6.9）による W 生成断面積は，深非弾性散乱で考慮した高次過程の交叉（$\gamma^* \leftrightarrow W$）から得られるから（図 5.13 参照），断面積は次のように書ける[5]．

$$\frac{\mathrm{d}\hat{\sigma}}{\mathrm{d}t}(q\bar{q} \to Wg) = \frac{4}{9}\alpha_s \frac{G_F m_W{}^2}{\sqrt{2}} \frac{|V_{ij}|^2}{\hat{s}^2}\left[\frac{\hat{u}}{\hat{t}} + \frac{\hat{t}}{\hat{u}} + \frac{2m_W{}^2\hat{s}}{\hat{t}\hat{u}}\right] \tag{6.49}$$

$$\frac{\mathrm{d}\hat{\sigma}}{d\hat{t}}(qg \to Wq) = \frac{1}{6}\alpha_s \frac{G_F m_W{}^2}{\sqrt{2}} \frac{|V_{ij}|^2}{\hat{s}^2}\left[-\frac{\hat{s}}{\hat{t}} - \frac{\hat{t}}{\hat{s}} - \frac{2m_W{}^2\hat{u}}{\hat{t}\hat{s}}\right] \tag{6.50}$$

後で使うので，$\hat{s}, \hat{t}, \hat{u}$ を $q\bar{q} \to gW$ 重心系の変数で書き直しておくと

$$\hat{s} = (p_1 + p_2)^2 = 4|\boldsymbol{p}|^2$$

$$\hat{t} = (p_2 - q)^2 = -2|\boldsymbol{p}||\boldsymbol{k}|(1 - \cos\theta)$$

$$\hat{u} = (p_1 - q)^2 = -2|\boldsymbol{p}||\boldsymbol{k}|(1 + \cos\theta)$$

$$\hat{t}_{\max} = -(\hat{s} - m_W{}^2), \qquad \hat{t}_{\min} = 0$$

$$p_T{}^2 = |\boldsymbol{k}|^2 \sin^2\theta = \frac{\hat{t}\hat{u}}{\hat{s}} \tag{6.51}$$

である．ただし，$|\boldsymbol{p}|, |\boldsymbol{k}|, \cos\theta$ は，$q\bar{q} \to gW$ の重心系での散乱前後の運動量，散乱角である．(6.49)，(6.50) のどちらも $p_T \to 0$ で $d\sigma \sim p_T{}^{-2}$ のような特異項を与えるので，$O(\alpha_s)$ のみをとる限り $p_T \to 0$ で発散する．これは，赤外発散の一例であり，高次効果を正しく計算すれば消えるはずのものである．このことを念頭において，第 5 章で導入したプラス関数を用い，$p_T \to 0$ で集束するような形に書き直すことができ下記のような形をとる[16]．

$$\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}p_T{}^2} \fallingdotseq \{\sigma_0(1+A)\delta(p_T{}^2) + Y(p_T{}^2)\}$$

$$+\{B[\ln(m_W{}^2/p_T{}^2)/p_T{}^2]_+ + C/(p_T{}^2)_+\}$$

$$B = \frac{4}{3}\frac{\alpha_s(p_T{}^2)}{\pi}[1 + D\alpha_s(p_T{}^2) + \cdots]$$

$$C = -2\frac{\alpha_s(p_T{}^2)}{\pi}[1 + E\alpha_s(p_T{}^2) + \cdots]$$

$$D = \frac{1}{2\pi}\left[\frac{67}{6} - \frac{\pi^2}{2} - \frac{5N_f}{9}\right] \fallingdotseq 0.55(N_f = 5) \tag{6.52}$$

この表式には $O(\alpha_s{}^2)$ までの計算結果をも含めてある．ここで，σ_0 はボルン近似の全断面積であり，A は後で全断面積がデータを再現するように決める．B, C は，α_s の p_T 依存性を無視する限り $O(\alpha_s{}^2)$ まで p_T によらない定数であ

る．E の寄与は数値的には重要でない．$\delta(p_T{}^2)$ はデルタ関数であり，Y 関数は $p_T{}^2=0$ で正則な関数である．B, C 項の＋関数は，$p_T{}^2$ に関しての積分が有限になるように正則化した関数で，$g(x)$ を性質のよい任意の関数として

$$\int_0^{p_T{}^2{}_{\max}} \mathrm{d}x g(x) f(x)_+ \equiv \int_0^{p_T{}^2{}_{\max}} \mathrm{d}x [g(x)-g(0)] f(x) \tag{6.53}$$

で与えられる．(6.52) を積分すれば，

$$\sigma_{\mathrm{TOT}} = \sigma_0(1+A) + \int_0^{p_T{}^2{}_{\max}} \mathrm{d}x Y(x) \tag{6.54}$$

となるので，データと比較して A を決める．グルーオン放出が横運動量を与えるという図式は QCD の一般的特徴である．(6.52) の表式の中の B 項は，対数第 1 近似で求めた $e^+e^- \to q\bar{q}$ ＋グルーオンの p_T 分布と同じであることに留意しよう（第 5 章 QCD (5.75) 参照）．

$p\bar{p}$ 反応による断面積は，上記の断面積に $Q^2=m_W{}^2$ まで発展させたパートン分布を掛けて積分すれば得られる．図 6.10 (a) に CDF データ[17] と QCD の $O(\alpha_s{}^2)$ 計算[18] との比較を示す．$p_T{}^2$ の大きいところでのデータの再現性はよい．

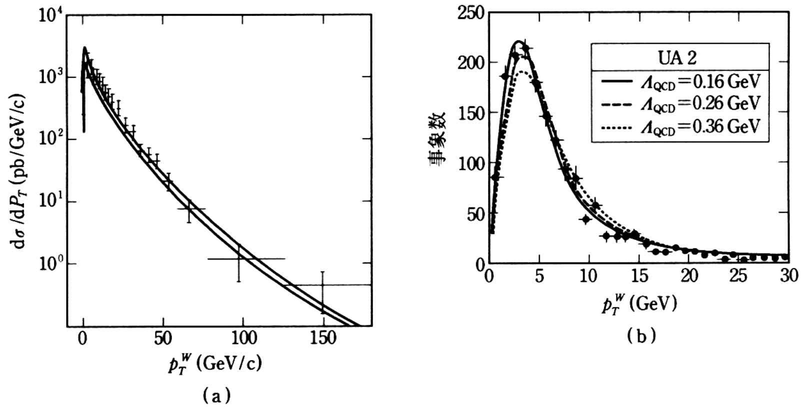


図 6.10　W 生成の $\mathrm{d}N/\mathrm{d}p_T{}^2$ 分布

(a)　$\sqrt{s}=1800$ GeV での CDF データ[17]，(b)　$\sqrt{s}=630$ GeV，$p_T \fallingdotseq 0$ 付近の UA2 データ[6] を QCD 第 2 近似計算と比較する．(b) 図の計算は，ソフトグルーオン和を考慮したもの．

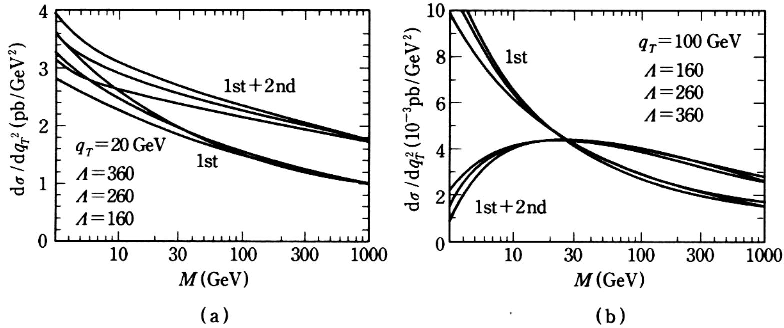


図 6.11　$d\sigma/dp_T{}^2(p\bar{p}\to W^{\pm}X)$ 生成断面積のスケール ($\mu=M$) 依存性[18]
図 (a) は $p_T=20$ GeV, 図 (b) は $p_T=100$ GeV での値を示す．3 種類の曲線はそれぞれ $\Lambda_{\overline{MS}}$ の値 (MeV 単位) を変えたときの変化である．

6.6.2　グルーオン多重発生効果

p_T の大きいところ (p_T が m_W に比べてそれほど小さくないとき) は，p_T 分布および全断面積は $O(\alpha_s)$ と $O(\alpha_s{}^2)$ の摂動計算でよく再現される．しかし，$p_T \ll m_W$ のときは再現性がよくない．このことは，QCD 計算のスケール依存性を見てもわかる．図 6.11 に断面積のスケール依存性を示すが[18]，$p_T \lesssim 20$ GeV では，スケール依存性による不定性が大きく，QCD 摂動計算の近似が悪くなることを示している．この原因は，摂動計算で切り捨てた項は $p_T{}^2 \gtrsim m_W{}^2$ のときのみ無視できるという事情による．p_T が小さくなるとソフトグルーオンの多重発生 ($\sim[\ln(p_T{}^2/m_W{}^2)]^n$) が無視できない．幸いなことに，$p_T{}^2 \to 0$ のときは，これらの項の和をとることができて有限な項を与える．その場合，(6.52) に対応する p_T 分布は次のように変更される[16]．

$$\frac{d\sigma}{dp_T{}^2} \fallingdotseq Y(p_T{}^2) + \int \frac{d^2b}{4\pi}[\exp(-i\boldsymbol{p}_T\cdot\boldsymbol{b}_T)]\sigma_0(1+A)\exp(S(b)) \tag{6.55 a}$$

$$S(b) = \int_0^{p_T{}^2{}_{\max}} \frac{dk^2}{k^2}\left\{B\ln\left(\frac{m_W{}^2}{k^2}\right)+C\right\}[J_0(bk)-1] \tag{6.55 b}$$

となる．J_0 は 0 次のベッセル関数である．上式は，$p_T{}^2=0$ で正則であり，かつ $p_T{}^2$ の大きいところでは摂動計算の式 (6.52) を再現するという特徴をもつ．(6.55) を $p_T{}^2$ について積分すると $\delta^2(\boldsymbol{b})$ がでてくるので，$S(0)=0$ を考慮

すれば，

$$\sigma_{\mathrm{TOT}}=\int\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}p_T{}^2}\,\mathrm{d}p_T{}^2=\int d^2b\delta^2(\boldsymbol{b})\sigma_0(1+A)\exp(S(b))+\int_0^{p_T{}^2{}_{\max}}\mathrm{d}xY(x)$$
$$=\sigma_0(1+A)+\int_0^{p_T{}^2{}_{\max}}\mathrm{d}xY(x) \qquad (6.56)$$

となって，(6.54) を再現する．図 6.10 (b) に，p_T の小さいところでのデータ[6]との比較を示す．データをよく再現していることがわかる．

6.6.3　$\langle p_T{}^2\rangle$ の振る舞い

$p_T{}^2$ の平均値 $\langle p_T{}^2\rangle$ は式 (6.55) から求めることができ[19]，

$$\langle p_T{}^2\rangle=\alpha_s(m_W{}^2)\cdot s\cdot f(\tau,\ln m_W{}^2)+C \qquad (6.57)$$
$$\tau=m_W{}^2/s$$

という形をもつ．この関係式は τ を固定したとき $\langle p_T\rangle\propto\sqrt{s}$ を意味する．このことは定性的には，摂動計算式の振る舞い $(d\sigma/dp_T{}^2\sim p_T{}^{-2})$ から容易に理解できることである．なぜなら，$\langle p_T{}^2\rangle$ は，$p_T{}^2$ に断面積を掛け積分して得られ，かつ $p_T{}^2{}_{\max}\fallingdotseq s$ であるから．一方，$p_T{}^2$ の小さいところはべき級数の和をとっているので，摂動論から予想される線形関係からずれてくることが期待される．

ここで W 生成過程は，ドレル-ヤン過程で仮想フォトンを W で置き換えたものと同等であることに着目する．ドレル-ヤン過程と W 放出過程の差は，μ 対の不変質量 m が m_W に置き代わるほかは，クォークとの結合が

$$e\gamma^\mu\longrightarrow\frac{g_W}{\sqrt{2}}\gamma^\mu\frac{1-\gamma^5}{2}V_{ij} \qquad (6.58)$$

に変わるのみである．$\gamma^\mu\gamma^5$ の寄与は，W の偏極を見ないときは γ^μ の寄与と同じで，単に断面積を2倍にするのみであるので，W 放出のQCD効果は $O(\alpha_s)$ を問題にする限り，ドレル-ヤン過程と定数しか違わず，最低次の断面積で規格化すれば同一である．したがって W の p_T 分布や $\langle p_T{}^2\rangle$ は，ドレル-ヤン過程と理論上はまったく同一であるので，ドレル-ヤン過程も理論のテストに使える．

図 6.12 に，ドレル-ヤン過程のデータも含めた $\langle p_T{}^2\rangle$ のデータを示す[6]．$p_T{}^2$ の小さいところまで，式 (6.57) がデータをよく再現していることがわかる．

$\langle p_T \rangle \propto \sqrt{s}$ の関係は，高エネルギー領域ではかなりよく成立している．一方，$\sqrt{s} \to 0$ の極限では，p_T は QCD 効果に関係なくパートンが核子内で本来もっている横運動量（primordial momentum～350 MeV）に近づくはずであるが，図はその予想を比較的よく再現しているといえる．

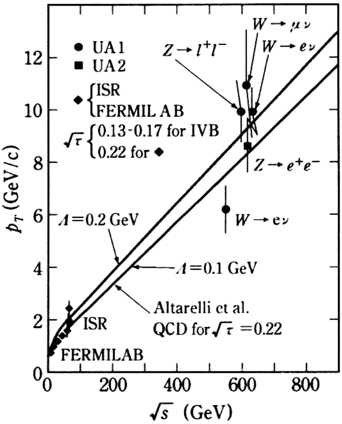


図 6.12 ハドロンによるレプトン対生成の $\sqrt{s}$-$\langle p_T \rangle$ 曲線[6)]
ISR, FERMILAB は，ドレル-ヤン過程により生成された $\mu\bar{\mu}$ 対の $\langle p_T \rangle$.
$\sqrt{s}$～600 GeV 付近は W, Z 生成からの $e\nu, ee$ 対.

6.7 非アーベルゲージ結合（$e^+e^- \to W^+W^-$ 反応）

標準理論は $SU(2) \times U(1)$ 群に基づくので，W, Z のゲージボソンは非アーベル群の特徴としての自己相互作用をもつ．電子陽電子反応による W 対生成 $e^+e^- \to W^+W^-$ には，図 6.13 に示すように最低次では 3 種の過程が効く．古典的な図 6.13 (a) のグラフのみでは $e^-e^+ \to W^+W^-$ の断面積は全エネルギー s に比例し，s の大きいところでユニタリティ極限を超えるが，ゲージ相互作用では，$Z^0W^+W^-$ および γW^+W^- 結合がちょうどそれを打ち消すように作用して高エネルギーでの振る舞いをコントロールする．したがって，この反応で実験と理論を比較することは 3-ゲージボソン結合 (Z-W-W) の存在および大きさを決めるうえで良好のテストとなる．

ゲージ場の自己相互作用ラグランジアンは (2.100) で与えられている．

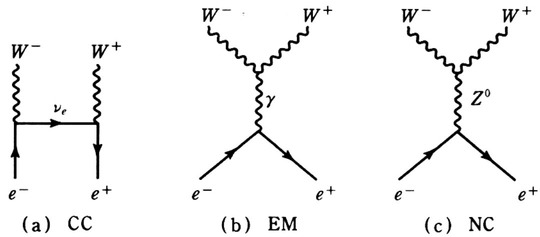


図 6.13 $e^-e^+ \to W^-W^+$ 生成反応に寄与する最低次の過程
(a) CC は荷電カレントによるニュートリノ中間状態
(b) EM は電磁相互作用によるフォトン中間状態
(c) NC は中性カレントによる Z^0 中間状態
おのおのの過程は $\sigma \sim s$ のように増加するが，干渉項が打ち消すように働き，高エネルギーでの振る舞いがよくなる．

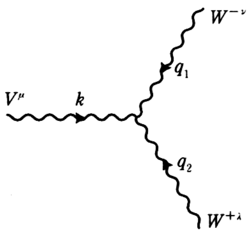


図 6.14 非アーベルゲージ理論の 3-ベクトル結合
$V=Z$ または γ．運動量はすべて内向きにとる．$k+q_1+q_2=0$

$$\mathcal{L}_{\rm gauge} = -\frac{1}{4}\sum_a F_{a\mu\nu}F_a{}^{\mu\nu} - \frac{1}{4}B_{\mu\nu}B^{\mu\nu} \tag{6.59}$$

$$F_{a\mu\nu} = \partial_\mu W_{a\nu} - \partial_\nu W_{a\mu} - g_W \varepsilon_{abc} W_{b\mu} W_{c\nu}$$

$$B_{\mu\nu} = \partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu$$

したがって，$W_3 = \cos\theta_W Z + \sin\theta_W A$ を考慮すれば，$WWV\,(V=Z,\gamma)$ の結合ヴァーテックスは

$$-i\Gamma_V{}^{\mu\nu\lambda} = -i\gamma_V[(q_1-q_2)^\mu g^{\nu\lambda} + (q_2-k)^\nu g^{\lambda\mu} + (k-q_1)^\lambda g^{\mu\nu}]$$

$$\begin{cases} \gamma_Z = g_W \cos\theta_W = e\cot\theta_W & V=Z \\ \gamma_\gamma = g_W \sin\theta_W = e & V=\gamma \end{cases} \tag{6.60}$$

となる．ここで，$g^{\mu\nu}$ はローレンツ変換の計量テンソルであり，k, q_1, q_2 の運動学変数は図 6.14 に示すように定義する．運動量保存により

$$k+q_1+q_2=0$$

が成立する．これから $\sigma(e^+e^- \to W^+W^-)$ を計算することができる．次式で定義される W の重心系における速度 β, λ, x_W

$$\beta=\sqrt{1-4\lambda}, \qquad \lambda=m_W{}^2/s, \qquad x_W=\sin^2\theta_W \tag{6.61}$$

を使うと[20)]

$$\begin{aligned}\sigma(e^+e^- \to W^+W^-)=&\frac{\pi\alpha^2\beta}{2sx_W{}^2}\left\{\left[(1+2\lambda+2\lambda^2)\frac{1}{\beta}\ln\left(\frac{1+\beta}{1-\beta}\right)-\frac{5}{4}\right]\right.\\&+\frac{m_Z{}^2(1-2x_W)}{(s-m_Z{}^2)}\left[2(2\lambda+\lambda^2)\frac{1}{\beta}\ln\left(\frac{1+\beta}{1-\beta}\right)-\frac{1}{12\lambda}-\frac{5}{3}-\lambda\right]\\&\left.+\frac{m_Z{}^4(1-4x_W+8x_W{}^2)}{48(s-m_Z{}^2)^2}\left[\beta^2\left(\frac{1}{\lambda^2}+\frac{20}{\lambda}+12\right)\right]\right\}\end{aligned} \tag{6.62}$$

となる．しきい値付近では $\beta \ll 1$ であり，このときは上の断面積で $\{\cdot\cdot\}$ の中の第 1 項が優勢となり，

$$\sigma_{\text{thresh}} \fallingdotseq \left(\frac{\pi\alpha^2}{4m_W{}^2x_W{}^2}\right)\beta \fallingdotseq 46\beta \quad (\text{pb}) \tag{6.63}$$

(6.62) で与えられる断面積の極大値は 17pb であるので，しきい値を 1 GeV も超えると ($\beta \sim 0.16$), $\sigma \sim 7$pb となるように断面積は急速に立ち上がることがわかる．このような場合は幅 Γ_W による効果が無視できないが，Γ_W の影響は $s=(2m_W)^2$ より低いエネルギーで WW 生成が始まること，断面積の曲線がわずかに滑らかになることくらいであり，大勢に影響はない．もちろん，m_W を決めるときはこのわずかな差を細心に考慮しなければならない．

$s \to \infty$ の極限では，やはり最初の第 1 項が効いて

$$\sigma(s \gg m_W{}^2) \longrightarrow \left(\frac{\pi\alpha^2}{2x_W{}^2}\right)\frac{1}{s}\ln\frac{s}{m_W{}^2} \tag{6.64}$$

となる．これは ν 交換項に起因する項である．もし，3-ゲージ結合がなく ν 交換過程のみであれば，断面積は

$$\sigma \sim G_F{}^2 s \tag{6.65}$$

で増加し，エネルギーの高いところでユニタリティ極限を破る．3-ゲージ結合があるときとないときの比較を図 6.15 に示す[21,22)]．断面積は，ビームエネルギーがしきい値を超えたところで急速に立ち上がり，最高値 $\sigma \sim 17$ pb をとってから後はゆっくりと対数的に減少する．

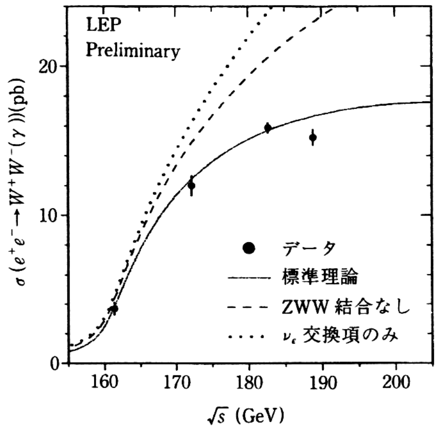


図 6.15 $e^+e^- \to W^+W^-$ 全断面積のエネルギー依存性[21,22]
標準理論 (実線), ZWW 交換項を入れない場合 (ダッシュ線), ニュートリノ交換のみの場合 (点線) とデータの比較.

W の質量値 (m_W) の決定精度については，上記全断面積のしきい値付近の振る舞いのほか，$W \to e\nu$ のエネルギースペクトルの終端部の振る舞い，$m_W(W \to 2$ ジェット), $m_W(W \to e\nu)$ などを総合して積分ルミノシティ 500pb^{-1} で誤差 30〜40 MeV にできると考えられている[23].

参考文献

1) C. Rubbia, P. McIntyre and D. Cline : Proc. Int. Neutrino Conf., Aachen, 1976, eds. H. Faissner, H. Reithler and P. Zerwas (1977), p. 683
2) S. van der Meer : Internal Report CERN ISR-PO/72-31 (1972), 参考文献としては F. T. Cole and F.E. Mills : *Ann. Rev. Nucl. Part. Sci.*, **31** (1981) 295 とその引用文献)
3) UA1 ; G. Arnison *et al.* : *Phys. Lett.*, **B122** (1983) 103 ; **B129** (1983) 273
UA2 ; M. Banner *et al.* : *Phys. Lett.*, **B126** (1983) 398 ; **B129** (1983) 130
4) G. Altarelli, R.K. Ellis, M. Greco and G. Martinelli : *Nucl. Phys.*, **B246** (1984) 12
G. Altarelli *et al.* : *Z. Phys.*, **C27** (1985) 617. Updated by M. Diemoz, F. Ferroni, E. Longo and G. Martinelli : *Z. Phys.*, **C39** (1988) 21
5) R.K. Ellis and W.J. Stirling : Fermilab-Conf-90/164-T, 1988 CERN Summer School of Phys., CERN 91-01
6) UA1 ; C. Albajar *et al.* : *Z. Phys.*, **C44** (1989) 15
UA2 ; J. Alitti *et al.* : *Z. Phys.*, **C47** (1990) 523

7) CDF ; F. Abe *et al.* : *Phys. Rev.*, **D44** (1991) 29 ; *Phys. Rev. Lett.*, **69** (1992) 28
8) UA2 ; *Phys. Lett.*, **B276** (1992) 354, 365
UA1 ; C. Albajar *et al.* : *Phys. Lett.*, **B253** (1991) 503
9) HMSR ; P.N. Harriman *et al.* : *Phys. Rev.*, **42** (1990) 798
MSR ; A.D. Martin, W.J. Stirling and G. Roberts : *Phys. Rev.*, **47** (1993) 867 ; *Phys. Lett.*, **B306** (1993) 145
10) CDF ; P. Hurst : Proc. 8th Topical Workshop $p\bar{p}$ Collider Physics, Castiglione della Pescaria, Italy (1989)
11) PDG (Particle Data Group) : *Phys. Rev.*, **D54** (1996) 207, *EPJ*, **C3** (1998)
12) CDF ; *Phys. Rev. Lett.*, **74** (1995) 342
13) A.D. Martin, W.J. Stirling and R.G. Roberts : *Phys. Lett.*, **B228** (1989) 149
14) CDF ; *Phys. Rev. Lett.*, **73** (1994) 220, *phys. Rev.*, **D52** (1995) 2624
15) The LEP Collaboration ; *Phys. Lett.*, **B276** (1992) 247
16) G. Altarelli, R.K. Ellis, M. Greco and G. Martinelli : *Nucl. Phys.*, **B246** (1984) 12 ; *Z. Phys.*, **C27** (1985) 617
P.B. Arnold and R.P. Kaufman : *Nucl. Phys.*, **B349** (1991) 381
17) CDF ; F. Abe *et al.* : *Phys. Rev. Lett.*, **66** (1991) 2951 ; **67** (1991) 2937
18) P. Arnold and H. Reno : *Nucl. Phys.*, **B319** (1989) 737 ; **B330** (1990) 284
R. Gonsalves, J. Pawowski and C.-F.Wai : *Phys. Rev.*, **D40** (1989) 2245
19) G. Altarelli, R.K. Ellis and G. Martinelli : *Phys. Lett.*, **B151** (1985) 457 ; *Z. Phys.*, **C27** (1985) 617
G. Altarelli : *Phys. Rep.*, **81** (1980) 1
20) O.P. Sushkov *et al.* : *Sov. J. Nucl. Phys.*, **20** (1975) 537
W. Alles *et al.* : *Nucl. Phys.*, **B119** (1977) 125
21) A. Denner : *Fortschritte der Physik*, **41** (1993) 307
22) M.W. Grünwald : Talk at Int. Conf. on High Energy Physics at Vanconver, July 23-29, 1998
23) G. Altarelli *et al.* : Interim report on the Physics Motivations for Energy Up grade of LEP2, CERN-TH951-151

7
Z ボソン

前章に引き続いて，もう一つのゲージボソンである Z^0 粒子の性質を調べる．W 粒子の場合，生成がハドロンによること，調査対象のレプトン崩壊モードがニュートリノを含んでいることから，実験的測定精度に限度があり，その性質と標準理論との比較は，ある程度定性的にならざるをえなかった．これに反して，Z は e^+e^- 反応で生成でき，崩壊モードにおいて関与するすべての粒子の結合定数の精度よい測定が可能である．理論との比較も最低次のボルン近似から一歩踏み込んで，高次効果すなわち放射補正を含めた理論計算との比較ができる．したがって，Z 共鳴の諸性質測定は標準理論の精密テストを可能とし，さらに一歩踏み込んで標準理論からのズレを検出することにより新理論展開の糸口をつかむ可能性を秘める．そこでこの章では，Z^0 の崩壊幅などをまずボルン近似で算出し，次いで放射補正の効果を含めた改良ボルン近似の式を与え，実験データと比較する．この章の後半においては放射補正の議論をする．放射補正効果にはいろいろあるが，ここでは特に効果の大きいゲージボソンの自己エネルギー補正に重点をおいて議論をする．数値的にはこの効果のみでほとんど決着がつく．また未発見のヒッグス粒子や新理論の影響は主としてこのゲージボソンのループ補正を通じて現れるので，直接生成が可能になるまではヒッグス粒子の質量を予測したり，新理論の可否を検証する有効な手段にもなる．

7.1 Z の生成断面積

7.1.1 ボルン近似

a. 崩壊幅

中性カレントのラグランジアンは (6.3) で与えられている．$Z(q, \varepsilon) \to \bar{f}(p_1)f(p_2)$ とすれば，W の崩壊計算 ((6.6)～(6.15)) の議論と同じようにして

$$\Gamma(Z \to \bar{f}f) = \frac{1}{2m_Z} \sum_{\substack{\text{スピン} \\ \text{pol}}} |\mathcal{M}|^2 \mathrm{d}LIPS \tag{7.1}$$

$$\mathcal{M} = \frac{g_Z}{2} \bar{u}(p_2)\gamma^\mu(v_f - a_f\gamma^5)v(p_1)\varepsilon_\mu \tag{7.2 a}$$

$$g_Z = \frac{e}{\sin\theta_W \cos\theta_W} \tag{7.2 b}$$

であるから，偏極の平均とスピン和を計算すればただちに

$$\begin{aligned}\Gamma(Z \to \bar{f}f) &= \frac{N_{cf} g_Z{}^2 m_Z}{48\pi}(1-4x)^{1/2}[v_f{}^2(1+2x) + a_f{}^2(1-4x)] \\ &= \frac{N_{cf} G_N m_Z{}^3}{6\sqrt{2}\pi}(1-4x)^{1/2}[v_f{}^2(1+2x) + a_f{}^2(1-4x)]\end{aligned} \tag{7.3 a}$$

$$\begin{aligned}N_{cf} &= (1+\delta_{\mathrm{QED}}) && (\text{レプトン}) \\ &= 3(1+\delta_{\mathrm{QED}})(1+\delta_{\mathrm{QCD}}) && (\text{クォーク})\end{aligned} \tag{7.3 b}$$

が得られる．ただし，$G_N = \rho G_F$，$x = m^2/m_Z{}^2$ であり，m はフェルミオンの質量である．δ_{QED}，δ_{QCD} は，

$$\delta_{\mathrm{QED}} = \frac{3\alpha Q_f{}^2}{4\pi} + \cdots \tag{7.3 c}$$

$$\delta_{\mathrm{QCD}} = \frac{\alpha_s(m_Z)}{\pi} + 1.409\left(\frac{\alpha_s(m_Z)}{\pi}\right)^2 + \cdots \tag{7.3 d}$$

で与えられる QED および QCD 補正である．クォークやレプトンの質量を無視すれば

$$\Gamma(Z \to \bar{f}f) = 2(v_f{}^2 + a_f{}^2)N_{cf}\Gamma_\nu \tag{7.4 a}$$

が得られる．ただし，

$$\Gamma_\nu=\frac{G_N m_Z{}^3}{12\sqrt{2}\pi} \tag{7.4 b}$$

は，1種類のニュートリノ対への崩壊幅である．

表7.1に式(7.3 a)を使って計算した崩壊の分岐比を示す．この表から$Z \to ee$への崩壊分岐比$BR(Z \to ee)$は3.3%であり，観測に掛からない$\nu\bar{\nu}$モードへの分岐比は$BR(Z \to \sum_{i=1}^{3}\nu_i\bar{\nu}_i)=20.5\%$であることがわかる．LEPにおいては，$m_Z$, Γ_Z, $BR(\bar{f}f)$などが精密に測られている（後述表7.2）．

表7.1 $Z \to f\bar{f}$の崩壊幅と分岐比（m_Z=91.19 GeV，QCD補正$(1+\alpha_s(m_Z)/\pi)$を含む）

f	v_f	a_f	Γ_f/Γ_ν	部分幅 (GeV)	分岐比 (%)
ν	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	0.167×3	6.84×3
e, μ, τ	$-\frac{1}{2}+2x_W$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}[1+(1-4x_W)^2]$	0.084×3	3.34×3
u, c	$\frac{1}{2}-\frac{4}{3}x_W$	$\frac{1}{2}$	$\frac{N_c}{2}\left[1+\left(1-\frac{8}{3}x_W\right)^2\right]$	0.300×2	12.0×2
d, s	$-\frac{1}{2}+\frac{2}{3}x_W$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{N_c}{2}\left[1+\left(1-\frac{4}{3}x_W\right)^2\right]$	0.383×2	15.4×2
b	〃	〃	〃＋質量補正	0.376	15.2
	$x_W=\sin^2\theta_W$		全崩壊幅 Γ_Z=2.499 GeV		

b. 生成断面積と非対称の表式

e^+e^-反応は，ハドロン反応と違って大きなQCDバックグラウンドがなく，理論計算値と実験との精密比較ができる強みがある．LEPのエネルギー領域では，フォトン交換過程に比べ，Z交換の寄与が圧倒的に優勢である．生成断面積の導き方は，すでに第4章で議論した．終状態のフェルミオン種を特定すると，(4.52)，(4.56)から

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}(e^+e^- \to \gamma^*,\ Z^* \to \bar{f}f)=\frac{d\sigma^\gamma}{d\Omega}+\frac{d\sigma^{\gamma Z}}{d\Omega}+\frac{d\sigma^Z}{d\Omega} \tag{7.5}$$

$$\frac{d\sigma^\gamma}{d\Omega}=\frac{\alpha^2 Q_f{}^2 N_{cf}}{4s}(1+\cos^2\theta) \tag{7.6 a}$$

$$\frac{d\sigma^{\gamma Z}}{d\Omega}=+\frac{\alpha Q_f G_N m_Z{}^2}{4\sqrt{2}\pi s}N_{cf}\mathrm{Re}\chi(s)[g_V v_f(1+\cos^2\theta)+2g_A a_f\cos\theta] \tag{7.6 b}$$

$$\frac{d\sigma^Z}{d\Omega}=\frac{G_N{}^2 m_Z{}^4}{32\pi^2 s}N_{cf}|\chi(s)|^2[(g_V{}^2+g_A{}^2)(v_f{}^2+a_f{}^2)(1+\cos^2\theta)+8g_V g_A v_f a_f\cos\theta] \tag{7.6 c}$$

$$\chi(s)=-\frac{s}{s-m_Z{}^2+im_Z\Gamma_Z} \qquad (7.6\,\mathrm{d})$$

を得る．ただし，$g_V=v_e, g_A=a_e$ である．$d\sigma^{\gamma Z}$ は γ 交換項と Z 交換項の干渉項を表し，$s=m_Z{}^2$ では消える．$d\sigma^{\gamma}$ の寄与は $d\sigma^{Z}$ の 1%以下である．(7.4) を使って $s\fallingdotseq m_Z{}^2$ での Z による断面積 σ^Z を部分幅で書き直すと，

$$\sigma^Z=\frac{12\pi(s/m_Z{}^2)\Gamma_e\Gamma_f}{(s-m_Z{}^2)^2+m_Z{}^2\Gamma_Z{}^2}=\sigma^0\frac{s\Gamma_Z{}^2}{(s-m_Z{}^2)^2+m_Z{}^2\Gamma_Z{}^2} \qquad (7.7\,\mathrm{a})$$

$$\sigma^0=\sigma^Z(s=m_Z{}^2)=\frac{12\pi}{m_Z{}^2}\left(\frac{\Gamma_e}{\Gamma_Z}\right)\left(\frac{\Gamma_f}{\Gamma_Z}\right) \qquad (7.7\,\mathrm{b})$$

というよく知られた共鳴散乱の式となる．$s=m_Z{}^2$ では，μ 対生成の QED 断面積 $\sigma_{\mathrm{QED}}=4\pi\alpha^2/3s$ と Z 共鳴断面積の比は

$$\frac{\sigma(e\bar{e}\to Z\to A11)}{\sigma_{\mathrm{QED}}(e\bar{e}\to\mu\bar{\mu})}=\frac{9}{\alpha^2}BR(Z\to e\bar{e})\sim 6000 \qquad (7.8)$$

これは非常に大きい数である．図7.1[1] に $\sigma(e\bar{e}\to$ ハドロン$)$，$\sigma(e\bar{e}\to\mu\bar{\mu})$ を示す．実験で観測される $\sigma(e\bar{e}\to\mu\bar{\mu})$ は Z 交換項を含み Z 共鳴付近で大きくなるので，純粋なQED過程の $\sigma(e\bar{e}\to\gamma\gamma)$ を比較のために載せてある．実験データは予想通りの振る舞いを示し，巨大な Z 共鳴の山の存在を確認した．

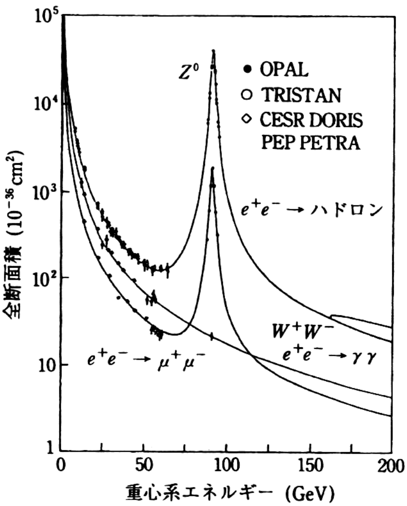


図 7.1　$e^+e^-\to$ ハドロン，$\mu^+\mu^-$ の断面積は QED の寄与 ($\propto 1/s$) と Z 共鳴の和で示される．$ee\to\gamma\gamma$ は QED のみで Z 共鳴はない[1,9]

7.1.2 フォトン放射の影響

LEP での精密実験データを解析するためには，(7.5) のボルン近似では不十分であり，放射補正を考慮しなければならない．放射補正には

(1) QCD 補正 (主として終状態からのグルーオン放出)

(2) QED 効果 (主として始状態からのフォトン放出)

(3) 電弱相互作用による高次補正

の 3 種類がある．

グルーオン放射の補正はすでに N_{cf} の中に考慮した (7.3)．QED 効果は他の効果とは分離でき，独立に計算可能である[2,3]．式の形は簡単ではないが，厳密な理論的な取扱いがよく理解できているので，実験データの結果は，純粋な QED による補正効果は切り離したうえで提供されることが多い．QED 効果の中では，始状態からのフォトン放出が特に大きい．QED 効果はエネルギーに依存する補正として次のような形に表される[*1)]．

$$\sigma(s) \longrightarrow \int_0^{k_{\max}} \sigma(s(1-k))H(k)\mathrm{d}k \tag{7.9}$$

$k_{\max}$ は，実験条件により決まる放出フォトンエネルギーの上限値である．定性的な議論をすれば，フォトン放出効果は，

(1) 共鳴の山頂を低くする

(2) 山頂の位置をずらす

(3) 高エネルギー側に裾野をつくる

などとして現れる (図 7.2 参照)．$O(\alpha)$ の式の主要な項のみを考慮すると，断面積の頂上値は元の値の

$$1-\beta\ln\left(\frac{m_Z}{\Gamma_Z}\right), \qquad \beta=\frac{2\alpha}{\pi}\left[\ln\left(\frac{m_Z{}^2}{m_e{}^2}\right)-1\right] \tag{7.10 a}$$

倍となることが示せる．電子の質量値が小さいので $\ln(m_Z{}^2/m_e{}^2)$ が大きく，補正値は～0.6にもなり非常に大きい．始状態のフォトン放出に比べると，終状態からのフォトン放出は0.17%の補正を与えるにすぎない．しかし，$O(\alpha)$ 補正のみを考慮した上式は補正のしすぎであることが知られていて，実際上は，

---

*1) 終状態の放射補正は，理解しやすいように式 (7.3) にあらわに取り込んである．したがって，(7.9) によってフォトン放射の効果を計算するときは，二重にならないように注意する．

(7.10 a) を指数の肩に入れることにより，より高次の効果を取り入れられると議論されている[3,4]．すなわち (7.10 a) の代わりに

$$\left[\frac{m_Z}{\Gamma_Z}\right]^{-\beta} \tag{7.10 b}$$

を使う．より精密な計算式によれば，減衰率は 74%に留まる（図 7.2）．山頂の位置変動 $\Delta\sqrt{s}_{\max}$ は，ほぼ

$$\Delta\sqrt{s}_{\max} \fallingdotseq \frac{\beta\pi}{8}\Gamma_Z \sim 106\ \mathrm{MeV} \tag{7.10 c}$$

で与えられる．共鳴幅の変化は小さい．

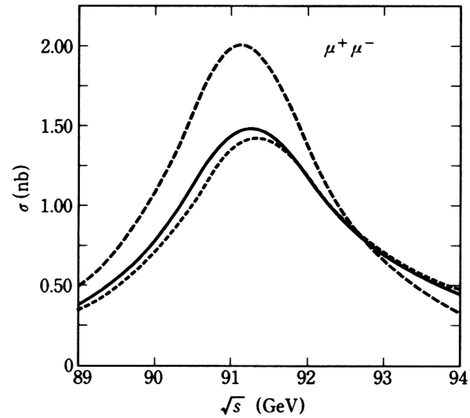


図 7.2 QED 高次補正による断面積 ($e\bar{e} \to \mu\bar{\mu}$) の変化[2]
一番上のダッシュ線が補正前，下のダッシュ線が $O(\alpha)$ の補正後，実線が $O(\alpha^2)$ の補正後の変化．

7.1.3 放射補正による改良式

フォトン放出による QED 補正は大きいが，興味のある新しい物理内容は含まれていない．これに対して，電弱相互作用による高次補正[*2] は標準理論の検証の一部として考慮されるべきものである．電弱相互作用補正効果は，次の三つに分類される．

(1) ゲージボソンの伝播関数補正（普遍的補正）

[*2] フォトンと Z や W が混在する効果は，電弱相互作用効果として扱う．

(2)　ヴァーテックス補正（香りに依存する補正）

(3)　箱型図の寄与（過程ごとに異なる補正）

a.　実効パラメターの導入

伝播関数の補正は，電荷や中性カレント結合定数などを変える効果をもつ．この効果は，かなり大きく～6％くらいあるが，エネルギーに依存する実効結合定数（running coupling constant）$\alpha(\mu)$ を導入して，ボルン近似の結合定数の中に繰り込むことができる（後述§7.3）．スケールパラメター μ は，e^+e^- 反応の場合は $\mu^2=s$ にとり，Z 共鳴付近のデータを扱うときは $\mu=m_Z$ とする．

$$\alpha \longrightarrow \alpha(m_Z)\equiv\bar{\alpha}=(128.88\pm0.09)^{-1} \tag{7.11 a}$$

$$\rho=1 \longrightarrow 1+\Delta\rho \tag{7.11 b}$$

ゲージボソンの自己エネルギー効果であるフェルミオンループは，Z, γ のどちらにも結合できるから，高次補正を取り入れると γ-Z 混合効果が出現することになる．γ-Z 混合効果は中性カレントの中の電磁カレントの部分に繰り入れることが可能であり，中性カレントの中に現れるワインバーグ角を，実効ワインバーグ角 $\sin^2\bar{\theta}_W$

$$\sin^2\theta_W \longrightarrow \sin^2\bar{\theta}_W\equiv\kappa_{se}(\mu^2)\sin^2\theta_W=\{1+\Delta\kappa_{se}(\mu^2)\}\sin^2\theta_W \tag{7.12}$$

に置き換えることと同等であることが示せる（後述，§7.3）．この実効ワインバーグ角もまたスケール μ の関数であるが，実用上は $\mu=m_Z$ で定義する．

ヴァーテックスによる補正は，終状態のフェルミオン f により異なる寄与を与えるので，その修正後の量を $\sin^2\theta_f$，また箱型図の寄与は反応ごとに異なる寄与を与えるので，最終的な結果を $\sin^2\theta_{\mathrm{eff},f}$ と書くと

$$\begin{aligned}\sin^2\theta_{\mathrm{eff},f}&=\kappa(\mu^2)\sin^2\theta_W{}^{*3)}\\&=(1+\Delta\kappa_{se}+\Delta\kappa_{f,\mathrm{vtx}}+\Delta\kappa_{\mathrm{box}})\sin^2\theta_W\\&=\sin^2\bar{\theta}_W+(\Delta\kappa_{f,\mathrm{vtx}}+\Delta\kappa_{\mathrm{box}})\sin^2\theta_W\\&=\sin^2\theta_f+\Delta\kappa_{\mathrm{box}}\sin^2\theta_W\end{aligned} \tag{7.13 a}$$

*3)　PDG[6] では，$\bar{s}_f{}^2\equiv\sin^2\theta_{\mathrm{eff},f}$ という記号を使う．これの定義は放射補正を入れて決めた v_f, a_f からトリー近似の式 (7.31) を使って求めた $\sin^2\theta_W$ である．厳密に言えば (7.13) での定義とやや異なるが，実用上は実験的にも理論的にもこの差が問題となることはない．

$$\rho_{\text{eff},f}=1+\Delta\rho_{se}+\Delta\rho_f+\Delta\rho_{\text{box}}$$
$$=\rho_{se}+\Delta\rho_f+\Delta\rho_{\text{box}}$$
$$=\rho_f+\Delta\rho_{\text{box}} \tag{7.13 b}$$

と書くことにする．数値的に主たる寄与は伝播関数からくる．特に，$e\bar{e}\to Z\to f\bar{f}$ 反応に限るときは，箱型図による補正を無視し，$(\sin^2\theta_{\text{eff},f},\ \rho_{\text{eff},f})$ と $(\sin^2\theta_f,\ \rho_f)$ を同等に扱うことにしてよい．実はヴァーテックス補正量も小さいので，$(\sin^2\theta_f,\ \rho_f)$ と $(\sin^2\bar{\theta}_W,\ \rho_{se})$ もほとんど同じであるが例外もある．$f=b$ のときは t クォークによるヴァーテックス補正が無視できないので，別個に考える（後述§7.3.6 b)．

ヴァーテックスおよび箱型図による補正効果は，$\sin^2\theta_W$ や ρ だけには限らないが，概して小さな補正であるので，必要に応じて結果のみを付記するに止めることにして詳しい議論はこれ以上行わないことにする．

b.　エネルギーに依存する崩壊幅

Z 生成の断面積は $O(\alpha^2)$ 効果であるが，共鳴の頂上付近では $O(\alpha^0)$ となるので，伝播関数の中に現れる崩壊幅 Γ に対する補正としては $O(\alpha^2)$ の効果まで取り入れる必要がある．崩壊幅に対する高次効果の影響は，上に述べたパラメター補正のほかに，固定幅 $m_Z\Gamma_Z$ に s 依存性を取り入れた次式

$$\frac{1}{s-m_Z{}^2+im_Z\Gamma_Z}\to\frac{1}{s-m_Z{}^2+is\Gamma_Z/m_Z} \tag{7.14}$$

という置き換えで非常によい近似となっていることが示される[4]．この高次補正効果によって共鳴の形がどう変わるかを見るために，

$$s-m_Z{}^2+is\Gamma_Z/m_Z=(1+i\gamma)(s-\hat{m}_Z{}^2+i\hat{m}_Z\hat{\Gamma}_Z) \tag{7.15}$$
$$\hat{m}_Z=m_Z(1+\gamma^2)^{-1/2} \tag{7.16 a}$$
$$\hat{\Gamma}_Z=\Gamma_Z(1+\gamma^2)^{-1/2} \tag{7.16 b}$$
$$\gamma=\Gamma_Z/m_Z \tag{7.16 c}$$

とおけば，(7.7 a) の断面積は，

$$\sigma_{obs}=\sigma^0\frac{s\hat{\Gamma}_Z{}^2}{(s-\hat{m}_Z{}^2)+(\hat{m}_Z\hat{\Gamma}_Z)^2} \tag{7.17}$$

に変更されるので，同じ形の断面積を再現する．すなわち，s に依存する幅の効果は，断面積の形と頂上の高さは変えないで，見かけの質量と幅とを，$\hat{m}_Z$

$=m_Z-34$ MeV, $\hat{\Gamma}_Z=\Gamma_Z-1$ MeV だけ変更するだけである．一方，元の共鳴公式 (7.7) の見かけ上の山頂位置 ($d\sigma/ds=0$ で決められる) は，m_Z ではなく m_Z から $\sqrt{s}_{\max}=m_Z[1+(\Gamma_Z/m_Z)^2]^{1/4}\fallingdotseq m_Z+(1/4)(\Gamma_Z{}^2/m_Z)\fallingdotseq m_Z+17$ MeV ほど上方にあるので，(7.14) の補正後の見かけ上の山の位置は，$\sqrt{s}_{\max}=m_Z+17-34$ MeV となる．よい近似であるとの意味は，m_Z をパラメターとして，式 (7.14) に QED 補正を組み合わせて，実験断面積の形に合うように最適化すれば精度のよい m_Z の値が得られるということである[*4]．QED をも含めた全補正の後の共鳴の山頂の位置（図 7.2）は次式で与えられる[3]．

$$\sqrt{s}_{\text{peak}}=m_Z+106\ \text{MeV}-17\ \text{MeV}=m_Z+89\ \text{MeV} \tag{7.18 a}$$

また，放射補正はチャネルごとに異なることを留意しておく必要がある．例えば，ハドロンチャネルと $\mu\bar{\mu}$ チャネルでは，半値全幅 Γ は見かけ上の $\sigma_{\max}$ の半値の値をとる位置 $\sqrt{s}_{\pm}$ と

$$\Gamma_Z=(\sqrt{s}_+-\sqrt{s}_-)/1.16 \qquad (e^+e^-\to\mu\bar{\mu})$$

$$\Gamma_Z=(\sqrt{s}_+-\sqrt{s}_-)/1.15 \qquad (e^+e^-\to \text{ハドロン})$$

$$(\sqrt{s}_+-\sqrt{s}_-)_{\text{had}}=(\sqrt{s}_+-\sqrt{s}_-)_{\mu\mu}-45\ \text{MeV} \tag{7.18 b}$$

の関係にある（ただし，$m_t=120$, $m_H=100$ GeV とした）．

c．改良ボルン近似

上記の実効パラメターを使って，ボルン近似の式を書き直し，中性カレント結合定数を $G_N=G_F$ から $G_N=G_F\rho$ とし，伝播関数中の崩壊幅 Γ_f に s 依存性を取り込む ($m_Z\Gamma_Z\to s\Gamma_Z/m_Z$) と，重要な放射補正効果はほとんどこの式の中に含まれている．これを“改良ボルン近似の式”という．改良ボルン近似式は，$O(\alpha)$ の放射補正をすべて取り入れた正確な式と 0.5％以内の精度で合っ

---

*4) PDG[6] では，式 (7.14) をもって m_Z と Γ_Z の定義式としている．理論的には，不安定粒子は，散乱振幅の複素 s 平面上での極 s_0 として定義される[5]．
すなわち

$$s_0=\left(M-i\frac{\Gamma}{2}\right)^2$$

この M は，(7.14) で定義した m_Z とは

$$M=m_Z\left\{1-\frac{3}{8}\left(\frac{\Gamma_Z}{m_Z}\right)^2+O\left(\frac{\Gamma_Z}{m_Z}\right)^4\right\}$$

の関係にあり，M より約 25 MeV 小さい．Γ もまた Γ_Z より小さいが，差は 1.2 MeV と小さく現時点では誤差の範囲内である．

ている[4]．改良ボルン近似の式の導き方は後の§7.3.5で議論することにして，上記の改良を施した結果の断面積は次のように表される．

$$\sigma_f(s)=\frac{12\pi\Gamma_e\Gamma_f}{(s-m_Z{}^2)^2+(s\Gamma_Z/m_Z)^2}\left(\frac{s}{m_Z{}^2}+R_f\frac{s-m_Z{}^2}{m_Z{}^2}\right)+\frac{4\pi}{3}N_{cf}Q_f{}^2\frac{\bar{\alpha}^2}{s} \quad (7.19)$$

$$R_f=\frac{8\pi\bar{\alpha}Q_eQ_f}{\sqrt{2}\rho G_F m_Z{}^2}\cdot\frac{g_V v_f}{(g_V{}^2+g_A{}^2)(v_f{}^2+a_f{}^2)} \quad (7.20\,\mathrm{a})$$

$$\Gamma_f=\frac{N_{cf}\rho G_F m_Z{}^3}{6\sqrt{2}\pi}(v_f{}^2+a_f{}^2) \quad (7.20\,\mathrm{b})$$

$$g_V=-1/2+2\sin^2\theta_e, \qquad g_A=-1/2 \quad (7.20\,\mathrm{c})$$

$$v_f=I_{3f}-2Q_f\sin^2\theta_f, \qquad a_f=I_{3f} \quad (7.20\,\mathrm{d})$$

この式は伝播関数の分母以外は (7.5)~(7.6) とまったく同じ形をしていて，$\alpha, g_V, g_A, v_f, a_f$ の定義が異なるのみである．これらの式を使って，データと比較することにより $\rho_f, \sin^2\theta_f$ が求められる．

Z 共鳴上での非対称を表す式は，第4章中性カレントの (4.50), (4.51) から導くことができる．偏極 P をもつビームによる断面積は

$$\frac{d\sigma^{\mathrm{pol}}}{d\Omega}=\frac{1-P}{2}d\sigma_L+\frac{1+P}{2}d\sigma_R$$

$$\sim\frac{1-P}{2}(u^2|f_{LL}|^2+t^2|f_{LR}|^2)+\frac{1+P}{2}(t^2|f_{RL}|^2+u^2|f_{RR}|^2)$$

$$\sim(1+\cos^2\theta)F_1+2\cos\theta\, F_2+P[(1+\cos^2\theta)F_3+2\cos\theta\, F_4] \quad (7.21\,\mathrm{a})$$

$$F_1=(g_V{}^2+g_A{}^2)(v_f{}^2+a_f{}^2), \qquad F_2=4g_Vg_Av_fa_f$$

$$F_3=2g_Vg_A(v_f{}^2+a_f{}^2), \qquad F_4=2(g_V{}^2+g_A{}^2)v_fa_f \quad (7.21\,\mathrm{b})$$

で与えられる．偏極していないビームによる散乱角分布の前後非対称 A_{FB} は，η_f を

$$\eta_f=\frac{2v_fa_f}{(v_f{}^2+a_f{}^2)} \quad (7.22)$$

で定義すると

$$A_{FB}=\frac{\sigma_F-\sigma_B}{\sigma_F+\sigma_B}=\frac{\left(\int_0^1-\int_{-1}^0\right)d\Omega\frac{d\sigma}{d\Omega}}{\int_{-1}^1 d\sigma}=\frac{3F_2}{4F_1}=\frac{3}{4}\eta_e\eta_f \quad (7.23)$$

で与えられる．ただし，積分の上下限は $\cos\theta$ の値を示す．η_e は電子の η_f である．L-R 非対称 A_{LR} は，L または R に偏極したビームを使って，

$$A_{\mathrm{LR}}=\frac{\sigma_L-\sigma_R}{\sigma_L+\sigma_R}=\frac{\left(\int_{-1}^{1}\mathrm{d}\sigma(-P)\right)-\left(\int_{-1}^{1}\mathrm{d}\sigma(P)\right)}{\left(\int_{-1}^{1}\mathrm{d}\sigma(-P)\right)+\left(\int_{-1}^{1}\mathrm{d}\sigma(P)\right)}=-\frac{F_3}{F_1}P=-\eta_e P \qquad (7.24)$$

また，偏極ビームによる前後非対称 $A_{FB}{}^{\mathrm{pol}}$ は，

$$A_{FB}{}^{\mathrm{pol}}=\frac{(\sigma_F-\sigma_B)(-P)-(\sigma_F-\sigma_B)(P)}{(\sigma_F+\sigma_B)(-P)+(\sigma_F+\sigma_B)(P)}$$

$$=\frac{\left(\int_0^1-\int_{-1}^0\right)\mathrm{d}\sigma(-P)-\left(\int_0^1-\int_{-1}^0\right)\mathrm{d}\sigma(P)}{\left(\int_0^1+\int_{-1}^0\right)\mathrm{d}\sigma(-P)+\left(\int_0^1+\int_{-1}^0\right)\mathrm{d}\sigma(P)}=-\frac{3F_4}{4F_1}P=-\frac{3}{4}\eta_f P \qquad (7.25)$$

で与えられる．いずれもボルン近似の式であるが，先の議論によって v_f や a_f の中の $\sin^2\theta_W$ を $\sin^2\theta_f$ で置き換えてやることにより放射補正が取り入れられる．

上式からわかるように偏極したビームによる非対称は，η_e もしくは η_f という直接 $\sin^2\theta_f$ に関係している量を測るので，$\sin^2\theta_f$ の最も精密な測定，つまり理論的実験的不定性の小さなきれいなテストができる．$\sin^2\theta_f$ と通常の $\sin^2\theta_W$ との関係については，§7.3の放射補正の項で詳細に述べるが，どちらも観測量から直接決められる量である．つまり $\sin^2\theta_W$ は質量 m_W と m_Z から，$\sin^2\theta_f$ は Z 共鳴における非対称 A_{FB} などから求められる．最近の実験の精度は $\sin^2\theta_W$ と $\sin^2\theta_f$ のわずかの差を感知できるほどよくなっている．これら種々の $\sin^2\theta_W$ は，Z の質量などの観測量から放射補正を入れて理論的に計算できる量であるので，実験値と比べることにより，標準理論そのものの検証もしくはヒッグスの質量の予測などに使うのである．

7.2 LEPの実験結果[6~9)]

7.2.1 Z の質量と崩壊幅

各種終状態の中で，統計的にはハドロン事象が圧倒的に多い．ハドロン生成断面積の $s=m_Z{}^2$ での値は，

$$\sigma_h{}^0=\frac{12\pi}{m_Z{}^2}\frac{\Gamma_e\Gamma_h}{\Gamma_Z{}^2} \qquad (7.26)$$

で与えられる．データで得られた各種断面積の形（図7.3，図7.4）を理論式

に合うように，m_Z, Γ_Z, $\sigma_h{}^0$, Γ_e/Γ_h, Γ_μ/Γ_h, Γ_τ/Γ_h をパラメターとして同時に最適化することによって，これらパラメターの実験値が決められる（表 7.2）．Z の質量値の誤差の最大の原因は，エネルギー絶対値の測定の不定性からくる．

エネルギーの測定は次のようにする[10)]．まず，20 GeV のエネルギーで電子と陽子を入射加速器の中で回して，その回転周波数の差からエネルギーの絶対値を決定する．次に主加速器磁場の値を 20 GeV および 45 GeV 相当まで励起するときのカレント積分値を比較して，45 GeV でのエネルギー絶対値を得る．そのときの誤差は 2.4×10^{-4} すなわち 20 MeV である．これ以上精度を上げるには，電子のスピン回転（precession）周波数を測る．電子ビームがシンクロトロン放射によって自然に横偏極をもつので，ここで弱い振動磁場をかけてやると，ビームエネルギーによって決まるある共鳴条件が成立するところで偏極が消滅する．電子の偏極度はレーザービームをあててコンプトン散乱を起こすことにより測定できるので，共鳴条件を探すことにより絶対誤差 5 MeV 以下でエネルギーが決められるのである．

表 7.2 LEP における Z の質量，崩壊幅の測定結果[6)]

	測定値	理論値
m_Z(GeV)	91.1867±0.0022	入　力
Γ_Z(GeV)	2.4948±0.0020	2.4968±0.0017
$\sigma_{h,\mathrm{peak}}$(nb)	41.486 ±0.053	41.469 ±0.016
$R_{hl}=\Gamma_h/\Gamma_l$	20.775 ±0.027	20.754 ±0.020
Γ_l(MeV)	83.91 ±0.10	84.00 ±0.03
Γ_h(MeV)	1743.2 ±2.3	1743.3 ±1.6
Γ_{inv}(MeV)	500.1 ±1.8	501.7 ±0.2
$A_{FB}{}^l$	0.0171±0.0010	0.0162±0.0003
A_{LR}	0.1461±0.0033	0.1469±0.0013
N_ν	2.990 ±0.011	

余談であるが，このエネルギー測定の精度がいかによいかは，エネルギー測定結果に月の潮汐効果が見えることでわかる．月の潮汐力は地球の半径を 1 日

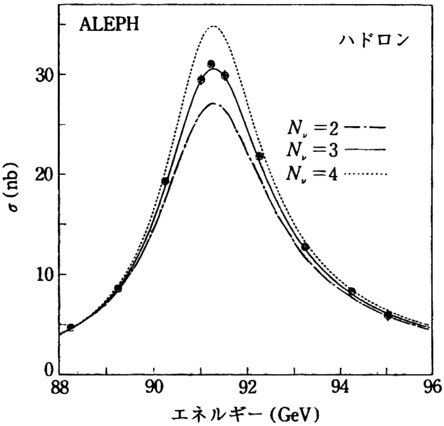


図 7.3 $e^+e^- \to Z \to$ ハドロンの全断面積
実線が $N_\nu=3$ としたときの標準理論値．$N_\nu=2, 4$ の曲線も示してある[8]．

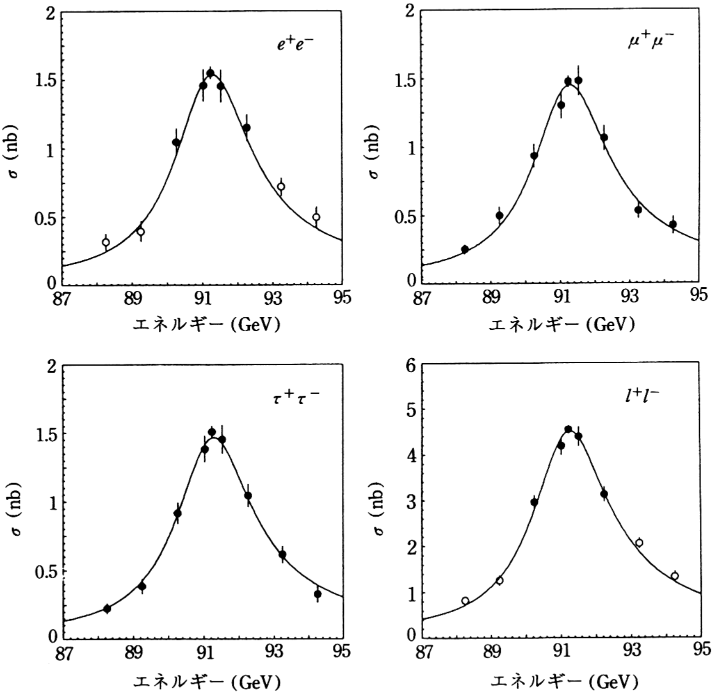


図 7.4 $e^+e^- \to Z \to l\bar{l}$ の全断面積[8]
実線は標準理論値 ($\sin^2\bar{\theta}_W=0.232$)

2回伸び縮みさせる効果をもつ．この結果地表もまた膨張収縮を繰り返し，LEPの半径 $R=4.24$km が 0.15mm 変化するので，ビームの加速周波数 f にも変化がでる．

$$\frac{\Delta f}{f}=\frac{\Delta R}{R}\fallingdotseq 3.5\times 10^{-8}$$

ビームの運動量変化はこれをある定数 $\alpha_c=3.87\times 10^{-4}$ で割って，$\Delta E\fallingdotseq 10^{-4}E\fallingdotseq$ 8 MeV の変化が高潮から引き潮の間に見られる（図 7.5）．

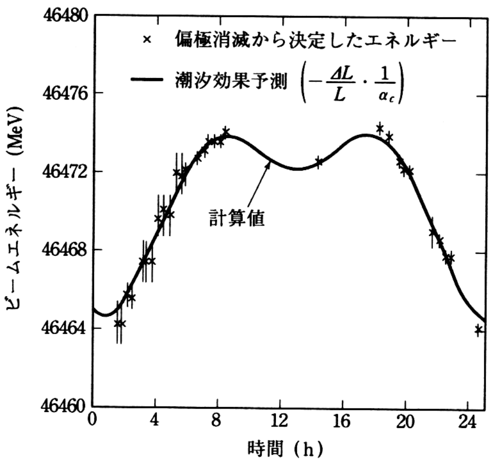


図 7.5　潮汐力によるエネルギー変化[10)]
潮汐力により LEP の周長が変化し，エネルギーも変化する．

7.2.2　ニュートリノの種類数

ニュートリノの質量が $m_Z/2$ より小さいときは，$Z\rightarrow\nu\bar{\nu}$ が可能であるから，軽いニュートリノ1種類につき，Γ_ν 分だけ全幅 Γ_Z が大きくなる．見えない崩壊モードへの崩壊幅 $\Gamma_{\rm inv}$ は，観測可能なチャネル（全断面積，および荷電粒子を含む崩壊モード）から引き算によって算出できるから，ニュートリノの種類数 N_ν は，実験的に

$$N_\nu=\frac{\Gamma_{\rm inv}}{\Gamma_\nu}\equiv\frac{1}{\Gamma_\nu}(\Gamma_Z-\Gamma_h-3\Gamma_l)=\frac{\Gamma_l}{\Gamma_\nu}\left(\sqrt{\frac{12\pi R_{hl}}{\sigma_h{}^0 m_Z{}^2}}-R_{hl}-3\right)$$

$$R_{hl}=\frac{\Gamma_h}{\Gamma_l} \tag{7.27}$$

から決められて，

$$N_\nu=2.990\pm0.011 \tag{7.28}$$

となった．図7.3には N_ν を変えたときの Z 断面積の形がどう変わるかを示してある．明らかに $N_\nu=3$ がよい．

これまでにも宇宙論や，ハドロンによる W, Z 生成データからはすでに $N_\nu \fallingdotseq 3-4$ と推測されていたが，それをはっきりと示したことになる．この事実はクォークとレプトンの世代数が3でつきていることを強く示唆する．$m_\nu > m_Z/2$ であれば，Z の崩壊には寄与しないので，世代数が4以上の可能性を否定するわけではないが，これまでの既知のニュートリノの質量がすべて≒0であるとき，第4番目のニュートリノから急激に大きな質量をもつことは考えにくい．

7.2.3 レプトンの前後非対称 $A_{FB}{}^l$

ビームが偏極していないときでも，弱相互作用の性質より崩壊の角分布には前後非対称が生じることはすでに論じた（§4.7.2）．ただし，$s=m_Z$ で非対称は消滅する．図7.6にDELPHIグループの $\mu\bar{\mu}$ の非対称測定[11]を示す．電子，μ, τ の別々の測定でも互いの一致は非常によく，e-μ-τ の普遍性は成立している．計算値との一致は非常によい．実験値は

$$A_{FB}{}^l=0.0171\pm0.0010 \tag{7.29}$$

で与えられる[6,9]．$A_{FB}{}^l \propto v_l=-(1/2-2\sin^2\theta_l)$ であるので，v_l は非常に0に近く，$A_{FB}{}^l$ もまた0に近いが，データは有意に0と異なる結果を示している．ここでのデータは，PETRAやトリスタンでのデータを補完しより一層精密化するものであり，また違うエネルギーでの標準理論のテストともなっている．結果は標準理論の正しさを裏づけている（図4.13(b) 参照）．

レプトン結合定数：レプトンへの崩壊幅とレプトンの角分布非対称から，ベクトルおよび軸性ベクトル結合定数 g_V, g_A（上の式では $v_l, a_l, l=e, \mu, \tau$）を求めることができる．3種のレプトン崩壊より決められた値の平均をとり[9]

$$v_l=-0.041\pm0.015 \tag{7.30 a}$$

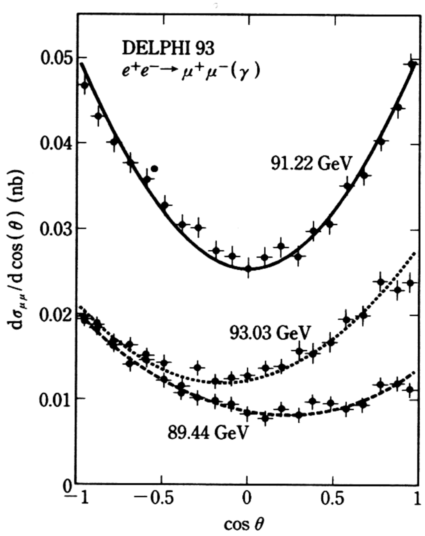


図 7.6 $e^-e^+ \to \mu^-\mu^+$ 角分布前後非対称データ[11)]
$\sqrt{s}=m_Z$ で非対称が 0 となり，$\sqrt{s}>m_Z$，$\sqrt{s}<m_Z$ で符号を変えていることがわかる．

$$a_l=-0.507\pm0.014 \tag{7.30 b}$$

と決められる．これから

$$v_l=-\sqrt{\rho}(1/2-2\sin^2\theta_l) \tag{7.31 a}$$

$$a_l=\sqrt{\rho}/2 \tag{7.31 b}$$

を使って求めたワインバーグ角は（$m_t=173\pm4$ GeV，$m_H=300$ GeV）という条件で[6)]

$$\sin^2\theta_l=0.2322\pm0.0010 \tag{7.32}$$

$\sin^2\theta_l$ と $\sin^2\theta_W$ との関係については，§7.3 で議論する．

7.2.4 偏極ビームによる左右非対称 A_{LR}

ワインバーグ角の最も精密な測定は，$\sin^2\theta_f$ と測定量とが最も直接に結びついている物理量，すなわち偏極ビームによる前後方非対称から得られると期待される（(7.24)，(7.25)）．現在の LEP での実験値は表 7.2 に与えてあるが，SLC では非常に良好な偏極ビームをもつ利点をいかして，

$$A_{LR}=0.1547\pm0.0032 \tag{7.33}$$

と精度のよい値をだしている[12]．この値は A_{FB} やタウ崩壊などから算出したLEPの値(表7.2)とほぼ合っている．将来的には，この方法で得られる精度は，m_Z から放射補正式 (後述式 (7.43)) を使って得られる $\sin^2\theta_W$ の値と同程度の精度をもち，m_W 値とあわせれば，標準理論のもっとも厳密なテストになると期待される[13]．

7.3 放 射 補 正[14,15]

これまでの議論で，GWS理論が論理的に無矛盾で，現象的にも種々の弱相互作用データをよく再現することがわかった．統一理論であることを証明するためには，いろいろな基本的関係をチェックする必要があったが，あらゆるところに現れるパラメターワインバーグ角 $\sin^2\theta_W$ が常に同一の値をとるという事実がGWS理論が普遍原理に基づく統一理論であることの有力な論拠の一つであった．しかし実験技術が進んで精密測定が可能になってくると高次の効果 (radiative correction：放射補正) が見えてくるようになる．放射補正を含めた理論値がデータと合えば，GWS理論に対する信頼はゆるぎないものとなろう．そうした意味でGWS理論における放射補正のテストは，QEDでの $g-2$ に匹敵する役割を演ずるといえる．さらに，標準理論を使えば，未発見のヒッグスの質量に対する制限がつけられる．また，標準理論値からの小さなズレが，新しい現象発見につながることも期待される．

7.3.1 ワインバーグ角の定義と放射補正量 Δr

放射補正は考察する過程により異なるが，ここでは弱相互作用の基本的な量である W および Z ボソンの質量，荷電カレントの結合定数，中性カレントの結合定数，ワインバーグ角 $\sin^2\theta_W$ の間の関係式を考慮しよう．第2章でのゲージ理論の議論から最低次のボルン近似では次の関係が成立した．

$$m_W{}^2=\frac{g_W{}^2v^2}{4} \tag{7.34}$$

$$m_Z{}^2=\frac{(g_B{}^2+g_W{}^2)v^2}{4} \tag{7.35}$$

$$4\pi\alpha=e^2=\frac{g_B g_W}{(g_B{}^2+g_W{}^2)^2}=g_W{}^2\sin^2\theta_W \tag{7.36}$$

$$\frac{G_F}{\sqrt{2}}=\frac{1}{2v^2}=\frac{g_W{}^2}{8m_W{}^2}=\frac{\pi\alpha}{2m_W{}^2\sin^2\theta_W} \tag{7.37}$$

ただし，$g_W(g_B)$ は，$W(B)$ ゲージボソンとフェルミオンの結合定数，v はヒッグスの真空期待値である．放射補正を考慮すると，元のラグランジアンに現れたパラメターすなわち裸の質量 m_0，裸の結合定数 e_0, g_0 が変更を受けるので，真の観測量 m, e, g_W で書き直して

$$m_0{}^2=m^2+\delta m^2, \qquad e_0=e+\delta e, \qquad g_{0W}=g_W+\delta g_W$$

とおく．もともと独立なパラメターは g_B, g_W, v の3個であることを考慮すると，放射補正を受けたあとの g_B, g_W, v からつくれる独立な物理量はやはり3個である．現象的な考察には実験で精密に決められる量から出発するのが便利であるから，g_B, g_W, v の代わりに α, m_W, m_Z を独立に与える量とすれば，G_F, $\sin^2\theta_W$ はこれらから計算できる量となる．すなわち

$$G_F=G(\alpha, m_W, m_Z, m_t, m_H) \tag{7.38 a}$$

$$\sin^2\theta_W=S(\alpha, m_W, m_Z, m_t, m_H) \tag{7.38 b}$$

ここに，m_t や m_H が入るのは，放射補正の中にトップクォークやヒッグス粒子が仮想粒子として現れるからである．他の粒子も現れるが自発的に対称性が破れる理論では結合定数が質量に比例するので数値的に重要でない．実験的には α, G_F, m_Z が非常に精度よく決められているので，これを入力として他を求めることになる．

$\sin^2\theta_W$ は (7.34)～(7.36) を使えば，

$$\text{定義 1} \qquad \sin^2\theta_W=1-\frac{m_W{}^2}{m_Z{}^2} \tag{7.39}$$

という関係式が成立する[16]．これは，ボルン近似で成立する式であるが，右辺を実験で与えられる質量と拡大定義するとき，(7.39) を質量殻 (on shell) における $\sin^2\theta_W$ という．質量は実験で一義的に決められるから，観測質量で定義した $\sin^2\theta_W$ は，定数であり繰り込みスケール μ によらない．観測値にはすべての高次の効果が入っているから，$\sin^2\theta_W$ 自身もすでにすべての高次効果

を含んでいることになり，これ以上の放射補正を受けない．その意味で，質量殻による定義は，物理量との関連が最も明快な概念である．

次に，ラグランジアンの中の中性カレントの中に現れる $\sin^2\theta_W$ がある．

$$\text{定義 2} \quad J_N{}^{\mu} = J_3{}^{\mu} - Q_f \sin^2\theta_f J_\gamma{}^{\mu} \tag{7.40}$$

この式は反応の断面積の中に現れるから，断面積や非対称の実験測定値から直接決められる量である．高次補正効果を含んでおり，ワインバーグ角はスケール因子 μ（典型的には運動量遷移 Q）の関数である．例えば，§7.1.3 で議論した改良ボルン近似式を使って決めたワインバーグ角はこれにあたる（$\mu = m_Z$）．また，第 4 章で議論した $\nu_\mu e$ 散乱の反応から求めた $\sin^2\theta_W(\nu e)$ は，これの低エネルギー版である．

さらに，次のように，結合定数によって第 3 の $\sin^2\theta_W$ を定義することができる．放射補正を入れると，結合定数は一般に繰り込みスケールのパラメター μ の関数となるので，

$$\text{定義 3} \quad \sin^2\theta_W(\mu) \equiv \frac{e^2(\mu)}{g_W{}^2(\mu)} = \frac{g_B{}^2(\mu)}{g_B{}^2(\mu) + g_W{}^2(\mu)} \tag{7.41}$$

特に紫外発散項を QCD と同じく $\overline{MS}$ 方式で処理したときの $\sin^2\theta_W$ を $\sin^2\theta_{\overline{MS}} = \sin^2\hat{\theta}_W = \hat{s}_W{}^2$ と書く．この定義は直接観測量には結びつきにくいものの，繰り込み処方が QCD と共通で理論的解析には便利であり，大統一理論との関連を議論するときなどよく使われる．

ボルン近似の段階では，これらの $\sin^2\theta_W$ は定義の仕方によらずすべて等しいが，放射補正を入れると，関与するフェルミオン種や反応過程により補正の受け方が異なるので，数値的に差がでてくる．以下は $\sin^2\theta_W$ は (7.39) で定義されたものを標準にすることにして話を進める．いま，α, m_W, m_Z から出発する場合，G_F, $\sin^2\theta_W$ は導かれる量であるから，

$$m_W{}^2 \sin^2\theta_W = m_Z{}^2 \cos^2\theta_W \sin^2\theta_W = \frac{\pi\alpha}{\sqrt{2}G_F} \frac{1}{1-\Delta r} \equiv \frac{A}{1-\Delta r} \tag{7.42}$$

$$A = (37.2802(30)\,\mathrm{GeV})^2$$

によって，放射補正量 Δr を定義する[16]．ここに G_F はミューオンの崩壊から，α は電子のトムソン散乱から決められるから，繰り込みスケール μ の関数と見た場合それぞれ $\mu = m_\mu \fallingdotseq 0$，および $\mu = 0$ で定義されている量である．

一方，$\sin^2\theta_W$ は，質量により定義されるから，繰り込みスケールの関数とみた場合の自然なスケールは m_Z である．Δr はこの二つのエネルギースケール間の橋渡しの役をつとめる量と見なせる．Δr は後に計算するように～0.04程度の値であるので，実験的に十分チェックできる大きさである．

実験的には m_Z が非常に精密に測定できるのに反し，m_W や，$\sin^2\theta_W$ の精度はそれほどでもない．そこで，見方を変えて，(7.42) を m_W と $\sin^2\theta_W$ を精密に決めるための計算式とみなすこともできる．この場合

$$m_W{}^2=\frac{m_Z{}^2}{2}\left(1+\sqrt{1-\frac{4A}{m_Z{}^2(1-\Delta r)}}\right) \tag{7.43 a}$$

$$\sin^2\theta_W=\frac{1}{2}\left(1-\sqrt{1-\frac{4A}{m_Z{}^2(1-\Delta r)}}\right) \tag{7.43 b}$$

となる．実際，現時点での最も精密な m_W と $\sin^2\theta_W$ の値は，Δr には理論値を使い，m_Z の実験値からこの式によって求めたものである．

W の質量の Δr に対する感度は，

$$\frac{\Delta m_W{}^2}{m_W{}^2}=-\frac{\sin^2\theta_W}{\cos^2\theta_W-\sin^2\theta_W}\Delta r \tag{7.44 a}$$

であるので，仮に Δr を 0.04 とすると

$$\Delta m_W=-\frac{m_W\sin^2\theta_W/2}{\cos^2\theta_W-\sin^2\theta_W}\Delta r\sim-16.4\Delta r\ \mathrm{GeV}\sim 623\ \mathrm{MeV} \tag{7.44 b}$$

m_W は現在誤差 100 MeV 程度の精度で求められている．放射補正による m_W の変化はその6倍以上あり，標準理論の高次補正のテストになることがわかる．

7.3.2 ρ パラメター

ここで，後の議論のため中性カレントを扱う場合に現れる ρ パラメターを定義しておこう．ρ は，高次の効果を含めた中性カレント結合定数と荷電カレント結合定数の比として定義される．

$$\rho\equiv\rho_{\mathrm{tree}}(1+\Delta\rho)\equiv\frac{G_N}{G_F} \tag{7.45 a}$$

$\Delta\rho$ は高次の補正効果である．ρ はまた

$$\rho=\rho_{\mathrm{mass}}=\frac{m_W{}^2}{m_Z{}^2\cos^2\theta_W{}^2} \tag{7.45 b}$$

によっても定義できる．標準理論とは違って，ヒッグス粒子が複数個ある場合は，W, Z の質量 ((7.34), (7.35)) は，v_i を中性ヒッグス場の真空期待値，I_i をヒッグスのアイソスピンとして，

$$m_W{}^2 = \frac{g_W{}^2}{2}\sum_i v_i{}^2[I_i(I_i+1) - I_{3i}{}^2] \tag{7.46}$$

$$m_Z{}^2 = \frac{g_W{}^2}{2\cos^2\theta_W{}^2}\sum v_i{}^2(2I_{3i}{}^2) \tag{7.47}$$

と変更されるので，ボルン近似の段階では

$$\rho_{\text{mass}} = \frac{\sum v_i{}^2[I_i(I_i+1) - I_{3i}{}^2]}{\sum v_i{}^2(2I_{3i}{}^2)} \tag{7.48}$$

となる．余分に存在するヒッグス場が，三重項を含めば $1/2 \leqq \rho_{\text{mass}} \leqq 1$ となるが，二重項を考える限りヒッグス場が複数あっても，ボルン近似の段階では，$\rho = \rho_{\text{tree}} = \rho_{\text{mass}} = 1$ である．質量殻による $\sin^2\theta_W$ の定義 (7.39) では ρ の高次効果を $\sin^2\theta_W$ の中に取り込んでしまうので，ρ_{mass} は定義によって 1 となり高次補正効果を受けない．

7.3.3 ゲージボソンの放射補正

a. 繰り込み処方

放射補正には，無限大の発散が現れるので繰り込みをしなければならない．一番簡単な方法は最小引き算法と呼ばれる．これは発散積分を次元正則化の方法で処理し，結果の中から発散部分のみを引き算する方法である (付録 J)．この方法は簡単であるが，エネルギーの次元をもつ不定のスケールパラメター μ がつけ加わるという代償を支払う．μ の値さえ指定すれば個々の物理量の計算結果の数値化が可能である．閉じ込めのためクォークやグルーオンの質量が明確に定義できない QCD では，基本的にこの方法を採用している．電弱相互作用では事情が異なり，電荷やゲージボソンの質量値が実験的に明確に定義できる．もともとのラグランジアンに入っているパラメター (質量や結合定数) は，放射補正を加えた後は無限大の発散項を含み切断のとり方によって変わる量であるので，真の物理量ではなく裸の質量，裸の結合定数と呼ばれる．しかし，無限大の発散をこれらパラメターに繰り込んだうえでの物理量同士の相互関係式には無限大の発散量はなく，実験で検証可能な予言ができるのである．

このとき裸のパラメターつまり無限大の発散量は質量殻上にある実粒子の質量などを基準にとって表現するので，この方法は質量殻処理法 (on-shell scheme) と呼ばれる．このときどの物理量を基準にとるかによって繰り込み処方が異なる．

QED では，高次効果における発散量は，波動関数の繰り込み (再規格化) と質量と電荷の繰り込み (再定義) によって吸収できることが知られている (I-§5.8 参照)．電弱相互作用理論はカイラル非アーベル理論であることにより繰り込み処方はいささか複雑となる．無限大の処理は，ゲージ条件を明らかにし一般にはゴーストなど非物理的粒子の寄与をも入れて行い，フェルミオンは左巻き部分と右巻き部分に分け別々に取り扱わなければならない．しかし，詳しい議論は本書の範囲を逸脱するので，ここでは物理的背景の理解に必要な繰り込み処方の筋道の概略を述べるに止め，詳しい計算は省略する．また考慮対象とする重要な反応としてはゲージボソンを1個交換する 4-フェルミオン反応過程 ($\mu^- \to (W^- + \nu_\mu) \to e + \bar{\nu}_e + \nu_\mu$, $e\bar{e} \to (\gamma, Z) \to f\bar{f}$) に限る．この場合現象的には，ゲージボソンの自己エネルギー効果，それもフェルミオンループの効果を考察するのみで主要な放射補正効果は取り入れられる．

繰り込み (無限大の発散項を差し引く) の質量殻処理法は次の通りである．簡単のため，当初のラグランジアンに現れる裸の結合定数を g_0，裸の質量を m_0^2，場を ϕ_0 で代表させることにしよう．高次のループ補正を計算すると，無限大の発散項を含む式となる．無限大を処理するためには，発散を含む関数を正則化してから計算を実行し，発散項を一定の処方に従って引き算し，最後に切断パラメターを無限大にもっていく．無限大を論理的に矛盾なく処理するためには，引き算項をあらかじめラグランジアンの中に取り入れておくと便利である．裸の結合定数 g_0，裸の質量 m_0^2，裸の場 ϕ_0 に無限大の引き算項 δ_g, δm^2, δZ を補正した後の結合定数 g，場 ϕ を物理的な量と定義し直すと，

$$g_0 = g + \delta g, \qquad m_0^2 = m^2 + \delta m^2 \tag{7.49}$$

$$\phi_0 = Z^{1/2}\phi \fallingdotseq \left(1 + \frac{1}{2}\delta Z\right)\phi = \phi + \delta\phi \tag{7.50}$$

ラグランジアンは，

$$\mathcal{L}(g_0, m_0^2, \phi_0) = \mathcal{L}(g + \delta g, m^2 + \delta m^2, \phi + \delta\phi)$$

$$= \mathscr{L}(g, m^2, \phi) + \delta\mathscr{L}(g, \phi, m^2, \delta g, \delta m^2, \delta Z) \qquad (7.51)$$

と分割できる．この結果得られる余分の項 $\delta\mathscr{L}$ による散乱振幅をも同時に計算して，$\mathscr{L}$ を使って求めた高次補正項に加えるのである．そうすると，各引き算項 $(\delta g, \delta m^2, \delta Z)$ が高次の寄与と自動的に正しい組み合わせで現れ，有限な結果が得られるようになっている．

質量殻処理法に限っても，繰り込み処方（$\mathscr{L}$ と $\delta\mathscr{L}$ に分けるやり方）にはいろいろのヴァラエティがある[14]．例えば，場の繰り込みは行わずに，パラメター（質量と結合定数）の繰り込みによる引き算だけを行う方法がある[16]．このやり方では，すべての伝播関数やヴァーテックス関数を，単独では有限にはできないが，散乱行列を計算すれば，各種の無限大が相殺し，正しい式が得られることが広義のワード恒等式によって保証されている．ただし，この場合でも理論を無矛盾とするための外線（散乱の前後に現れる粒子）の波動関数の繰り込み（再規格化）は必要である．

以下の議論は次の方法に従う．すなわち，ラグランジアンに現れる独立なパラメターを e, m_W, m_Z の3個にとり，ゲージ場の波動関数の繰り込みも行って個々の伝播関数を有限にする処方に従うが，その数は最小限にとどめる（元々の出発点にあった W と B の2種の場のみ再規格化を行う）．本来はフェルミオン場やヒッグス場の繰り込みも必要であるが，考慮する過程を4フェルミ反応に限ればフェルミオンの伝播関数を必要としない．ただし，繰り込み処理を無矛盾に行うための外線の波動関数の再規格化は考慮する必要があるが，これは一般化したワード恒等式によって，ヴァーテックス部分の再規格化部分と相殺してあらわにでてくることはないので，ここでは議論から外す．ヒッグスは，ゲージボソンの自己エネルギーループに寄与する一員として重要であるが，簡単のためにフェルミオンループのみを議論し，ヒッグスについては結果のみを引用することにする．

このほかにも繰り込み処方はいろいろある．種々の処理法は無限大の発散項を除去する点では同等であるが，無限大を差し引いた後の有限項には差がある．摂動の無限次まで計算すれば，計算された物理量は繰り込み処方によらないはずであるが，計算を n 次で止めるときはこの限りではなく，処方の違いによる結果の差は，$(n+1)$ 次のオーダーである．

b. 伝播関数の繰り込み

まず最初に，ゲージボソンの伝播関数における繰り込み処方および引き算項の入れ方を眺めてみよう．ベクトルボソン $V(V=W^{\pm}, Z, \gamma)$ の伝播関数は，第1近似では一般に，

$$D_{V0}{}^{\mu\nu}\equiv iT\langle V_0{}^{\mu}V_0{}^{\nu}\rangle=-i\frac{g^{\mu\nu}+B(q^2)q^{\mu}q^{\nu}}{q^2-m_V{}^2} \tag{7.52 a}$$

と表される．B はゲージのとり方によって変わる量であるが，観測量である散乱振幅には，常にカレントに挟まれる形ででてくる．その場合 B に比例する項は，0 (ベクトルカレント) または反応に関与する粒子の質量 (軸性ベクトルカレント) に比例する量を与える．いずれにしろ電子反応では 0 とおいてよいから，以下の考察からは外して，

$$D_{V0}=-i\frac{1}{q^2-m_V{}^2} \tag{7.52 b}$$

を考えることにする．これを図式的に図7.7 (g) のように表す．高次過程としては，$O(g_V{}^2)$ のフェルミオンループ (図 7.7 (a)) の補正効果を $\Sigma_{VV}(q^2)$ (付録の式 (J.5)) とすると，上記の伝播関数が

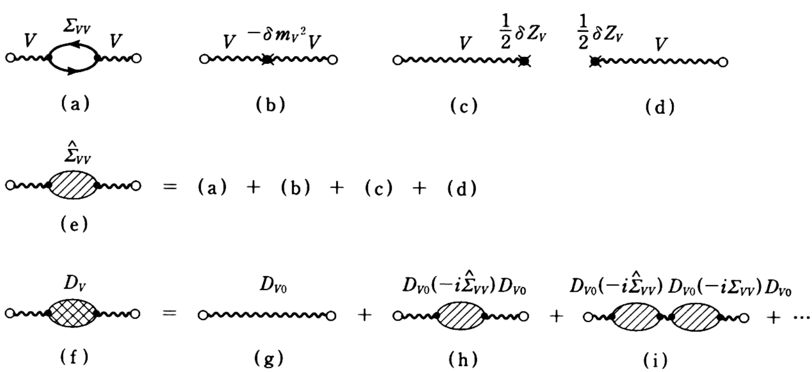


図 7.7　ゲージボソンの自己エネルギーと引き算項のファインマン図
(a) フェルミオンループによる自己エネルギー，(b) 質量引き算項，(c)，(d) 波動関数繰り込みによる引き算項，(e) 正則化したフェルミオンループ，(f) ループの繰り返しについて和をとった後の伝播関数，(g) 裸の伝播関数．

$$D_{V0} \longrightarrow \left[\frac{-i}{q^2-m_V{}^2}+\frac{-i}{q^2-m_V{}^2}(-i\Sigma_{VV}(q^2))\frac{-i}{q^2-m_V{}^2}\right] \tag{7.53}$$

のように補正される (図 7.7 (g)+(a)). このほかに，引き算項を含むラグランジアン $\delta\mathscr{L}$ を使って得られるファインマングラフの寄与を計算してつけ加える必要がある. $\delta\mathscr{L}$ の中の質量補正項 $\delta m_V{}^2 V_\mu V^\mu$ は直接 V と V をつなげる役目をする. この寄与は，ループの寄与 $(-i\Sigma_{VV})$ を定数 $(+i\delta m_V{}^2)$ で置き換えたものと等しい (図 7.7 (b)). また物理的な場でつくった伝播関数 D_V は裸の場でつくった伝播関数 D_{V0} と

$$D_V{}^{\mu\nu}=iT\langle V^\mu V^\nu\rangle=iT\langle Z_V{}^{-1}V_0{}^\mu V_0{}^\nu\rangle\fallingdotseq(1-\delta Z_V)D_{V0}{}^{\mu\nu} \tag{7.54}$$

という関係にあるので，$\delta\mathscr{L}$ の中の δZ_V 部分による寄与は，もともとの伝播関数 (7.52 b) に $(1-\delta Z_V)$ を掛け算することに等しい. 結局，伝播関数に対するすべての $O(\alpha)$ の補正を考慮すると次のような形になる.

$$D_{V0} \longrightarrow \frac{-i}{q^2-m_V{}^2}\left[1-\delta Z_V+(\delta m_V{}^2-\Sigma_{VV}(q^2))\frac{1}{q^2-m_V{}^2}\right] \tag{7.55}$$

δZ_V による寄与を図 7.8 (c), (d) のように表す. $(1/2)\delta Z_V$ が各伝播関数の端（散乱振幅の中ではヴァーテックス）につく. 両方合わせて δZ_V の寄与となる. Σ_{VV} は，q^2 で展開した場合，第 1 項，第 2 項が対数発散量を含む*5). すなわち，

$$\Sigma_{VV}(q^2)=A+Bq^2+\text{有限の寄与}$$

という形である (式 (J.27)～(J.32) を参照). A, B が発散項を含むので $\delta m_V{}^2$ と δZ_V を適切に選ぶことによって，$\Sigma_{VV}(q^2)$ の中の発散項を打ち消し有限な関数にすることができる. すなわち，引き算項を導入することによって，繰り込まれた有限なループ関数

$$\hat{\Sigma}_{VV}(q^2)=\Sigma_{VV}(q^2)+\delta Z_V(q^2-m_V{}^2)-\delta m_V{}^2 \tag{7.56}$$

が定義できる (図7.7 (e)). これを (7.55) に入れると，再び (7.53) の形にもどるが，今度はすべて有限な関数のみで書けている. ここで，ループの繰り返し (図7.7 (i)) をも考慮に入れて級数和をとると，結果は D_V の分母に $\hat{\Sigma}_{VV}(q^2)$ を付加したものに等しい. すなわちベクトル粒子の伝播関数の $O(\alpha)$

*5) 形式的に q^2 のべきを数えると 1 次，2 次の発散となるが，ゲージ理論では対数発散にしかならないことが保証されている.

のループ補正の最終的な形は，

$$D_{V0}=\frac{1}{q^2-m_V{}^2}\xrightarrow{\text{ループ補正}}D_V=\frac{1}{q^2-m_V{}^2+\hat{\Sigma}_{VV}(q^2)} \tag{7.57}$$

で与えられる（図 7.7 (f)).

観測にかかる物理的な質量 $m_V{}^2$ は，伝播関数 D_V の極の実数部として定義されるから

$$\delta m_V{}^2=\mathrm{Re}\Sigma_{VV}(m_V{}^2) \tag{7.58}$$

を満たさなければならない．δZ_V の決め方は後で述べる．ここで

$$\mathrm{Re}\hat{\Sigma}_{VV}(q^2)=(q^2-m_V{}^2)\hat{\Pi}_V(q^2) \tag{7.59 a}$$

$$\hat{\Pi}_V(q^2)=\Pi_V(q^2)+\delta Z_V=\mathrm{Re}\frac{\sum_{VV}(q^2)-\sum_{VV}(m_V{}^2)}{q^2-m_V{}^2}+\delta Z_V \tag{7.59 b}$$

によって，$\hat{\Pi}$ 関数を導入して書き直すと，ループの繰り返しも含めた D_V の最終の形は $O(\alpha)$ で

$$iD_V=\frac{1}{1+\hat{\Pi}_V(q^2)}\frac{1}{q^2-m_V{}^2+im_V\Gamma_V} \tag{7.60}$$

という形に書き直せる．ただし，

$$m_V\Gamma_V=Im\hat{\Sigma}_{VV}(q^2)/(1+\hat{\Pi}_V(q^2)) \tag{7.61}$$

実際の過程，例えば μ 崩壊過程で W ボソンの交換が行われるときは，上記伝播関数は弱カレントに挟まれてでてくるので，伝播関数には結合定数 $g_W{}^2$ が掛かる．結局，ゲージボソンの放射補正は，結合定数 $g_V{}^2$ を，q^2 に依存する実効結合定数 $g_V{}^2(q^2)$

$$g_V{}^2\longrightarrow g_V{}^2(q^2)=\frac{g_V{}^2}{1+\hat{\Pi}_V(q^2)} \tag{7.62}$$

に置き換え，かつ質量幅 Γ を導入する効果をもつこととなる．

c. γ-Z 混合

電弱相互作用の場合は，フェルミオンループはフォトンにも Z にも結合できるので，γ-Z 混合効果（$\Sigma_{\gamma Z}$ と書く）が現れる（図7.8 (a))．したがって引き算の必要なループ関数は $\Sigma_{WW}, \Sigma_{\gamma\gamma}, \Sigma_{ZZ}, \Sigma_{\gamma Z}$ の4種あるが，もともとのゲージボソンは B と W の 2 種であるから，これらの関数および引き算項は互いに関連している．その関連を見るために，まず Z ボソンと γ の定義式

$$Z_\mu=\cos\theta_W W_{3\mu}-\sin\theta_W\, B_\mu \tag{7.63 a}$$

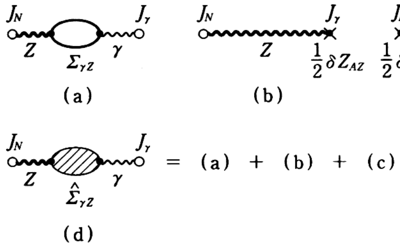


図 7.8 γ-Z 混合効果

(a) Z と γ に結合するフェルミオンループ，(b) γ に混入する Z は直接 J_γ に結合する，(c) Z に混入する γ は直接 J_N に結合する，(d) 正則化したフェルミオンループ

$$A_\mu = +\sin\theta_W W_{3\mu} + \cos\theta_W B_\mu \tag{7.63 b}$$

および，B と W 場の繰り込み関係式

$$B_{0\mu} = Z_B{}^{1/2} B_\mu \fallingdotseq \left(1+\frac{1}{2}\delta Z_B\right) B_\mu \tag{7.64 a}$$

$$W_{0\mu} = Z_W{}^{1/2} W_\mu \fallingdotseq \left(1+\frac{1}{2}\delta Z_W\right) W_\mu \tag{7.64 b}$$

から，A_μ と Z_μ に対する繰り込みの引き算項が導けて，次のように表せる．

$$\begin{bmatrix} Z_{0\mu} \\ A_{0\mu} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+\frac{1}{2}\delta Z_Z, & \frac{1}{2}\delta Z_{ZA} \\ \frac{1}{2}\delta Z_{AZ}, & 1+\frac{1}{2}\delta Z_A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Z_\mu \\ A_\mu \end{bmatrix} \tag{7.65}$$

$$\begin{bmatrix} \delta Z_Z \\ \delta Z_A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_W{}^2, & s_W{}^2 \\ s_W{}^2, & c_W{}^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta Z_W \\ \delta Z_B \end{bmatrix} \tag{7.66}$$

$$\delta Z_{AZ} = s_W c_W (\delta Z_W - \delta Z_B) + \frac{\delta s_W{}^2}{c_W s_W} \tag{7.67 a}$$

$$\delta Z_{ZA} = s_W c_W (\delta Z_W - \delta Z_B) - \frac{\delta s_W{}^2}{c_W s_W} \tag{7.67 b}$$

$$\frac{\delta s_W{}^2}{c_W s_W} = \frac{c_W}{s_W}\left(\frac{\delta m_Z{}^2}{m_Z{}^2} - \frac{\delta m_W{}^2}{m_W{}^2}\right) \tag{7.68}$$

ただし，$s_W{}^2 = \sin^2\theta_W$，$c_W{}^2 = \cos^2\theta_W$ であり，最後の式を導くにあたっては，$\sin^2\theta_W$ の定義式 (7.39) を使った．δZ_{AZ} は，Z 成分が A の中に混入することを示し，Z ボソンが直接電磁カレント $J_\gamma{}^\mu$ と結合する相互作用を与える（図 7.8 (b)）．同様に δZ_{ZA} は，フォトンが直接中性カレント $J_N{}^\mu$ と結合する項を

与える (図7.8 (c)). どちらも，高次ループ効果として現れる γ-Z 混合項 $\Sigma_{\gamma Z}(q^2)$ の引き算項として現れる. 結局，$O(\alpha)$ の高次補正を入れた伝播関数のループと引き算項の寄与を，式 (7.55) に対応する形で書くと次のように要約できる.

$$iD_{ab} \to \frac{1}{2}\left[\frac{\delta_{ab}-\delta Z_{ba}}{q^2-m_a{}^2}+\frac{\delta_{ab}-\delta Z_{ab}}{q^2-m_b{}^2}\right]+\frac{\delta_{ab}\delta m_a{}^2-\Sigma_{ab}(q^2)}{(q^2-m_a{}^2)(q^2-m_b{}^2)} \qquad (7.69)$$

ここに，a, b は $W, Z, A\,(=\gamma)$ を表し，$\delta Z_{aa}=\delta Z_a$ である. フォトンの場合は，ゲージ不変性により $\Sigma_{\gamma\gamma}(0)=0$ が保証されているので，質量引き算項 $\delta m_\gamma{}^2$ は必要ない. 引き算項を入れて正則化したループ関数を下にまとめておく.

$$\hat{\Sigma}_{\gamma\gamma}(q^2)=\Sigma_{\gamma\gamma}(q^2)+\delta Z_A q^2 \equiv q^2(\Pi_\gamma(q^2)+\delta Z_A) \qquad (7.70\,\mathrm{a})$$

$$\hat{\Sigma}_{\gamma Z}(q^2)=\Sigma_{\gamma Z}(q^2)+\frac{1}{2}\{\delta Z_{AZ}q^2+\delta Z_{ZA}(q^2-m_Z{}^2)\} \qquad (7.70\,\mathrm{b})$$

$$\hat{\Sigma}_{ZZ}(q^2)=\Sigma_{ZZ}(q^2)-\delta m_Z{}^2+\delta Z_Z(q^2-m_Z{}^2) \qquad (7.70\,\mathrm{c})$$

$$\hat{\Sigma}_{WW}(q^2)=\Sigma_{WW}(q^2)-\delta m_W{}^2+\delta Z_W(q^2-m_W{}^2) \qquad (7.70\,\mathrm{d})$$

引き算項は次の条件を要求して決められる. まず，3 個のパラメター e, m_W, m_Z に対して

(1) 電子の結合定数 e はトムソン散乱で決まる値，すなわち $e^-e^-\gamma$ ヴァーテックスでの $q^2=0$ における値で定義される.

(2), (3) W, Z の伝播関数が，$q^2=m_W{}^2$, $m_Z{}^2$ で極をもつ.

波動関数繰り込み条件は，QED での繰り込み議論に合わせるようにして，

(4) フォトンの伝播関数が，質量殻上 $(q^2 \to 0)$ で $-ig^{\mu\nu}/q^2$ になるように規格化する.

(5) 実フォトンには Z ボソンの混合がない.

という条件を課す.

条件 (2), (3) は，

$$\delta m_W{}^2=\mathrm{Re}\Sigma_{WW}(m_W{}^2) \qquad (7.71\,\mathrm{a})$$

$$\delta m_Z{}^2=\mathrm{Re}\Sigma_{ZZ}(m_Z{}^2) \qquad (7.71\,\mathrm{b})$$

を与える. 条件 (4) は

$$\hat{\Pi}_\gamma(0)=0 \longrightarrow \delta Z_A=-\Pi_\gamma(0) \qquad (7.72)$$

条件 (5) は，

$$\hat{\Sigma}_{\gamma Z}(0)=0 \longrightarrow \delta Z_{ZA}=\frac{2\Sigma_{\gamma Z}(0)}{m_Z{}^2} \tag{7.73}$$

他の引き算項は，(7.65)～(7.68) の関係式から導ける．まとめると

$$\hat{\Sigma}_{\gamma\gamma}(q^2)=\Sigma_{\gamma\gamma}(q^2)-\Pi_\gamma(0)q^2 \equiv q^2(\Pi_\gamma(q^2)-\Pi_\gamma(0)) \tag{7.74 a}$$

$$\hat{\Sigma}_{\gamma Z}(q^2)=\Sigma_{\gamma Z}(q^2)-\Sigma_{\gamma Z}(0)+q^2\frac{\delta' s_W{}^2}{c_W s_W} \tag{7.74 b}$$

$$\hat{\Sigma}_{ZZ}(q^2)=\Sigma_{ZZ}(q^2)-\mathrm{Re}\Sigma_{ZZ}(m_Z{}^2)+\delta Z_Z(q^2-m_Z{}^2) \tag{7.74 c}$$

$$\hat{\Sigma}_{WW}(q^2)=\Sigma_{WW}(q^2)-\mathrm{Re}\Sigma_{WW}(m_W{}^2)+\delta Z_W(q^2-m_W{}^2) \tag{7.74 d}$$

$$\delta Z_Z=-\Pi_\gamma(0)+\frac{c_W{}^2-s_W{}^2}{c_W{}^2 s_W{}^2}\delta' s_W{}^2 \tag{7.75 a}$$

$$\delta Z_W=-\Pi_\gamma(0)+\frac{\delta' s_W{}^2}{s_W{}^2} \tag{7.75 b}$$

$$\begin{aligned}\delta' s_W{}^2&=\delta s_W{}^2+2c_W s_W\frac{\Sigma_{\gamma Z}(0)}{m_Z{}^2}\\&=c_W{}^2\mathrm{Re}\left[\frac{\Sigma_{ZZ}(m_Z{}^2)}{m_Z{}^2}-\frac{\Sigma_{WW}(m_W{}^2)}{m_W{}^2}+2\frac{s_W}{c_W}\frac{\Sigma_{\gamma Z}(0)}{m_Z{}^2}\right]\end{aligned} \tag{7.75 c}$$

最後に，条件 (1) による電荷繰り込みの条件をみよう．これにはヴァーテックス関数の計算を必要とするが，一般化したワード恒等式によりフェルミオンの波動関数の再規格化部分と関係がつき，結果はフェルミオン種に関係なく

$$\frac{\delta e}{e}=\frac{1}{2}\Pi_\gamma(0)+\frac{s_W}{c_W}\frac{\Sigma_{\gamma Z}(0)}{m_Z{}^2} \tag{7.76}$$

となる[14]．フェルミオンループのみを問題にする場合は，$\Sigma_{\gamma Z}(0)=0$ であるので (付録 J.42 a)，上の関係式は QED の電荷の繰り込み条件と同じになる．

7.3.4 Δr の 評 価

a. ミューオン崩壊

Δr を計算するために，まず G_F の定義を思い起こそう．G_F は，4-フェルミ相互作用のボルン近似 (付録 (C. 49) 参照) に QED 補正を加えた式が μ 崩壊の実験値を与えるという条件で定義される[17]．

$$\frac{1}{\tau_\mu}=\frac{G_F{}^2 m_\mu{}^5}{192\pi^3}f\left(\frac{m_e{}^2}{m_\mu{}^2}\right)\left\{1+\frac{\alpha(m_\mu)}{2\pi}\left(\frac{25}{4}-\pi^2\right)\right\} \tag{7.77 a}$$

$$\alpha^{-1}(m_\mu)=\alpha^{-1}-\frac{2}{3\pi}\ln\left(\frac{m_\mu}{m_e}\right)+\frac{1}{6\pi}\fallingdotseq 136 \tag{7.77 b}$$

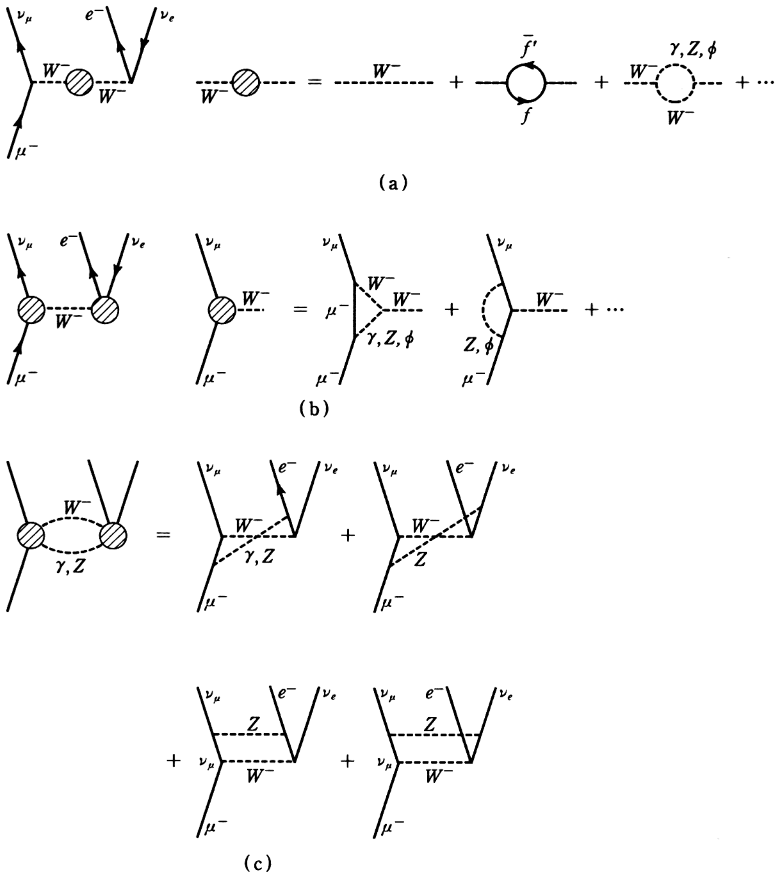


図 7.9 μ-崩壊におけるさまざまな高次補正図
(a) W の自己エネルギー, (b) ヴァーテックス補正, (c) 箱型図

$$f(x)=1-8x+8x^3-x^4-12x^2\ln x \qquad (7.77\,\mathrm{c})$$

この定義式には，純粋な電磁相互作用の補正は入っているが，電弱相互作用の補正は入っていない（仮想フォトンと W, Z の混在する補正は電弱相互作用補正の中に含める）．μ 崩壊に対する弱い相互作用の高次補正には，

(1) W の伝播関数の自己エネルギー補正（ときに間接 (oblique) 補正と呼ばれる．図 7.9 (a)）

(2) ヴァーテックス補正（図 7.9 (b)）

(3) 箱型図による補正 (図 7.9 (c))

の 3 種類がある．(2), (3) をまとめて，直接 (direct) 補正と呼ぶこともある．(2), (3) の寄与は小さいので，以下の議論からははずし必要に応じて結果のみつけ加えることにする．

ミューオン崩壊の振幅を標準理論で書き下ろし，W ボソンの自己エネルギーを取り入れると

$$\mathcal{M} \sim -\frac{g_W{}^2}{8(1+\hat{\Pi}_W(q^2))} \frac{J_W{}^- \otimes J_W{}^+}{q^2 - m_W{}^2}\bigg|_{q^2 \fallingdotseq 0} + \cdots = \frac{g_W{}^2}{8 m_W{}^2} \frac{J_W{}^- \otimes J_W{}^+}{1+\hat{\Pi}_W(0)} + \cdots$$

$$g_W{}^2 = e^2 / s_W{}^2 c_W{}^2 \tag{7.78}$$

ここに，$J_W{}^- \otimes J_W{}^+$ はディラックの平面波解によるカレントの積を形式的に表したものである．すなわち

$$J_W{}^- \otimes J_W{}^+ = \bar{u}(p_e)\gamma_\mu(1-\gamma^5)v(p_{\nu_e}) \cdot \bar{v}(p_{\nu_\mu})\gamma^\mu(1-\gamma^5)u(p_\mu) \tag{7.79}$$

一方，4 フェルミ相互作用によるボルン近似式は

$$\mathcal{M} = \frac{G_F}{\sqrt{2}} J_W{}^- \otimes J_W{}^+ \tag{7.80}$$

であるので，(7.42) の Δr の定義式と比較して，

$$\begin{aligned} \Delta r &= -\hat{\Pi}_W(0) + \cdots \\ &= \mathrm{Re}\frac{\Sigma_{WW}(0) - \Sigma_{WW}(m_W{}^2)}{m_W{}^2} + \Pi_\gamma(0) - \frac{\delta' s_W{}^2}{s_W{}^2} + \cdots \end{aligned} \tag{7.81 a}$$

と表される．ここで，… は W の自己エネルギー以外のヴァーテックスや，箱型図からの補正を表し，第 2 行目を導くには (7.59 b), (7.75 b) を使った．(7.74), (7.75) を使って書き直すと，

$$\begin{aligned} \Delta r = \Pi_\gamma(0) &- \frac{c_W{}^2}{s_W{}^2}\left(\frac{\Sigma_{ZZ}(m_Z{}^2) - \Sigma_{ZZ}(0)}{m_Z{}^2}\right) + \frac{c_W{}^2 - s_W{}^2}{s_W{}^2}\left(\frac{\Sigma_{WW}(m_W{}^2) - \Sigma_{WW}(0)}{m_W{}^2}\right) \\ &- \frac{c_W{}^2}{s_W{}^2}\left(\frac{\Sigma_{ZZ}(0)}{m_Z{}^2} - \frac{\Sigma_{WW}(0)}{m_W{}^2} + 2\frac{s_W}{c_W}\frac{\Sigma_{\gamma Z}(0)}{m_Z{}^2}\right) \end{aligned} \tag{7.81 b}$$

ただし，ここでは Σ は $\mathrm{Re}\,\Sigma$ のことと了解する．上式を眺めれば，Δr の中には，W の自己エネルギー効果のほかに，フォトンの自己エネルギー，Z の自己エネルギーが入っていて，これらがすべて互いに関連しあっていることがわかる．これらの関数 Σ_{ab} は，フェルミオンなどのループから計算できる (付録 J[14])．

最後の項はすでに述べた$\Delta\rho$に等しい．これを見るには，荷電ボソン結合定数がW伝播関数の補正$\hat{\Pi}_W(q^2)$を受け，中性カレント結合定数はZの伝播関数の補正$\hat{\Pi}_Z(q^2)$を受けることに着目して，ρの定義式 (7.45) から

$$\rho=\frac{1+\hat{\Pi}_W(q^2)}{1+\hat{\Pi}_Z(q^2)}\sim 1+\hat{\Pi}_W(q^2)-\hat{\Pi}_Z(q^2) \tag{7.82}$$

となるが，一般には$q^2=0$での値を以ってρと定義するので，上式で$q^2=0$とおくと

$$\Delta\rho=\frac{\Sigma_{ZZ}(0)}{m_Z{}^2}-\frac{\Sigma_{WW}(0)}{m_W{}^2}+2\frac{s_W}{c_W}\frac{\Sigma_{\gamma Z}(0)}{m_Z{}^2} \tag{7.83}$$

が得られる．実際の計算によれば，$q^2\ll m_t{}^2$である限り$\Delta\rho(q^2)$と$\Delta\rho(0)$との差は無視できる．Z共鳴以下のエネルギーでは，この$\Delta\rho$が放射補正の主役を演じる．

Zのフェルミオンループによる自己エネルギーは，実際は，Wと同じ多重項に属するアイソスピンカレントの寄与と，電磁カレントの寄与とその干渉項よりなっている．そこで，相互関係を明らかにするために，$J_N=J_3-Qs_W{}^2J_\gamma$であることに留意して結合定数部分を抜き出して

$$\Sigma_{\gamma\gamma}=e^2Q^2\Sigma_{QQ} \tag{7.84 a}$$

$$\Sigma_{\gamma Z}=eg_Z(Q\Sigma_{3Q}-Q^2s_W{}^2\Sigma_{QQ}) \tag{7.84 b}$$

$$\Sigma_{ZZ}=g_Z{}^2(\Sigma_{33}-2Qs_W{}^2\Sigma_{3Q}+Q^2s_W{}^4\Sigma_{QQ}) \tag{7.84 c}$$

$$\Sigma_{WW}=g_W{}^2\Sigma_{11} \tag{7.84 d}$$

のように書き直す．Σ_{11}やΣ_{33}は，ゲージボソンに結合するフェルミオンのアイソスピン成分を示す．(7.83) に入れると

$$\Delta\rho=\frac{e^2}{m_W{}^2s_W{}^2}(\Sigma_{33}(0)-\Sigma_{11}(0)) \tag{7.85}$$

これから，$\Delta\rho$はアイソスピンの破れを表す量であることがわかる．アイソスピン部分は，カイラル結合であるので，フェルミオンループからの寄与($\Sigma_{11}(0)$や$\Sigma_{33}(0)$)は$m_f{}^2/m_W{}^2$に比例する．この場合トップとボトムの二重項以外の寄与は無視してよい．アイソスピンが破れていなければ($m_t=m_b$)，$\Sigma_{11}=\Sigma_{33}$であり，$\Delta\rho=0$となる．実際の計算によると，$m_t\gg m_b$を考慮して，

$$\Delta\rho_t\fallingdotseq\frac{3g_W{}^2}{64\pi^2m_W{}^2}\left(m_t{}^2+m_b{}^2-\frac{2m_t{}^2m_b{}^2}{m_t{}^2-m_b{}^2}\ln\frac{m_t{}^2}{m_b{}^2}\right)$$

$$\fallingdotseq \frac{3G_F m_t^2}{8\sqrt{2}\pi^2}{}^{*6)} \fallingdotseq 0.0095\left(\frac{m_t}{175\,\mathrm{GeV}}\right)^2 \tag{7.86}$$

になる (付録 (J. 46a)).

$$\Sigma_{WW}'(q^2) \equiv \frac{\Sigma_{WW}(q^2)-\Sigma_{WW}(0)}{q^2} \tag{7.87}$$

という簡略式を定義すれば, $\varDelta r$ の式 (7.81) は,

$$\varDelta r = e^2 Q^2 \Pi_{QQ}(0) - \frac{e^2}{s_W{}^4}[\Sigma_{33}'(m_Z{}^2) - 2Qs_W{}^2\Sigma_{3Q}'(m_Z{}^2) + Q^2 s_W{}^4 \Sigma'_{QQ}(m_Z{}^2)]$$

$$+\frac{c_W{}^2 - s_W{}^2}{s_W{}^4} e^2 \Sigma_{11}'(m_W{}^2) - \frac{c_W{}^2}{s_W{}^2}\varDelta\rho + \cdots \tag{7.88}$$

と書き直せる. 電磁相互作用の有効結合定数は

$$e^2(q^2) = \frac{e^2}{1+\hat{\Pi}_\gamma(q^2)} \fallingdotseq e^2(1-\hat{\Pi}_\gamma(q^2)) = e^2(1-\Pi_\gamma(q^2)+\Pi_\gamma(0)) \tag{7.89}$$

であるから, $\Sigma_{QQ}'(m_Z{}^2) = \Pi_{QQ}(m_Z{}^2)$ を使って書き直し

$$\varDelta\alpha \equiv \frac{\alpha(m_Z{}^2)-\alpha(0)}{\alpha(0)} \equiv Q^2 e^2(\Pi_{QQ}(0) - \Pi_{QQ}(m_Z{}^2)) \tag{7.90}$$

を入れれば

$$\varDelta r = \varDelta\alpha - \frac{c_W{}^2}{s_W{}^2}\varDelta\rho - \frac{e^2}{s_W{}^4}[\Sigma_{33}'(m_Z{}^2) - 2Qs_W{}^2\Sigma_{3Q}'(m_Z{}^2)]$$

$$+\frac{c_W{}^2 - s_W{}^2}{s_W{}^4} e^2 \Sigma_{11}'(m_W{}^2) + \cdots$$

$$= \varDelta\alpha - \frac{c_W{}^2}{s_W{}^2}\varDelta\rho + \frac{c_W{}^2 - s_W{}^2}{s_W{}^2}\varepsilon_2 + 2\varepsilon_3 + \cdots \tag{7.91}$$

ただし, $\varepsilon_2, \varepsilon_3$ は次式で定義される量である.

$$\varepsilon_2 = \frac{e^2}{s_W{}^2}[\Sigma_{11}'(m_W{}^2) - \Sigma_{33}'(m_Z{}^2)] \tag{7.92 a}$$

$$\varepsilon_3 = \frac{e^2}{s_W{}^2}[\Sigma_{3Q}'(m_Z{}^2) - \Sigma_{33}'(m_Z{}^2)] \tag{7.92 b}$$

ここで Σ_{3Q}' の係数は実は QI_3 であり, 2 重項について和をとると Σ_{33}' の係数と等しくなることを使った. (7.91) の各項 ($\varDelta\alpha, \varDelta\rho, \varepsilon_2, \varepsilon_3$) はすべて有限である (付録 J 参照). 第 3 項以下は小さい量であるので, まとめて,

---

*6) α の代わりに G_F で書いた量は, ある種の補正がすでに入っており (§7.3.5 の議論を参照), 区別するために $\varDelta\bar{\rho}$ と書くこともある.

$$\Delta r = \Delta\alpha - \frac{c_W{}^2}{s_W{}^2}\Delta\rho + r_1 \tag{7.93}$$

と書く．要約すると，Δr の中身は，微細構造定数 α を $q^2=0$ から $q^2=m_Z{}^2$ まで動かしたスケール変化に対応する純粋な QED 補正部分と，(t, b) をループとするゲージボソンの真空偏極効果が主要項であることがわかった．

b．電磁相互作用の有効結合定数

$\Delta\alpha$ に対するフェルミオンループの寄与は，

$$\Delta\alpha = \frac{\alpha}{3\pi}\sum_f Q_f{}^2\left(\ln\frac{m_Z{}^2}{m_f{}^2} - \frac{5}{3}\right) \tag{7.94}$$

で与えられる（付録 (J.44)）．この式は，レプトンに関しては正確な数値計算ができるが，クォークの質量には不定性があるので，このままでは正確な評価ができない．しかし，幸いなことに分散式を使えば実験測定値で書き直すことができる．

$$\Sigma_{\gamma\gamma}(s) = \frac{1}{\pi}\int\frac{ds'}{(s'-s)}\mathrm{Im}\Sigma_{\gamma\gamma}(s') \tag{7.95}$$

光学定理によれば前方散乱振幅の虚数部分は全断面積に比例する．散乱振幅はボルン近似では虚数部を含まず，高次の項つまりループの寄与 Σ を入れてはじめて虚数部が出現する．すなわち $\mathrm{Im}\Sigma_{\gamma\gamma}$ と $ee \to$ ハドロン全断面積の間にはある関係が存在する．簡単な計算により

$$\mathrm{Im}\Sigma_{\gamma\gamma}(s) = -\frac{s^2\sigma(e^+e^-)}{4\pi\alpha} \tag{7.96}$$

が示せる．$\sigma\sim 1/s$ であるから，積分の収束を考えて，1 回引き算をした分散式を使うと，

$$\Pi_\gamma(m_Z{}^2) - \Pi_\gamma(0) = -\frac{1}{\pi}\int ds\frac{m_Z{}^2}{s-m_Z{}^2}\,\frac{\sigma(e^+e^-\to \text{ハドロン})}{4\pi\alpha} \tag{7.97}$$

この式を使えば，$e^2\hat{\Pi}_{QQ}(m_Z{}^2) = \Pi_\gamma(m_Z{}^2) - \Pi_\gamma(0)$ のハドロン部分は実験値から計算できる[14,15]．

$$\begin{aligned}\Delta\alpha(\text{ハドロン}) &= 0.0282 \pm 0.0009 \\ &\quad + 0.002980[\ln(s/m_Z{}^2) + 0.005696(s/m_Z{}^2 - 1)]\end{aligned} \tag{7.98}$$

形式的には，式 (7.94) によって上の数値を再現するように，クォークの質量と QCD 補正因子を，

$$\left.\begin{array}{ll} m_u=41\ \text{MeV}, & m_d=41\ \text{MeV} \\ m_s=150\ \text{MeV}, & m_c=1.5\ \text{GeV} \\ m_b=4.5\ \text{GeV} & \\ \eta_{\text{QCD}}=1+\alpha_s/\pi, & \alpha_s=0.115 \end{array}\right\} \qquad (7.99)$$

と決めることができる．トップクォークは十分重いので，$\Delta\alpha$ に対する寄与は，$m_t^2 \gg m_Z^2$ の極限で $(m_Z^2/m_t^2)\alpha$ に比例し無視できる．レプトンとハドロンの両方の寄与をまとめると

$$\Delta\alpha=\frac{\alpha}{3\pi}\sum_f Q_f^2\left(\ln\frac{m_Z^2}{m_f^2}-\frac{5}{3}\right)=0.0601+\frac{40\alpha}{9\pi}\ln\left(\frac{m_Z}{91\ \text{GeV}}\right)\pm 0.0009 \qquad (7.100)$$

c．高次効果と数値評価

以下に，さらに高次の補正を考慮したうえで，$\Delta\rho$ に対するトップのループとヒッグスのループの数値的に無視できない寄与を示す[14,15]．

$$\Delta\rho_t=\frac{G_F m_W^2}{8\sqrt{2}\pi^2}\left[\frac{3m_t^2}{m_W^2}+2\left(1-\frac{s_W^2}{3c_W^2}\right)\ln\frac{m_t^2}{m_W^2}+\cdots\right] \qquad (7.101)$$

$$\Delta\rho_H=-\frac{3G_F m_Z^2 s_W^2}{8\sqrt{2}\pi^2}\left(\ln\frac{m_H^2}{m_W^2}-\frac{5}{6}\right)+\cdots \qquad (7.102)$$

Δr に対する $\Delta\rho$ の寄与は

$$\Delta r=-\frac{c_W^2}{s_W^2}\Delta\rho \qquad (7.103)$$

で与えられる．Δr にはゲージボソンの自己エネルギー効果のほかにヴァーテックス補正や箱型図からの寄与もある（図 7.9 (b), (c)）ので，一緒にまとめて

$$\Delta r_{\text{rem}}=\Delta r_{\text{vertex+box}}=\frac{\alpha}{4\pi s_W^2}\left(6+\frac{7-4s_W^2}{2s_W^2}\ln c_W^2\right)\fallingdotseq 0.0064 \qquad (7.104)$$

と書くことにする．ヒッグスの寄与は $\ln m_H$ に比例するので，放射補正のヒッグス質量に対する感度は非常に悪い．数値的には，

$$\begin{aligned} &\Delta r_{\text{leptons}}\fallingdotseq 0.0330 \\ &\Delta r_{\text{hadrons}}\fallingdotseq 0.0322\pm 0.0009 \\ &\Delta r_{\text{top}}\fallingdotseq -0.0314(m_t/175\ \text{GeV})^2 \\ &\Delta r_{\text{Higgs}}\fallingdotseq 0.0033(1+\ln(m_H/100\ \text{GeV})) \end{aligned} \qquad (7.105)$$

Δr_{rem} は Δr_{Higgs} の中に含めた．この数値評価からわかるように補正の大部分

は，電磁微細構造定数 $\alpha(\mu)$ のスケール 0 から $m_Z{}^2$ への移動に伴う変化と，ρ を通じての，トップ質量のループ補正に伴う寄与であることがわかる．図 7.10 に Δr を m_t の関数として図示した[14]．また，$\sin^2\theta_W$ として式 (7.39) 以外の定義を使ったときの Δr も図示してある．$m_t=175\pm5$ GeV, $m_H=m_Z$ GeV として，すべての寄与を合計すると[6]

$$\Delta r \fallingdotseq 0.0349 \mp 0.0019 \pm 0.0007 \tag{7.106}$$

Δr の不定性は，第 1 の誤差がトップ質量の不定性 (175±5 GeV) から，第 2 の誤差が $ee\to$ ハドロン断面積の実験データに起因する $\alpha(m_Z)$ の不定性 ($\alpha(m_Z)^{-1}=128.88\pm0.09$) からくる．

7.3.5 改良ボルン近似[14,15]

次に Z 交換反応，特にLEPでの $e^+e^-\to Z\to\mu\bar{\mu}$ 反応を例として，Z とフォトンの関係を考察する．まず，最低次では，1個の Z 交換およびフォトン交換過程のみが効く．高次効果のうち，自己エネルギーによる補正の取扱いはすでに述べた．中性カレントの場合は，フォトンも Z もともに同じフェル

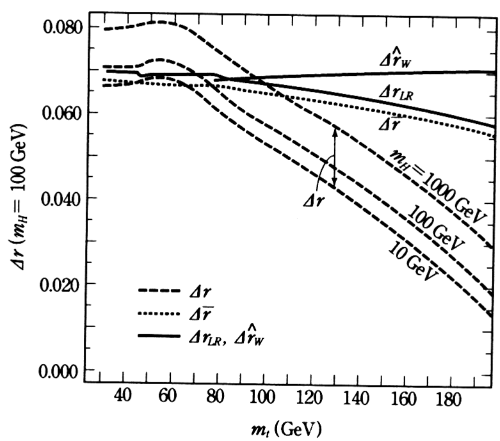


図 7.10 $M_W{}^2\sin^2\theta_W(1-\Delta r)=\sqrt{2}\pi\alpha/G_F$ の定義による放射補正 Δr の m_t 依存性[14]
Δr : $\sin^2\theta_W=[1-(m_W{}^2/m_Z{}^2)]$
$\Delta\hat{r}_W$: $\sin^2\theta_W=\sin^2\theta_{W\overline{MS}}$
$\Delta\bar{r}$: $\sin^2\bar{\theta}_W$
Δr_{LR} : A_{LR} より決める $\sin^2\theta_l$

ミオン対に結合できるから，Z と γ の混合が起きる．つまり，γ と Z を切り離して議論できないところが W 交換の場合と異なる．γ 交換による $J_{\gamma\mu}J_{\gamma}{}^{\mu}$ 結合の反応と Z 交換による $J_{N\mu}J_{N}{}^{\mu}$ 結合の反応のほかに，$J_{N\mu}J_{\gamma}{}^{\mu}$ 結合（図 7.11 (c)）をも含むようになる．

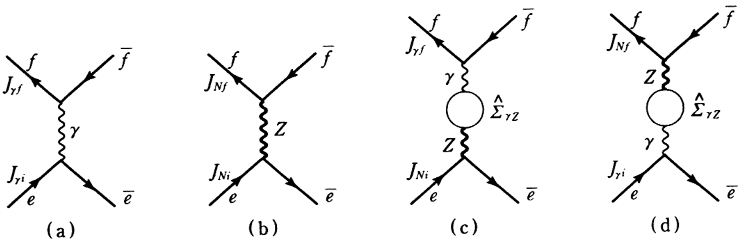


図 7.11 $e\bar{e} \to f\bar{f}$ 反応での中間状態
(a) γ 交換項，(b) Z 交換項，(c)，(d) γ-Z 混合項

a. 実効ワインバーグ角

$e\bar{e} \to f\bar{f}$ 散乱振幅を書き下ろしてみよう．フェルミオン波動関数でつくったカレントの積を $J_\gamma \otimes J_\gamma$（左側が外向きカレント，右側が入射カレント）などで表し，$O(\alpha^2)$ の補正を入れた式を書き下ろすと

$$\mathcal{M}(e\bar{e} \to f\bar{f}) = e^2 \frac{Q_i J_\gamma \otimes Q_i J_\gamma}{s + \hat{\Sigma}_{\gamma\gamma}(s)} + g_Z{}^2 \frac{J_N \otimes J_N}{s - m_Z{}^2 + \hat{\Sigma}_{ZZ}(s)}$$

$$- e g_Z \frac{Q_f J_\gamma \otimes J_N + J_N \otimes Q_i J_\gamma}{[s - m_Z{}^2 + \hat{\Sigma}_{ZZ}(s)]} \frac{\hat{\Sigma}_{\gamma Z}(s)}{[s + \hat{\Sigma}_{\gamma\gamma}(s)]}$$

$$= e^2(s) \frac{Q_f J_\gamma \otimes Q_i J_\gamma}{s} + g_Z{}^2(s) \frac{\bar{J}_N \otimes \bar{J}_N}{s - m_Z{}^2 + i m_Z \Gamma_Z} + O(\alpha^2) \qquad (7.107)$$

$$\bar{J}_N = J_N - \frac{Q\mathrm{e}}{g_Z} \frac{\hat{\Pi}_{\gamma Z}(s)}{1 + \hat{\Pi}_\gamma(s)} J_\gamma \qquad (7.108\,\mathrm{a})$$

$$\hat{\Pi}_{\gamma Z}(q^2) = \frac{\hat{\Sigma}_{\gamma Z}(q^2)}{q^2} = \frac{(\Sigma_{\gamma Z}(q^2) - \Sigma_{\gamma Z}(0))}{q^2} + \frac{\delta' s_W{}^2}{c_W s_W} \qquad (7.108\,\mathrm{b})$$

$$e^2(s) = \frac{e^2}{1 + \hat{\Pi}_\gamma(s)}, \quad g_Z{}^2(s) = \frac{e^2}{s_W{}^2 c_W{}^2} \frac{1}{1 + \hat{\Pi}_Z(s)} \qquad (7.108\,\mathrm{c})$$

となるので，γ-Z 混合効果は Z ボソンからみた場合，Z の結合する中性カレント J_N の中の J_γ が変化して，$J_N \to \bar{J}_N$ になったと見なすことができる．$J_N{}^\mu = J_{3L}{}^\mu - Q s_W{}^2 J_\gamma{}^\mu$ であることを考慮すると，これはワインバーグ角の置き換え

$$s_W{}^2 \longrightarrow \bar{s}_W{}^2 \equiv \kappa_{se} s_W{}^2 = s_W{}^2 + c_W s_W \frac{\hat{\Pi}_{\gamma Z}(s)}{1+\hat{\Pi}_\gamma(s)} \tag{7.109}$$

と同等である．Z 共鳴のところでは

$$\hat{\Pi}_{\gamma Z}(m_Z{}^2) \fallingdotseq \frac{c_W}{s_W}\Delta\rho - \frac{c_W}{s_W}\varepsilon_2 - \frac{s_W}{c_W}\varepsilon_3 \tag{7.110}$$

であるが（付録（J.41)），第 2，3 項は小さいので，

$$\begin{aligned}\bar{s}_W{}^2 &\fallingdotseq s_W{}^2 + c_W s_W \hat{\Pi}_{\gamma Z}(m_Z{}^2) = s_W{}^2 + c_W{}^2\Delta\rho - c_W{}^2\varepsilon_2 - s_W{}^2\varepsilon_3 \\ &\fallingdotseq s_W{}^2 + c_W{}^2\Delta\rho + \cdots \end{aligned} \tag{7.111 a}$$

$$\kappa_{se} = 1 + \frac{c_W{}^2}{s_W{}^2}\Delta\rho + \cdots \tag{7.111 b}$$

となる．以上の議論から，γ-Z の混合効果は，中性カレント中に現れるワインバーグ角 $s_W{}^2$ を再定義して $\bar{s}_W{}^2$ と置き換えることと同等であることがわかった．

b．改良ボルン近似：実効結合定数

次に，式（7.108）の有効結合定数の性質を明らかにするために，Δr の定義式（7.42）に，Δr の計算式を代入してみよう．

$$m_W{}^2 s_W{}^2 \equiv \frac{\pi\alpha}{\sqrt{2}G_F}\frac{1}{1-\Delta\alpha+\dfrac{c_W{}^2}{s_W{}^2}\Delta\rho+\cdots} \tag{7.112}$$

この式を変形して（7.111 a）を入れれば

$$m_W{}^2\bar{s}_W{}^2 \fallingdotseq \frac{\pi\bar{\alpha}}{\sqrt{2}G_F} \tag{7.113 a}$$

となる．

$$\bar{c}_W{}^2 = 1 - \bar{s}_W{}^2 \fallingdotseq c_W{}^2(1-\Delta\rho) = c_W{}^2/\rho \tag{7.114}$$

を考慮すると，

$$m_Z{}^2\bar{s}_W{}^2\bar{c}_W{}^2 \fallingdotseq \frac{\pi\bar{\alpha}}{\sqrt{2}G_F\rho} \tag{7.113 b}$$

が成立する．

次に，実効結合定数 $g_Z{}^2(s) = g_Z{}^2/(1+\hat{\Pi}_Z(s))$ を評価する．$s \lesssim m_Z{}^2$ とすると，$\hat{\Pi}_Z(s) \fallingdotseq \Pi_Z(m_Z{}^2)$ の主要な寄与は引き算項の中にあり，

$$\hat{\Pi}_Z(m_Z{}^2) = -\Delta\alpha + \frac{c_W{}^2 - s_W{}^2}{s_W{}^2}\Delta\rho + \cdots \tag{7.115}$$

が示せるので，実効結合定数は

$$g_Z^2\frac{1}{1+\hat{\Pi}_Z(m_Z^2)}=\frac{4\pi\alpha}{s_W^2c_W^2}\frac{1}{1-\Delta\alpha+\dfrac{c_W^2-s_W^2}{s_W^2}\Delta\rho+\cdots}$$

$$\fallingdotseq\frac{4\pi\bar{\alpha}}{\bar{s}_W^2\bar{c}_W^2}=4\sqrt{2}G_Fm_Z^2\rho \tag{7.116}$$

結局，散乱振幅の式 (7.107) は，$s\fallingdotseq m_Z^2$ 付近で

$$\mathcal{M}(e\bar{e}\to f\bar{f})=4\pi\bar{\alpha}\frac{J_\gamma\otimes J_\gamma}{s}+4\sqrt{2}G_Fm_Z^2\rho\frac{\bar{J}_N\otimes\bar{J}_N}{s-m_Z^2+im_Z\Gamma_Z} \tag{7.117}$$

と書き直せることになり，放射補正を入れた結合定数 $\bar{\alpha}$, $\bar{s}_W^2$，伝播関数を使えば，実効的にボルン近似の式を再現する．

c. α か G_F か？

ここで興味深いのは，Z 交換の結合定数として，出発点を $g_Z=e/s_Wc_W$ にとったときの放射補正は

$$\frac{\bar{\alpha}}{\bar{s}_W^2\bar{c}_W^2}=\frac{\alpha}{s_W^2c_W^2}\left(1+\Delta\alpha-\frac{c_W^2-s_W^2}{s_W^2}\Delta\rho+\cdots\right) \tag{7.118}$$

これは $\Delta\alpha$ を含んでいて相当大きい (～4%)．ところが，結合定数を $G_Fm_Z^2$ で書き直した場合の放射補正は，

$$G_Fm_Z^2\rho=G_Fm_Z^2(1+\Delta\rho) \tag{7.119}$$

であり，出発点のボルン近似 $G_Fm_Z^2$ からの変化は，$\Delta\rho$(～1%) だけしかないことである．このことは，繰り込みスケール μ を 0 から m_Z^2 まで変えたとき，α は大きな補正を受けるのに反し，G_F はほとんど補正を受けないことを示す．つまり，出発点のボルン近似の段階で α の代わりに G_F を使った場合は，純粋な QED 補正は最初から取り込んでいることに相当する．

ともあれ，ボルン近似の式であっても，$\bar{s}_W^2$ や有効微細構造定数 $\bar{\alpha}$（あるいは $G_Nm_Z^2=\rho G_Fm_Z^2$ を使っても同等である）を使用すれば，自己エネルギーによる補正はすべて取り入れられていることがわかった．これに，伝播関数内の崩壊幅にエネルギー依存性を付加することにより放射補正の重要部分はすべて取り入れることができて，前節の CERN, LEP でのデータ解析に改良ボルン近似式を使用することの正当性が示せたことになる．

d. トップクォークの効果

ワインバーグ角の放射補正値を求め，観測値と比較するにあたって，m_W が大きな不定性をもつ現在，初期値として次式で定義される s_0 から出発するのが便利である（s_{M_Z} とも書く[6]）．この s_0 は定義によってトップクォークの寄与を含まない．

$$s_0^2 c_0^2 \equiv \frac{\pi \bar{\alpha}}{\sqrt{2} G_F m_Z^2}, \qquad c_0^2 = 1 - s_0^2 \tag{7.120 a}$$

数値を入れると

$$s_0^2 = 0.23116 \pm 0.00022 \tag{7.120 b}$$

で主要な誤差は，m_Z の値からではなく $\bar{\alpha}$ すなわち（$ee \to$ ハドロン）の断面積の実験的誤差からくる．s_0^2 は (7.43) で，$\Delta r = \Delta\alpha$ としたときの値であるから，$s_W^2 = 1 - m_W^2/m_Z^2$ との関係は，

$$s_W^2 - s_0^2 \fallingdotseq \frac{\partial s_W^2}{\partial \Delta r}(\Delta r - \Delta\alpha) = \frac{s_0^2 c_0^2}{c_0^2 - s_0^2}(\Delta r - \Delta\alpha) \tag{7.121}$$

s_W^2 の測定精度は m_W^2 で決まり不定性が大きいから，より精密な測定のできる観測量として，Z のレプトン崩壊や非対称から直接決められる $\sin^2\theta_l$ (7.31) をとりあげる．放射補正としてゲージボソンの真空偏極補正が大きく，ヴァーテックス補正（κ_l）と箱型図補正（κ_{box}）は小さいとして無視する近似では，$\sin^2\theta_l = \bar{s}_l^2 \equiv \kappa_l \bar{s}_W^2 \fallingdotseq \bar{s}_W^2$ であるから，$\bar{s}_W^2$ の表式 (7.109) を入れ，(7.91) と (7.110) を使って書き替えると

$$\bar{s}_l^2 \fallingdotseq s_W^2 + c_W s_W \frac{\hat{\Pi}_{\gamma Z}(m_Z^2)}{1 + \hat{\Pi}_\gamma(m_Z^2)} \fallingdotseq s_0^2 - \frac{s_0^2 c_0^2}{c_0^2 - s_0^2}\Delta\rho + \frac{s_0^2}{c_0^2 - s_0^2}\varepsilon_3 \tag{7.122}$$

となる．第 3 項は第 2 項に比べ小さいので，ここでは無視する．$\Delta\rho$ へのトップとヒッグスの寄与は式 (7.101)，(7.102) によって与えられている．トップによる補正項は～1%程度であるので，それを上回る精度の実験をして上式と比較することによって，トップによる放射補正効果，したがってトップの質量を推定することが可能である．1990 年代前半は，このような問題意識で議論されたが，ハドロン反応による生成で，トップが CDF グループにより 1994 年春発見され，質量が $m_{\text{top}} = 175 \pm 5$ GeV と決められたので[6,18]，それ以後はヒッグス粒子の寄与に関心が移った．トップの質量値を固定すれば，今度は

ヒッグス粒子の質量を推定することが可能となる ((7.102) を参照せよ).

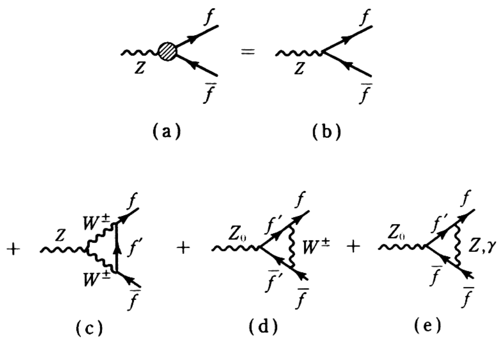


図 7.12 $Zf\bar{f}$ ヴァーテックスの補正
全体 (a) はボルン項 (b) と高次の項 (c)〜(e) の和

7.3.6 ヴァーテックス補正

a. $\nu_\mu e$ 散乱と Z のレプトン崩壊

レプトンに関してヴァーテックス補正 (図 7.12) を施すと，$\bar{s}_W^2 \to \kappa_l \bar{s}_W^2 = \sin^2\theta_l$ (l=レプトン種)，さらにすべての理論的補正を入れたうえでトリー近似の $\sin^2\theta_l$ に焼き直した量を，実効的ワインバーグ角 $\sin^2\theta_{\mathrm{eff},l} \equiv \bar{s}_l^2$ を定義する．第 4 章の中性カレントの章では，ニュートリノ散乱のデータから，質量殻の $\sin^2\theta_W$ を求めるのみならず，断面積をボルン近似式で表したとき中性カレントに現れる $\sin^2\theta_W$ の値 (=$\sin^2\theta_W(\nu e)$) をも求めておいた．上の議論からすれば，$\sin^2\theta_W(\nu e)$ は，Z 共鳴での $\sin^2\theta_e$ の q^2 のみ異なる低エネルギー版であることがわかる．細かいことをいえば，ニュートリノのヴァーテックスにはニュートリノの荷電半径による寄与が効き，$e\bar{e}$ 反応の $\sin^2\theta_e$ には γ-Z 混合が効くという差があるが，両者はほとんどキャンセルして差はわずかである[14]．結果として，m_t の値によらずに

$$\sin^2\theta_e(\nu e) = 1.002 \sin^2\theta_e \tag{7.123}$$

が成立する．CHARMII[19] の値 (4.20 a)

$$\sin^2\theta_W(\nu e) = 0.2324 \pm 0.0083 \tag{7.124}$$

の値は，Z 共鳴においてレプトンの前後非対称 $A_{FB}{}^l$ などから決めた値 $\bar{s}_l^2$=

0.2322±0.001[6,9] とよくあっている.

b.　b-ヴァーテックス

ヴァーテックスの補正は通常は非常に小さい. ただし, $f=b$ のときは t クォーク中間状態が効くために, 例外的に大きくなる (図 7.13[20]).

$$\Delta\kappa_{b,\mathrm{vtx}}=\frac{G_F\, m_W{}^2}{8\sqrt{2}\pi^2}\left[2\frac{m_t{}^2}{m_W{}^2}+\frac{1}{3}\left(16+\frac{1}{c_W{}^2}\right)\ln\frac{m_t{}^2}{m_W{}^2}\right] \tag{7.125 a}$$

$$\Delta\rho_{b,\mathrm{vtx}}=-2\Delta\kappa_{b,\mathrm{vtx}} \tag{7.125 b}$$

これらの効果は, b 以外の場合の ρ や $\sin^2\overline{\theta}_W$ を知っているときは, 上式を知らずとも

$$\rho \longrightarrow \rho_b\equiv\rho\left(1-\frac{4}{3}\Delta\rho\right) \tag{7.126 a}$$

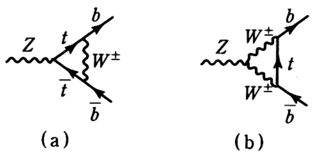


図 7.13　$Zb\overline{b}$ ヴァーテックスの補正
t クォークの中間状態があるので大きな補正となる.

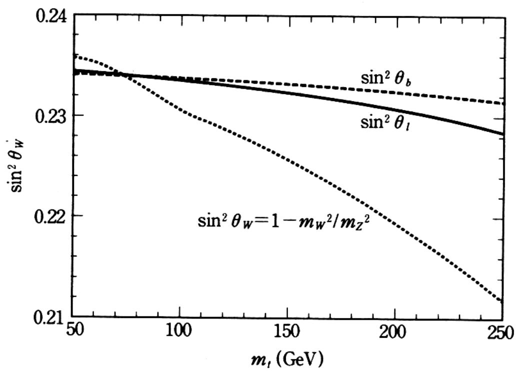


図 7.14　ワインバーグ角の m_t 依存性[14)]
点線：$\sin^2\theta_W=1-(m_W{}^2/m_Z{}^2)$
実線：$\sin^2\theta_l$ (レプトン)
破線：$\sin^2\theta_b$ (b-クォーク)

$$\bar{s}_W^2 \longrightarrow \kappa_b \bar{s}_W^2 = \left(1 + \frac{2}{3}\Delta\rho\right)\bar{s}_W^2 \qquad (7.126\,\mathrm{b})$$

によって，簡単に計算できる．b-ヴァーテックスが，Z の片側にのみある場合の振幅については，

$$\rho \longrightarrow (\rho\rho_b)^{1/2} \qquad (7.127)$$

とすればよい．図 7.14 に各種 $\sin^2\theta_f$ と質量殻で定義した $\sin^2\theta_W$ が，補正によりどう変わるかを示した[14]．この図からわかるように，$\sin^2\theta_f$ は $\sin^2\theta_W$ に比べて，はるかに m_t 依存性が小さいことがわかる．また図 7.15 に崩壊幅などの補正による影響を図示する[9]．

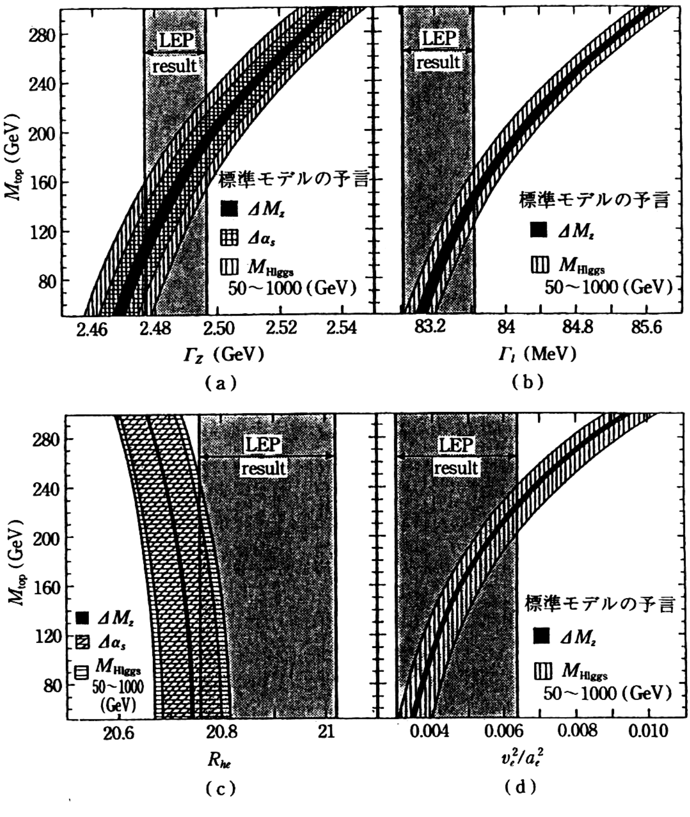


図 7.15 $\Gamma_Z, \Gamma_l, R_{h,l}, v_l^2/a_l^2$ の m_t, m_H 依存性[9]

m_H の中央値は 300 GeV で 100〜1000 GeV の変化を帯で示す．$\alpha_s = 0.118 \pm 0.008$

7.3.7 $\overline{MS}$ 処方のワインバーグ角[14,21]

いままで議論した $\sin^2\theta_W$, $\bar{s}_W{}^2$, $\sin^2\theta_f$ は，電弱標準理論の枠内に閉じている場合は，非常に定義が明快であり実験的にも正確に決められる量である．しかし，大統一理論を論じたり，標準理論を越える新しい現象の探索などを問題にするときは，必ずしも便利ではない．大統一理論を議論する場合は明らかにQCDでの処方と合わせた方が有利である．QCDでは閉じ込め効果のため質量は明確に定義できる概念ではなく，基準点がないため質量殻での繰り込み処方は不可能であり，通常“修正最小引き算($\overline{MS}$)の処方”が用いられる（付録J）．$\overline{MS}$ 処方では，発散の処理が個々に行えるので計算処理は簡単であるが，代償として各物理量は μ 依存性をもち，観測量との関係は自明ではない．

以下，$\overline{MS}$ 処方におけるパラメターはハット（＾）をつけて表すことにし，$\overline{MS}$ 処方で発散を処理した放射補正量には $\overline{MS}$ の指標をつけて，質量殻処方の量と区別するものとする．質量殻処方の諸量との関係は，$\overline{MS}$ 処方での質量 $\hat{m}$ や電荷 $\hat{e}$ に放射補正を入れた後の電荷(のトムソン極限)や質量が，観測値を与えるという条件で得られる．すなわち

$$m_Z{}^2 = \hat{m}_Z{}^2 - \mathrm{Re}\Sigma_{ZZ}(m_Z{}^2)|_{\overline{MS}} \tag{7.128 a}$$

$$m_W{}^2 = \hat{m}_W{}^2 - \mathrm{Re}\Sigma_{WW}(m_W{}^2)|_{\overline{MS}} \tag{7.128 b}$$

$$e^2 = \frac{\hat{e}^2}{1 - \Pi_{\gamma\overline{MS}}(0) - \dfrac{\hat{s}}{\hat{c}}\dfrac{\Sigma_{\gamma Z}(0)|_{\overline{MS}}}{\hat{m}_Z{}^2}} \tag{7.129}$$

これらの関係式は，質量殻処方での放射補正関係式 (7.71)，(7.76) に対応している．この式から，$\hat{e}$, $\hat{m}$ もまた μ の関数 ($\hat{e}=\hat{e}(\mu)$, $\hat{m}=\hat{m}(\mu)$) であることがわかる．Z 共鳴でのデータを扱うときの自然なスケールとして $\mu=m_Z$ を採用すると，上式から求めた $\hat{\alpha}=\hat{e}^2/4\pi$ は，質量殻処方での $\bar{\alpha}$ とほとんど同じ値であるが，完全に同値ではない ($\bar{\alpha}^{-1}=128.88\pm0.09$, $\hat{\alpha}^{-1}=127.88\pm0.09$).

$\overline{MS}$ 処方のパラメターもまた，ボルン近似では質量殻処方におけると同じ関係式を満たすので，結合定数の比で $\sin^2\theta_W$ を定義して，これを $\sin^2\theta_{\overline{MS}}$ と表したとき

$$\sin^2\theta_{\overline{MS}} = \frac{\hat{e}^2(\mu)}{\hat{g}_W{}^2(\mu)} = 1 - \frac{\hat{m}_W{}^2(\mu)}{\hat{m}_Z{}^2(\mu)} \tag{7.130}$$

$\sin^2\theta_{\overline{MS}}$ は，$\sin^2\hat{\theta}_W$, $\hat{s}_W{}^2$ と書くこともある．$\mu=m_Z$ における $\hat{s}_W{}^2$ を $\hat{s}_Z{}^2$ と書く

ことにすると，$\hat{s}_Z^2$ と質量殻上の $s_W^2=1-m_W^2/m_Z^2$ との関係は，式 (7.130) に (7.128) を入れれば関係づけることができて，$O(\alpha)$ では[14,21]，

$$\hat{s}_Z^2=s_W^2+c_W^2\Delta\hat{\rho}+\cdots \tag{7.131 a}$$

$$\hat{c}_Z^2\hat{\rho}=c_W^2 \tag{7.131 b}$$

$$\Delta\hat{\rho}=\left(\frac{\mathrm{Re}\Sigma_{ZZ}(m_Z^2)}{m_Z^2}-\frac{\mathrm{Re}\Sigma_{WW}(m_W^2)}{m_W^2}\right)\Bigg|_{\overline{MS}}\left(1+\frac{\mathrm{Re}\Sigma_{ZZ}(m_Z^2)|_{\overline{MS}}}{m_Z^2}\right)^{-1}$$

$$\fallingdotseq\frac{3\hat{\alpha}m_t^2}{16\pi\hat{s}_Z^2m_W^2}+\cdots\fallingdotseq\frac{3G_Fm_t^2}{8\sqrt{2}\pi^2}+\cdots\fallingdotseq\Delta\rho \tag{7.132}$$

である．$\Delta\hat{\rho}$ と $\Delta\rho$ との差は $O(\alpha^2)$ である．(7.111) と比較すれば，

$$\hat{s}_Z^2\fallingdotseq\bar{s}_W^2 \tag{7.133}$$

$\hat{s}_Z^2$ と s_W^2 は (7.42) によっても関係づけることができる．すなわち

$$\hat{s}_Z^2\hat{c}_Z^2(1-\Delta\hat{r})=s_W^2c_W^2(1-\Delta r)=(37.2802)^2/m_Z^2 \tag{7.134 a}$$

$$\hat{s}_Z^2(1-\Delta\hat{r}_W)=s_W^2(1-\Delta r)=(37.2802)^2/m_W^2 \tag{7.134 b}$$

$$(1-\Delta r)=\hat{\rho}(1-\Delta\hat{r}_W) \tag{7.134 c}$$

$\Delta\hat{r}$ は質量殻処方の Δr に対応する $\overline{MS}$ 処方の量である．$\Delta\hat{r}$ と $\Delta\hat{r}_W$ の差は，出発点に (α, G_F, m_Z) をとるか (α, G_F, m_W) をとるかの違いである．主要項のみを書き下ろすと

$$\Delta\hat{r}\fallingdotseq\Delta\hat{\alpha}-\Delta\hat{\rho}+\cdots \tag{7.135 a}$$

$$\Delta\hat{r}_W\fallingdotseq\Delta\hat{\alpha}+O(\ln(m_t/m_W))+\cdots \tag{7.135 b}$$

となり，m_t 依存性が Δr と異なることがわかる．図 7.10 には $\Delta\hat{r}_W$ を図示してあるが，$\Delta\hat{r}_W$ の m_t 依存性はほとんどないことがわかる．

表7.3に主な過程の実験値から計算した $\sin^2\theta_W$ および $\sin^2\theta_{\overline{MS}}$ を掲げる[6]．第 1 行の M_Z とは，式 (7.43) から求める方法であり，第 2 行の M_W とは，ハドロンコライダーによる W 生成での m_W の測定値を使う方法である．$\sin^2\theta_{\overline{MS}}$ の m_t 依存性を図7.16に掲げる[6]．種々の過程から求めた $\hat{s}_Z^2$ の値が整合するようにトップ質量の範囲を決めると $m_t=173\pm4$ GeV が得られ，CDF/D0 グループによる直接生成の値 175±5 GeV とよく合っていることがわかる[6]．さらにこのときQCDの結合定数 $\alpha_s(M_Z)$ もパラメターとして同時最適化し 0.1214±0.0031 が得られたが，これはジェット現象（後述第8章）から得られる値 0.122±0.007 とよく合っている．すなわち種々の過程から求めたワインバーグ角，

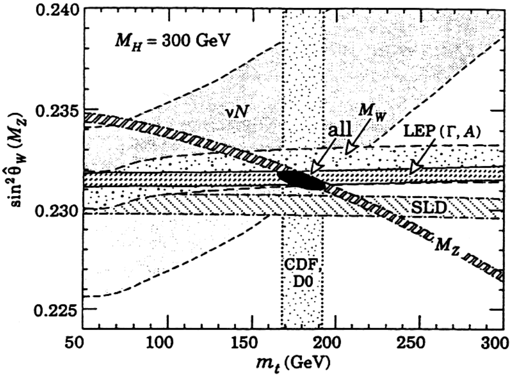


図 7.16　$\sin^2\hat{\theta}_W(M_Z)$ の種々の過程より定めた最適値（黒塗部分）は CDF/D0 グループによる m_t の直接測定と整合している[6)].

表 7.3　種々の過程より決めたワインバーグ角[6)]

$s_W{}^2=1-m_W{}^2/m_Z{}^2$, $\hat{s}_Z{}^2=\sin^2\theta_{\overline{MS}}$

各種反応データを総合的に最適化して決めた値.

計算では, $m_H=m_Z$, $m_t=173\pm4$ GeV, $\alpha_s=0.1214\pm0.0031$ を仮定した.

反　　応	$s_W{}^2$	$\hat{s}_Z{}^2$
M_Z	0.2231 ± 0.0005	0.2313 ± 0.0002
M_W	0.2228 ± 0.0006	0.2310 ± 0.0005
$\Gamma_Z/M_Z{}^3$, R, $\sigma_{\rm had}M_Z{}^2$	0.2235 ± 0.0011	0.2316 ± 0.0011
$A_{FB}^{(0,l)}$	0.2225 ± 0.0007	0.2307 ± 0.0006
LEP 非対称パラメター	0.2235 ± 0.0004	0.2317 ± 0.0003
A_{LR}^0	0.2220 ± 0.0005	0.2302 ± 0.0004
$\overline{A}_b$, $\overline{A}_c$	0.230 ± 0.016	0.239 ± 0.016
深非弾性散乱（アイソスカラー）	0.226 ± 0.004	0.234 ± 0.004
$\nu_\mu(\overline{\nu}_\mu)p\to\nu_\mu(\overline{\nu}_\mu)p$	0.203 ± 0.032	0.211 ± 0.032
$\nu_\mu(\overline{\nu}_\mu)e\to\nu_\mu(\overline{\nu}_\mu)e$	0.221 ± 0.008	0.229 ± 0.008
原子遷移のパリティ非保存	0.220 ± 0.003	0.228 ± 0.003
SLAC eD	0.213 ± 0.019	0.222 ± 0.018
平　　均	0.2230 ± 0.0004	0.23124 ± 0.00017

トップ質量，$\alpha_s(M_Z)$ の値などが，すべて電弱標準理論の予言と誤差範囲内で一致する．GWS 理論の実験データに裏づけられた正当性は，いまや QED に匹敵するといっても過言ではないであろう．

$\hat{s}_Z{}^2$，$s_W{}^2$，$\sin^2\theta_l$ の世界の平均値は，

$$\hat{s}_Z{}^2 = 0.23124 \pm 0.00017 \tag{7.136 a}$$

$$s_W{}^2 = 0.2230 \pm 0.0004 \tag{7.136 b}$$

$$\sin^2\theta_l = 0.2322 \pm 0.0010 \tag{7.136 c}$$

である[6]．理論的には $\sin^2\theta_l = \hat{s}_Z{}^2 + 0.00029$ が言えるが，数値評価の出発にとった $s_0{}^2$ にはもともと $e\bar{e} \to$ ハドロンの断面積からくる 0.00022 だけの不定性があり（式 (7.120 b) 参照），この不定性はすべてのワインバーグ角に共通であるので，$\bar{s}_f{}^2 = \sin^2\theta_f$ と $\hat{s}_Z{}^2$ は実用上はほとんど区別せずに同一視してよい．

いままでに，いろいろな種類の $\sin^2\theta_W$ の定義がでてきた．どれか一つ決めれば他は計算できる量であるので，どの定義も数学的には同等である．考慮の対象とする物理的過程によって異なった値を与えるので，慣れないうちは混乱するが，まとめると次のようにいえる．放射補正のうち，大きな寄与は，純粋に電磁相互作用による $\Delta\alpha = \alpha(m_W) - \alpha(0)$ とゲージボソンの自己エネルギー補正の中のトップクォークによる寄与 $\Delta\rho_{\rm top}$ のみであり，それ以外の補正を小さいとして無視する限り

$$\hat{s}_Z{}^2 \fallingdotseq s_f{}^2 \fallingdotseq s_W{}^2 + c_W{}^2 \Delta\rho + \cdots \tag{7.137}$$

が成り立つ．したがって，非常に細かい議論をするのでない限り，はじめの二つの定義によるワインバーグ角は同等であると考えてよいであろう．考慮する過程により値の変わる $\sin^2\theta_W$ は，基本的な物理量というよりは現象描写に便利なパラメターと見なすのが正しい．質量殻による定義 $(\sin^2\theta_W = 1 - m_W{}^2/m_Z{}^2)$ は質量の単なる置き換えであり，何ら新しい情報をもたらすものではない．また，$\sin^2\overline{\theta}_W$ と $s_0{}^2 = s_{MZ}{}^2$，$\bar{s}_f{}^2 = \sin^2\theta_f$ は Z 共鳴という限られた領域での実験量を表すのに便利なパラメターと見るべきであろう．その意味でエネルギースケール μ の依存性を含む $\sin^2\theta_{\overline{MS}}$ は，観測値との直接対応はつけにくいものの，統一理論を議論するのには便利であり，大統一理論との関連において有用性がある．

7.4 標準理論の彼方

これまでの議論から，標準理論の正しさは疑問の余地なく実験的に裏づけられたといってよいであろう．とすれば次にわれわれのとるべき態度は，精密データの標準理論予想値からのずれを追求し，そこから標準理論では説明できない新現象や標準理論を越える新理論の手がかりをつかむことである．新現象は通常現在のエネルギースケールを越えたところにあると考えられ，大きな質量をもつ新粒子として現れる．大きな質量効果は，放射補正の真空偏極効果を通して見ることができるので，新現象を探るのに便利なパラメターとして，S, T, U（または $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$）が提唱された[22),*7)]．

$$S=\frac{4s_W^2}{\alpha}\varepsilon_3=16\pi[\Sigma_{3Q}'(m_Z^2)-\Sigma_{33}'(m_Z^2)] \tag{7.138 a}$$

$$T=\frac{1}{\alpha}\varepsilon_1\equiv\frac{1}{\alpha}\Delta\rho=\frac{4\pi}{s_W^2m_W^2}[\Sigma_{33}(0)-\Sigma_{11}(0)] \tag{7.138 b}$$

$$U=-\frac{4s_W^2}{\alpha}\varepsilon_2=16\pi[\Sigma_{33}'(m_W^2)-\Sigma_{11}'(m_Z^2)] \tag{7.138 c}$$

$\Delta\rho, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ は既出のパラメターであり，標準理論でのトップクォークおよびヒッグスの寄与は付録 (J.50) に与えてある．ここで新しく導入した S, T, U（あるいは，$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$）は，通常標準理論以外の新理論における真空偏極効果として定義され（すなわち，$S_{\rm new}=S-S_{\rm SM}$ など），それぞれ異なった種類の効果を表す．ただし，ヒッグスが未発見の現状では STU をヒッグスの質量を決める手段として使うこともできる．S, T, U は，実験的には三つの観測量，例えば m_W^2, Z の崩壊幅 Γ_l，前後非対称 A_{FB} を与えれば決められる．Γ_l と A_{FB} を与えれば v_l と a_l が決められ，

---

*7) $\overline{MS}$ 処法では

$$\alpha(m_Z)T\equiv\frac{\Sigma_{ZZ}(0)}{m_Z^2}-\frac{\Sigma_{WW}(0)}{m_W^2}$$
$$\frac{\alpha(m_Z)}{4\hat{s}_Z^2\hat{c}_Z^2}S\equiv\frac{\Sigma_{ZZ}(0)-\Sigma_{ZZ}(m_Z^2)}{m_Z^2}$$
$$\frac{\alpha(m_Z)}{4\hat{s}_Z^2}(S+U)\equiv\frac{\Sigma_{WW}(0)-\Sigma_{WW}(m_W^2)}{m_W^2}$$

と表す．

$$v_l = -(1+\Delta\rho/2)(1/2 - 2\sin^2\theta_l) \tag{7.139 a}$$

$$a_l = (1+\Delta\rho/2)/2 \tag{7.139 b}$$

であるから ((7.31) 参照)，$\Delta\rho(=\alpha T)$ と $\sin^2\theta_l$ が決まり，

$$\frac{m_W{}^2 - m_Z{}^2 c_0{}^2}{m_Z{}^2 c_0{}^2} = -\frac{s_0{}^2}{c_0{}^2 - s_0{}^2}(\Delta r - \Delta\alpha)$$

$$= \frac{\alpha}{c_0{}^2 - s_0{}^2}\left(c_0{}^2 T - \frac{S}{2}\right) + \frac{\alpha}{4 s_0{}^2} U \tag{7.140 a}$$

$$\sin^2\theta_l - s_0{}^2 = -\frac{s_0{}^2}{c_0{}^2 - s_0{}^2}(c_0{}^2\Delta\rho - s_0{}^2\varepsilon_3) = \frac{\alpha}{c_0{}^2 - s_0{}^2}\left(-s_0{}^2 c_0{}^2 T + \frac{S}{4}\right) \tag{7.140 b}$$

から，S, U が決められる ((7.44)，(7.91)，(7.122) 参照)．通常 U は，S, T に比べて小さい．S, T, U は，放射補正は真空偏極の寄与が優勢であるという近似では，Z 共鳴の諸観測量に共通して現れる普遍的なパラメターであり，他の観測量からも決められる．

T はアイソスピンの破れを表す量で，質量差の大きい新二重項が存在すれば T に寄与する．S は質量項によるカイラル対称の破れを特徴づける量で，二重項の質量が縮退していても値が大きければ有意な寄与を与える．例えば，質量の大きい二重項 (N, E) が存在すると[23)]，

$$S \sim \frac{N_c^f}{6\pi}, \quad T \sim \frac{N_c^f \Delta M^2/m_Z{}^2}{12\pi s_W{}^2 c_W{}^2}, \quad U \sim \frac{2N_c^f}{15\pi}\frac{\Delta M^2}{M_E{}^2} \sim O\left(\frac{m_Z{}^2}{M_E{}^2}\right)T \tag{7.141}$$

ただし，$\Delta M = M_E - M_N \ll M_E$ とする．質量が縮退していると，T, U への寄与は 0 となるが S への寄与は大きい．図 7.17 に，$T(\sim\varepsilon_1)$ と $S(\sim\varepsilon_3)$ の 2 次元プロットと標準理論およびテクニカラーモデルの予言との比較を考察した一例を示す[24)]．この図は標準理論の検証と見なすこともできるし，データから m_H, m_t を推測するのにも使える．図からは簡単なテクニカラーモデル[*8)] は否定できることがわかる．

[*8)] ヒッグス粒子を複合粒子と見なすモデルの代表例．質量の大きなフェルミオン族 (テクニフェルミオンという) が存在し，テクニカラー (自由度 N_{TC}) をもって QCD と類似相互作用をする．テクニカラー力によりテクニフェルミオン対が凝縮してテクニパイオンを生じるが，これが標準モデルにおけるヒッグス粒子であるとするモデル．QCD と同じくたくさんのテクニハドロン共鳴が，質量スケール$\sim O$(1TeV) に存在することを予言する．

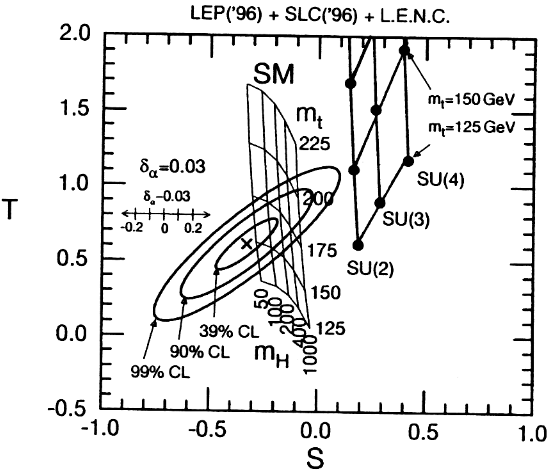


図 7.17 S-T 変数による標準モデル，新モデルのテスト[24)]
データは楕円で，標準理論(SM)は m_t と m_H をパラメターとした四角で示してある．また1重項が一つあるテクニカラーモデル $SU(N_C)$[22)] を $N_C=2, 3, 4$ について m_t の値を変えて示してある．
$\delta_\alpha=\dfrac{1}{\alpha(m_Z)}-128.72=0.03$ を標準として δ_α を変えるとどのくらい変わるかも示してある．

参 考 文 献

1) 竹下　徹，折戸周治：物理，**46** (1991) 643
2) F.A. Berends, G. Burgers and W.L. van Neerven : *Nucl. Phys.*, **B297** (1988) 429 ; **B304** (1988) 921
M. Greco, G. Pancheri-Srivastava : *Nucl. Phys.*, **B171** (1980) 118 ; **B197** (1982) 543
A. Borrelli *et al.* : *Nucl. Phys.*, **B333** (1990) 357
3) F.A. Berends : Z physics at LEP, CERN 89-08
R.N. Cahn : *Phys. Rev.*, **D361** (1987) 2666
4) G. Altarelli, R. Kleiss and C. Verzegnassi : Z. Physics at LEP, CERN 89-08
G. Altarelli : Proc. Int. Symp. on Lepton and Photon Interactions at High Energies, Stanford, 1989, World Scientific., Singapore, 1990, p. 286
5) S. Willenbrock and G. Valentia : *Phys. Lett.*, **B259** (1991) 373
R. Stuad : *Phys. Lett.*, **B262** (1991) 113
A. Sirlin : *Phys. Rev. Lett.*, **67** (1991) 2127
6) PDG (Particle Data Group) : Phys. Rev., **D45** (1992) # 3 ; **D54** (1996), EPJ **C3** (1998)
7) J. Steinberger : *Phys. Reports*, **203** (1991) 345

8) H. Burkhardt and J. Steinberger : *Ann. Rev. Nucl. Part., Sci.*, **41** (1991) 55
ALEPH ; D. Decamp *et al.* : *Z. Phys.*, **C53** (1992) 1
9) The LEP Collaboration : *Phys. Lett.*, **B276** (1992) 247
D.S. Schaile : *Fotschr. Phys.*, **43** (1994) # 5, 429
10) V. Hatten *et al.* : LEP Absolute Energy in 1990, The Energy Calibration of LEP in the 1993 Scan, CERN-PPE/95-10
11) DELPHI ; P.B. Renton, Talk at Lepton Photon Int. Conf. at Beijing, 1995
12) SLD ; K. Abe *et al.* : *Phys. Rev. Lett.*, **73** (1994) 25, *ibid.*, **78** (1997) 2075
13) A. Borroso *et al.* : ECFA Workshop on Phys. with LEP200, ed. A. Bohm and W. Hoogland, CERN 87-08
14) K. Aoki *et al.* : *Sup. Prog. Theor. Phys.*, **73** (1981) 1-219
W. Hollik : *Fortschr. Phys.*, **38** (1990) 165
W. Hollik : Precision Tests of the Standard Model, in Advanced Series on Directions in High Energy Physics, World Scientific ; P. Langacker, editor
M. Bohm and A. Denner : Proc. of the Workshop on High Energy Phenomenology, Mexico, July 1-12, 1991, ed., M.A.P' erez and R. Herta, World Scientific
F. Jegerlehner : "Renormalizing the Standard Model" in Proc. 1990 Theoretical Advanced Study Institute in Elementary Physics, Boulder, Colorado, June, 1990, eds. M. Cvetic and P. Langacker, World Scientific
F. Jegerlehner : Physics of Precision Experiments with Z's, in Prog. Part. Nucl. Phys., 1992, ed. A. Fassler
15) Z Physics at LEP1, ed. G. Altarelli, CERN 89-08 (1989)
H. Burkhardt, F. Jegerlehner, G. Penzo and C. Verzgnassi : *Z. Phys.*, **C43** (1984) 497
16) A. Sirlin : *Phys. Rev.*, **D22** (1980) 971
17) W.J. Marciano and A. Sirlin : *Phys. Rev. Lett.*, **61** (1988) 1815
18) CDF : *Phys. Rev. Lett.*, **73** (1994) 225 ; *Phys. Rev.*, **D50** (1994)2966
19) CHARM ; P. Vilain *et al.* : *Phys. Lett.*, **B335** (1994) 246
20) A.A. Akhundov *et al.* : *Nucl. Phys.*, **B276** (1986) 1
W. Beenakker and W. Hollik : *Z. Phys.*, **C40** (1988) 141
21) W.J. Marciano : *Phys. Rev.*, **D20** (1979) 274
A. Sirlin : *Phys. Lett.*, **B232** (1989) 123
S. Franchiotti and A. Sirlin : *Phys. Rev.*, **D41** (1990) 319
G. Degrassi, S. Franchiotti and A. Sirlin : *Nucl. Phys.*, **B351** (1991) 49
22) M.E. Peskin and T. Takeuchi : *Phys. Rev. Lett.*, **65** (1990) 964 ; *Phys. Rev.*, **D46** (1991) 381
G. Altarelli and R. Barbieri : *Phys. Lett.*, **B253** (1990) 161 ; *Nucl. Phys.*, **B405** (1993) 3
23) J. Ellis, G.L. Fpgli and E. Lisi : CERN-TH 7448/94
24) K. Hagiwara and A. Sirlin : *Phys. Rev. Lett.*, **61** (1988) 1815
K. Hagiwara : Talkat LP95, 17th Int. Symp. on Lepton-Photon Int., Aug., 1995, Beijing
K. Hagiwara, D. Haidt and S. Matsumoto : KEK-TH-512, DESY96-192, Hep ph/97 06331

8
ジェットの性質 (ジェット現象 1)

8.1 パートンとジェット

われわれは第5章で，QCDでは漸近自由が成立し，Q^2の大きいところでは摂動の手法が使えることを学んだ．しかし理論結果を実験で検証するには，QCD計算で取り扱うパートン（クォークとグルーオン）と実際に観測されるハドロンとの対応をつける必要がある．パートンがジェットとしてはじめて観測されたのは1975年で，SLACにおける$e^+ + e^- \to q + \bar{q}$反応においてであった[1)]．ジェットとは，たくさんのハドロンが特定の方向に集中して放出される現象である．その後，ジェットは電子の深非弾性散乱や$\bar{p}p$反応でも観測された．今日ではエネルギーが～5 GeVを超えるようなパートンは日常的にハドロンジェットとして観測されている．パートンとジェットとの対応づけには$Q^2 \to 0$ ($<1\,\mathrm{GeV}^2$) の部分でのQCDが必要である．非摂動的扱いが必要なところで，原理的にはQCDの基本方程式から解ける性質のものであるにしても，現段階ではモデルに頼らざるをえない．本章では，$e^+e^- \to q + \bar{q} + (g)$反応を例にとってジェットの一般的性質を解明した後で，次章でハドロン衝突におけるジェット現象を扱う．

ジェットの観測：e^+e^-の重心系でクォーク対$(q\bar{q})$がつくられると，$q\bar{q}$は大きさが等しく方向が反対の運動量をもつので180度方向に離れていくが，閉じ込めのポテンシャルによって$q\bar{q}$を結ぶ線上に大きなエネルギーが蓄えられる（カラー閉じ込めによる紐の出現）．一方，真空は$q'\bar{q}'$対の生成消滅を繰り返してゆらいでいる．距離が～1 fm (10^{-15}m) を超えると，紐のエネルギーは典型的なハドロンの質量エネルギーより大きくなり，紐を伸ばすよりは$q'\bar{q}'$

対がハドロン化する方がエネルギー的に得をするようになるので，各種のハドロンが元の $q\bar{q}$ を結ぶ線上にたくさん出現する．これらが元の q および $\bar{q}$ に引きずられて，180 度正反対方向に集中して放出されるので，ジェット現象として観測されると考える．図 8.1 にトリスタンのヴィーナス (VENUS) 測定器で観測された 2 ジェット，3 ジェットの事象例を示す．

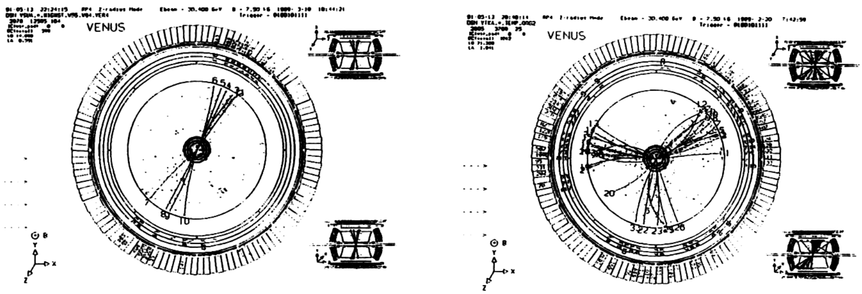


図 8.1 ヴィーナス測定器で観測された 2 ジェット (a) と 3 ジェット (b)

e^+e^- 反応でのジェット現象観測にはジェットをつくる個々の粒子の識別とエネルギー運動量測定のできることが条件である．基本的には，コライダー実験での汎用測定器のもつべき性質とほとんど共通している．すなわち，汎用性，密閉性，一様性，細分割などである．図 8.2 にヴィーナス測定器の構造を示す[2]．ヴィーナス測定器の使われたトリスタンのエネルギー領域 ($\sqrt{s} \fallingdotseq 60$ GeV) では，個々のハドロンの平均エネルギーは～数 GeV と小さく，磁場による運動量測定が可能であるので，ハドロンカロリメターを使う必要がなく，LEP($\sqrt{s} \fallingdotseq m_Z$) などより高いエネルギーでの測定器よりは簡単になっている．

8.1.1 スケーリングと破砕関数

ジェットは次のような性質をもつと考えられる．

(1) ジェットがパートンの変化したものであるならば，ジェットの形態は親のパートンの種類によってのみ決まり，パートンの生産機構 ($e^+e^- \to hX$, $ep \to ehX$, $p\bar{p} \to hX$ など) には依存しないであろう．

(2) ジェット中の個々のハドロンは基本的には親のパートンと同方向に集中して出るはずである．この場合ハドロンのもつパートンの飛来方向に

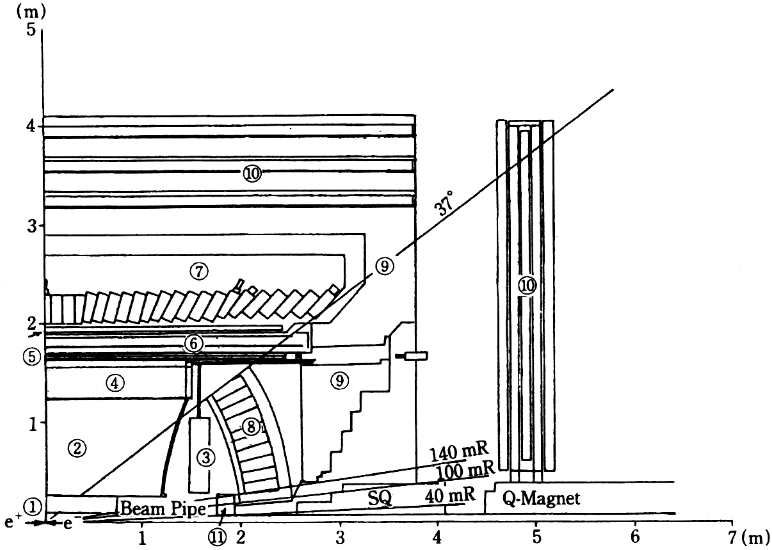


図 8.2 トリスタンヴィーナス測定器の 1/4 切断図[2]．左下端にビーム衝突点がある．
1：Inner Chamber：衝突点測定用軌跡検出器，2：Central Drift Chamber：運動量解析用軌跡検出器，3：Forward Chamber：放出角測定用前方軌跡検出器，4：Transition Radiation Counter：電子/π 分離用遷移放射検出器，5：TOF：飛行時間測定用カウンター，6：SC Coil：磁場発生用超伝導ソレノイドコイル，7：Barrel Calorimeter：電磁シャワーカロリメター，8：Liquid Argon Counter：液体アルゴンカロリメター，9：Return Yoke：磁場もどしヨーク，10：Muon Filter/Muon Chamber：ミューオン検出器，11：Luminosity Monitor：ルミノシティ測定器

対しての縦運動量 $p_{/\!/}$ は，親のパートンの運動量に比例して増大するであろう．一方横運動量 p_T の平均値は，親のパートンに無関係に不確定性よりくるゆらぎ程度，すなわち大体 300 MeV 程度であろう．これは pp 衝突で生成されるたくさんの π の p_T 運動量分布からも推察できる．
上の考察より p_T や質量を無視する近似では，パートンがハドロン化したときのハドロンの運動量分布関数（破砕関数＝fragmentation distribution）は，スケーリングに従うと推定される．すなわちハドロンの運動量を p_h，親のパートンの運動量を p とするとき，パートン q から生成されるハドロン h（＝$\pi^{\pm}$, K, p, $\bar{p}$ など）の破砕関数を $D_q{}^h$ と書くと，$D_q{}^h$ は

$$z = \frac{p_h}{|p|} \doteqdot \frac{2E_h}{E_{CM}} = \frac{2E_h}{\sqrt{s}} \tag{8.1}$$

のみの関数であり，運動量が $z\sim z+\mathrm{d}z$ の間にあるハドロンの数は

$$\mathrm{d}N_h = D_q{}^h(z)\mathrm{d}z \tag{8.2}$$

で与えられるであろう．そうすると，e^+e^- 反応で生成されるハドロン h の量は

$$\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}z}(e^+e^- \to hX) = \sum_q \sigma(e^+e^- \to q\bar{q})[D_q{}^h(z) + D_{\bar{q}}{}^h(z)] \tag{8.3}$$

と書ける．クォークの電荷を $Q_q e$ とするとき，

$$\sigma(e\bar{e} \to q\bar{q}) = 3Q_q{}^2\sigma(e\bar{e} \to \mu\bar{\mu})$$

であるから，

$$\frac{1}{\sigma}\frac{\mathrm{d}\sigma(e^+e^- \to hX)}{\mathrm{d}z} = \frac{\Sigma Q_q{}^2[D_q{}^h(z) + D_{\bar{q}}{}^h(z)]}{\Sigma Q_q{}^2} \tag{8.4}$$

となり，右辺は z のみの関数で s によらない．すなわちスケーリングが成立する．電子深非弾性散乱によるハドロン生成過程（図 8.3 (b)）が，$\mathrm{d}^2\sigma/\mathrm{d}x\mathrm{d}y \sim f(y)xq(x)$ という形をしていることを使うと（式 (3.49)），$e^+e^- \to hX$ のハドロン化過程（図 8.3 (a)）と比較して，

$$\frac{1}{\sigma}\frac{\mathrm{d}\sigma(ep \to ehX)}{\mathrm{d}z} = \frac{\Sigma Q_q{}^2 q(x) D_q{}^h(z)}{\Sigma Q_q{}^2 q(x)} \tag{8.5}$$

と表され，やはりスケーリングが成立するであろう．ここに $q(x)$ は，パートンの核子内での運動量分布関数である．図 8.4 (a) に e^+e^- 反応で $\sqrt{s}$ を変えたときの分布，図 8.4 (b) に e^+e^-, νp, pp など種々の反応における分布を示す[3]．図 8.4 (a) では，$\sigma\propto s^{-1}$ という事実を使い，変数 z は x_p，図 8.4 (b) では x^{ee} と表している．データの分布は $\sqrt{s}$ によらず z のみの関数でありスケーリング則を満たすこと，運動量分布がパートン生成の反応如何によらないという上記の仮定が満たされていることがわかる．$z<0.2$ ではスケーリングが破れているが，これは，ソフトグルーオン放出や有限なハドロン質量の効果であると考えられる．

破砕関数に関しては，運動量の保存より，

$$\sum_h \int z D_q{}^h(z)\mathrm{d}z = 1 \tag{8.6}$$

が成立しなければならない．アイソスピン独立と荷電共役対称より，例えば u が真空から $d\bar{d}$ を拾い π^+ をつくる確率と，d が真空から $u\bar{u}$ を拾い π^- を

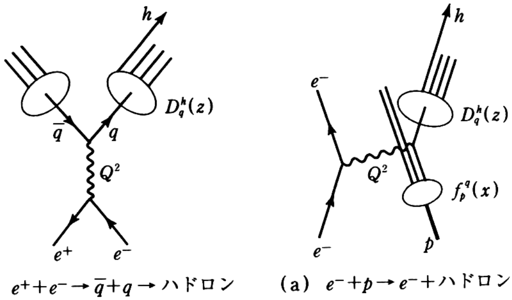


図 8.3　破砕関数 $D_q{}^h$ とパートン分布関数 $f_p{}^q(x)$

$D_q{}^h(z)$ は親のパートン q の運動量から z をもってハドロンがつくられる.
$f_p{}^q(x)$ は親のハドロン p の運動量の中に x をもつクォークがいる確率.

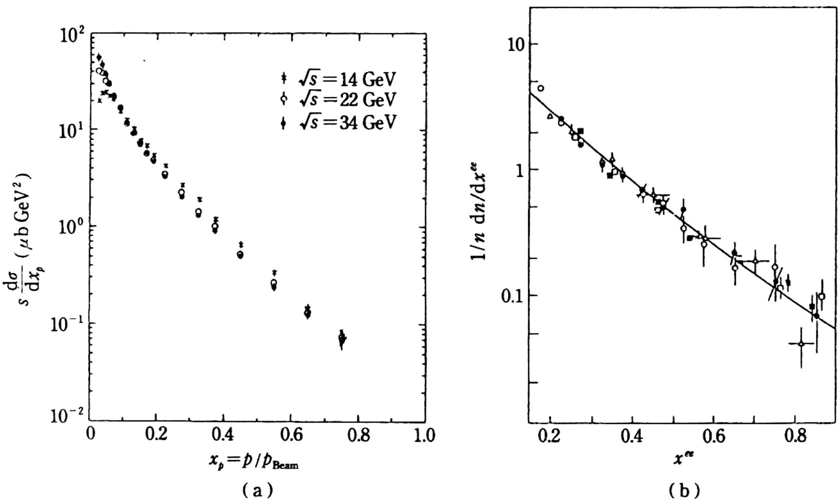


図 8.4　破砕関数のスケーリングを示すデータ[3)]

(a)　$s(\mathrm{d}\sigma/\mathrm{d}x_p)(e^+e^- \to h^+x)$, $x_p = 2p/\sqrt{s}$, $\sqrt{s} = 14, 22, 34$ GeV

(b)　異なった反応でのジェット破砕関数；$\nu p(\Delta)$, pp(●；CS　$P_T<6$,　○；CS　$P_T>6$ GeV/c,
■；CCOR　$P_T>5$,　□；CCOR　$P_T>7$ GeV/c). 実線は, e^+e^- 反応で得られたものを示す.

つくる確率は同一である. ゆえに

$$D_u{}^{\pi^+} = D_d{}^{\pi^-} = D_{\bar{u}}{}^{\pi^-} = D_{\bar{d}}{}^{\pi^+} \tag{8.7 a}$$

$$D_d{}^{\pi^+} = D_u{}^{\pi^-} = D_{\bar{d}}{}^{\pi^-} = D_{\bar{u}}{}^{\pi^+} \tag{8.7 b}$$

$$D_s^{\pi^+}=D_s^{\pi^-}=D_{\bar{s}}^{\pi^-}=D_{\bar{s}}^{\pi^+} \tag{8.7 c}$$

$$D_q^{\pi^0}=(D_q^{\pi^+}+D_q^{\pi^-})/2 \tag{8.7 d}$$

が成り立つであろう．ニュートリノ反応の場合は特に簡単な式となる．$h=\pi^\pm$ として (3.64) を参照すれば，

$$\frac{1}{\sigma}\frac{\mathrm{d}\sigma(\nu p\to\mu^- hX)}{\mathrm{d}z}=\frac{d(x)D_d^h(z)+(1-y)^2\bar{u}(x)D_{\bar{u}}^h(z)}{d(x)+(1-y)^2\bar{u}(x)}=D_d^h(z) \tag{8.8 a}$$

ここに核子の中の s クォークやチャーム生成の寄与は無視し，第 2 式から第 3 式への移行には (8.7) を使った．同様に

$$\frac{1}{\sigma}\frac{\mathrm{d}\sigma(\bar{\nu}p\to\mu^+ hX)}{\mathrm{d}z}=D_u^h(z) \tag{8.8 b}$$

となって，破砕関数が直接実験的に決められる．

8.1.2 ジェット変数

a. スラストとふくらみ指数

ジェット現象を記述するには，ジェットの形態を特徴づける変数（トポロジー変数，形態変数 (shape variable) など）を，いくつか定義しておくと便利である．高エネルギーの e^+e^- 反応では軽いクォーク対 $q\bar{q}$ は，2 個のジェットを生成するであろう．この場合粒子は特定の軸方向に集中して生成される．一方グルーオン放出を伴う場合は 3 ジェットになると考えられ，その場合 3 個のジェットは平面内にあるから粒子はパンケーキのように平らに分布するであろう．これらのトポロジーを区別する量としてよく使われる変数にスラスト (thrust) T とふくらみ指数 (acoplanarity) A がある[4]．定義は

$$T=\mathrm{Max}\left[\frac{\Sigma_i|\boldsymbol{p}_i\cdot\boldsymbol{e}_T|}{\Sigma_i|\boldsymbol{p}_i|}\right] \tag{8.9}$$

$$A=4\mathrm{Min}\left[\frac{\Sigma_i|\boldsymbol{p}_i\cdot\boldsymbol{e}_A|}{\Sigma_i|\boldsymbol{p}_i|}\right]^2 \tag{8.10}$$

である．ここに $\boldsymbol{p}_i$ はある事象の中にある i 番目の粒子の運動量であり，軸 $\boldsymbol{e}_T(\boldsymbol{e}_A)$ を動かして $T(A)$ が最大（最小）になるように調節する．$\boldsymbol{e}_T$ をスラスト軸という．スラストは生成粒子群がジェット軸（＝スラスト軸）にどれだけ揃っているかの目安を与える．すべての粒子が一つの軸方向に揃う 2 ジェットの場合に $T=1$ となり，粒子群が完全に等方的に生産されるときに $T=0.5$ と

なる．一方 A は粒子の分布がどれだけふくらむかひしゃげるかを表す目安であり，完全な等方（平面）分布のときに $A=1(0)$ となる．

演習 8.1　粒子の分布が等方的なときに $T=0.5$,　$A=1$ となることを証明せよ．

スラスト軸 $\boldsymbol{e}_T$ を定義した後，反応面内で，それに対し垂直な主軸（major axis）$\boldsymbol{e}_2$ を，次の量 F_{major} が最大になるように決め，

$$F_{\mathrm{major}}=\mathrm{Max}\frac{\Sigma_i|\boldsymbol{p}_i\cdot\boldsymbol{e}_2|}{\Sigma_i|\boldsymbol{p}_i|},\qquad \boldsymbol{e}_2\perp\boldsymbol{e}_T \tag{8.11 a}$$

第 3 の軸（従軸＝minor axis）$\boldsymbol{e}_3$ を，$\boldsymbol{e}_T$, $\boldsymbol{e}_2$ 双方に垂直なようにとり，F_{minor} を

$$F_{\mathrm{minor}}=\frac{\Sigma_i|\boldsymbol{p}_i\cdot\boldsymbol{e}_3|}{\Sigma_i|\boldsymbol{p}_i|},\qquad \boldsymbol{e}_3=\boldsymbol{e}_T\times\boldsymbol{e}_2 \tag{8.11 b}$$

と定義する．$\boldsymbol{e}_3$ は反応面に垂直な軸である．グループによってはふくらみ指数（acoplanarity）の代わりに，偏平度（oblateness）O

$$O\equiv F_{\mathrm{major}}-F_{\mathrm{minor}} \tag{8.12}$$

を使う場合もある．

b.　Q-プロット

よく使われるもう 1 組の量は，運動量テンソル

$$I_{\mu\nu}=\Sigma_i p_{i\mu}p_{i\nu} \tag{8.13}$$

の固有値 $Q_j(Q_1<Q_2<Q_3)$ と対応する固有ベクトル $\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2, \boldsymbol{r}_3$ である（図 8.5 (a)）．Q_j を次の式により規格化する．

$$Q_j=\frac{\Sigma_i(\boldsymbol{p}_i\cdot\boldsymbol{r}_j)^2}{\Sigma_i(\boldsymbol{p}_i\cdot\boldsymbol{p}_i)} \tag{8.14 a}$$

$$Q_1+Q_2+Q_3=1 \tag{8.14 b}$$

これから，反応面内でのジェット軸に垂直な横運動量 $p_{T\mathrm{in}}$ と，反応面に垂直な横運動量 $p_{T\mathrm{out}}$ が定義できる．

$$\langle p_{T\mathrm{in}}{}^2\rangle=Q_2\frac{\Sigma_i(\boldsymbol{p}_i\cdot\boldsymbol{p}_i)}{N} \tag{8.15 a}$$

$$\langle p_{T\mathrm{out}}{}^2\rangle=Q_1\frac{\Sigma_i(\boldsymbol{p}_i\cdot\boldsymbol{p}_i)}{N} \tag{8.15 b}$$

N は 1 事象内の粒子数である．

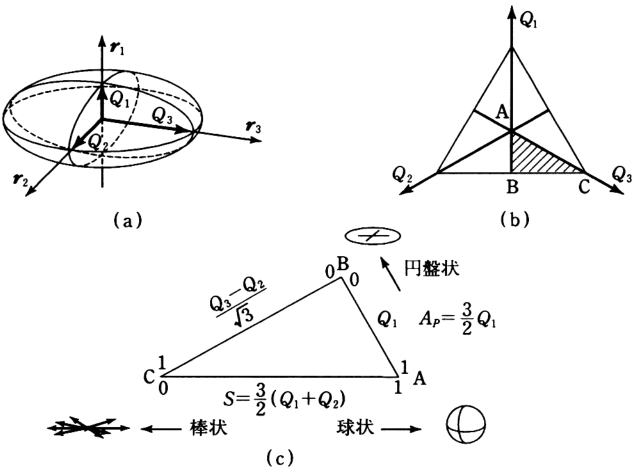


図 8.5 運動量テンソルと Q-プロット

(a) 運動量テンソルの固有ベクトル $\boldsymbol{r}_i$ と固有値 Q_i, $Q_1 \leqq Q_2 \leqq Q_3$

(b) $Q_1+Q_2+Q_3=1$ であるので，ある事象の (Q_1, Q_2, Q_3) の組は三角形 ABC 内の一点として表される.

(c) Q-プロット；座標を Q_1 (AB に平行), $(Q_3-Q_2)/\sqrt{3}$ (BC に平行), $S=(3/2)(Q_1+Q_2)$ (AC に平行) で表す. B 点に近いところはジェットの形状が円盤状, C に近いところは棒状 (2 ジェット), A に近いところは球状 (等方分布) をしている.

歴史的には最初に球形指数 (sphericity) S が定義された[4].

$$S=\frac{3}{2}\mathrm{Min}\left[\frac{\Sigma_i|\boldsymbol{p}_{Ti}|^2}{\Sigma|\boldsymbol{p}_i|^2}\right] \tag{8.16}$$

最小化は $\boldsymbol{p}_T$ を定義する軸を動かして行われる. こうして定義した球形指数 (sphericity) は，運動量テンソルの固有値 Q_i と

$$S=\frac{3}{2}(Q_1+Q_2), \qquad 0<S<1 \tag{8.17}$$

で結びついている. 等方分布では $S=1$ となり，平行な2ジェットでは $S=0$ となる. 固有値 Q_3 に対応する固有ベクトル $\boldsymbol{r}_3$ が，sphericity軸もしくはジェット軸と呼ばれる. 非平面指数 (aplanarity) は，$A_P=3Q_1/2(0<A_P<0.5)$ で定義され，ふくらみ指数 (acoplanarity) と非常によく似た量である. (8.14 (b)) の条件のため，一つの事象を表す3点セット (Q_1, Q_2, Q_3) は，図 8.5 (b) の陰影をつけた三角形内の一点を表し，これらの点をプロットしたものは

Q-プロットと呼ばれる．

(e_T, e_2, e_3) および付随する変数を使うことの利点は，それらの量が1次のモーメントであるため，QCD につきものの赤外発散を避けることができること，粒子が崩壊して複数個の子粒子に崩壊しても変数値の変動がないこと，また QCD で計算できる量であることなどがあげられる．運動量テンソルの方法は，2次のモーメントを使うため赤外発散の危険があり，崩壊粒子がたくさんあると運動量の大きい粒子に重みがかかりすぎて変数の値を歪めるなど理論との比較には不適当であるが，計算が素早くできジェット構造が見やすい（図8.5 (c) で (Q_1, Q_2, Q_3) 点が，頂点 A, B, C のどれに近いかを見て，トポロジカルな構造が直ちにわかる）など実験的な見地からは十分な有用性がある．

8.1.3　ジェット変数の応用

ジェット変数の効用は第1に，ジェットを同定しジェット軸を決めるにある．ジェット現象解析には欠かせない基本量であるが，いくつかの応用をあげて例を示そう．

a．2ジェット，3ジェットの分離

MARK-J グループは軌跡情報を使わず，代わりにエネルギーの流れを使用した[5]．このとき個々の反応ごとにジェット軸を定義することはできず統計的に処理する必要がある．図8.6 (a), (b) は，スラストを小さく $(T<0.8)$，偏平度 (oblateness) を大きく $(O>0.1)$ とった事象，すなわちハドロンが円盤上に広がる事象では3-ジェットが分かれることを示している．図8.6 (c), (d) は，重心系のエネルギーが高くなるとグルーオン放出頻度が大きくなり，偏平度 (oblateness) の大きな事象が増えることを示す．

b．クォークのスピン

エネルギー $\sqrt{s}$ が $q\bar{q}$ の質量に比べて十分大きければ，$q\bar{q}$ は2個のジェットをつくるであろうから，スラスト T は1に近くなるであろう．図8.7 (a) はDESY，トリスタン，LEPのデータを示したもので，エネルギーが大きくなると T が急速に立ち上がることがわかる．しかし，ある程度以上いくと飽和してくる[6]．実線や点線はハドロン化モデル（後述）のモンテカルロ計算に

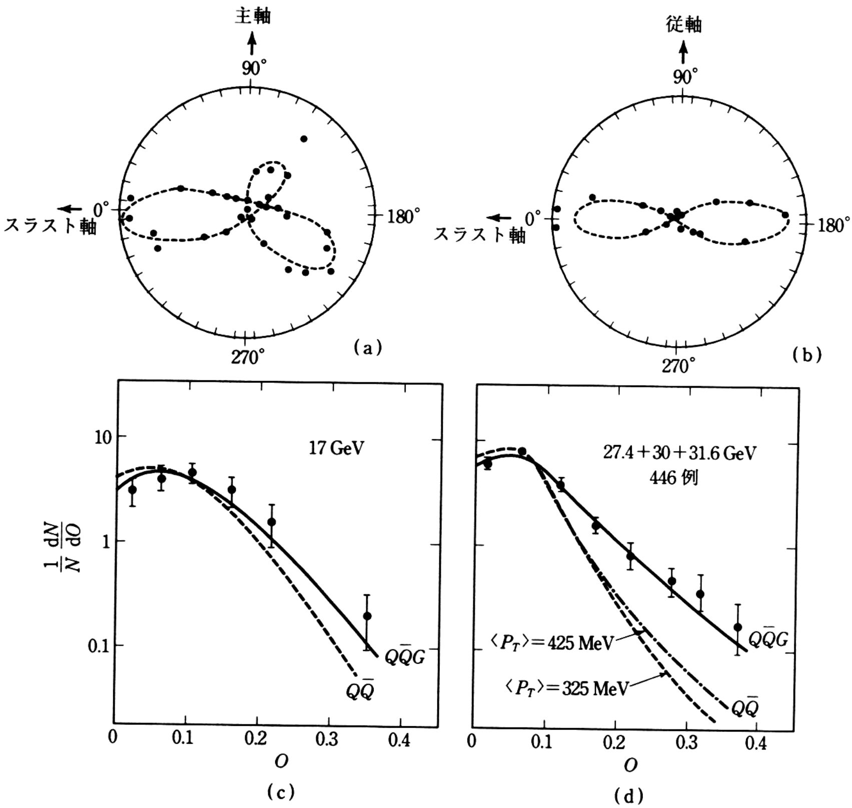
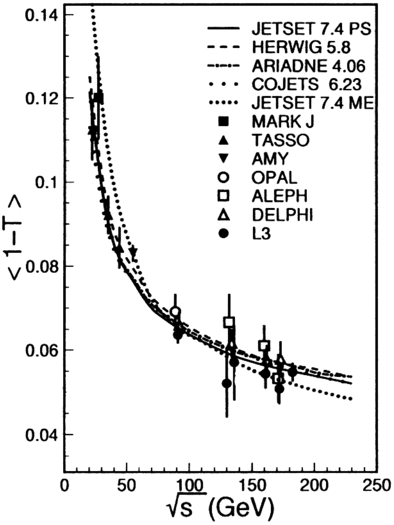
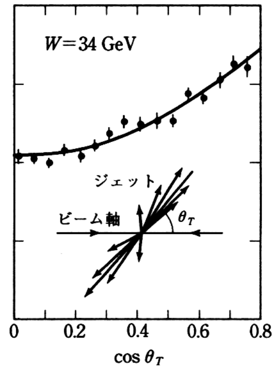


図 8.6 ジェットエネルギー流；PETRA, MARK-J データ[5)]
$T<0.8$, $O>0.1$ のすべてのデータ ($\sqrt{s}=27.4$, 30.0, 31.6 GeV) のエネルギー流.
(a) スラストと主軸面での流れ, (b) スラストと縦軸面での流れ, --- は $q\bar{q}g$ モデル計算, (c), (d) は $(1/N)(dN/dO)$, (c) $\sqrt{s}=17$, (d) $\sqrt{s}=27.4-31.6$ GeV
—— $q\bar{q}g$ モデル
—— $q\bar{q}$ ($\langle P_T\rangle=325$ MeV)
-·-·- $q\bar{q}$ ($\langle P_T\rangle=425$ MeV/c)

よる T 曲線である．モデルとの一致はよい．図 8.7 (b) はスラスト軸の角分布を示したもので，$(1+\cos^2\theta)$ 分布をしているのが見てとれる．この分布は $e^+e^-\to\mu^+\mu^-$ の角分布式 (3.15) にも明らかなようにスピン 1/2 の点粒子が生成されるときの分布であり（スピン 0 ならば $\sin^2\theta$ 分布），ジェットがクォークの生成物でありかつクォークのスピンが 1/2 であることの証拠である．図 8.8 は $\sqrt{s}=34$ GeV での TASSO データの Q-プロットであるが[7)]，2-ジェットの配位の方に点が集中しているのがわかる．



(a)



(b)

図 8.7　ジェット変数のテスト

(a)　スラスト $\langle 1-T\rangle$ のエネルギー変化[6]. 各種の線はハドロン化モデルによるモンテカルロシミュレーション

(b)　$\sqrt{s}=34$ GeV でのスラスト T により決めたジェット軸の角分布[7]

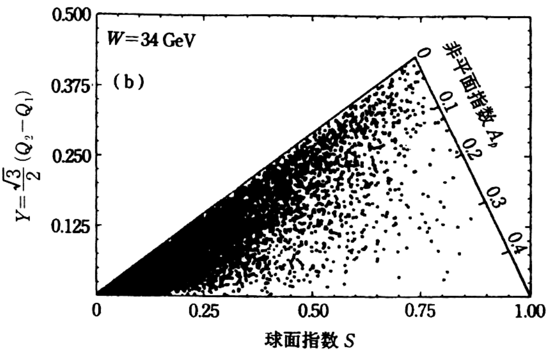
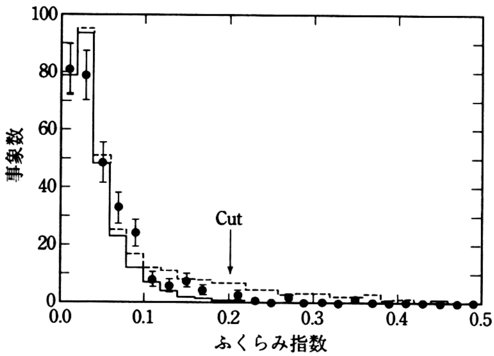


図 8.8　$\sqrt{s}=34$ GeV のハドロン事象の Q-プロット (TASSO)[7]
大部分は 2 ジェット ($A_P \fallingdotseq 0$, $S \fallingdotseq 0$) であるが，円盤状事象 ($A_P \fallingdotseq 0$, $S \fallingdotseq 1$) もいくらかはあり，これらは 3 ジェットを含む．

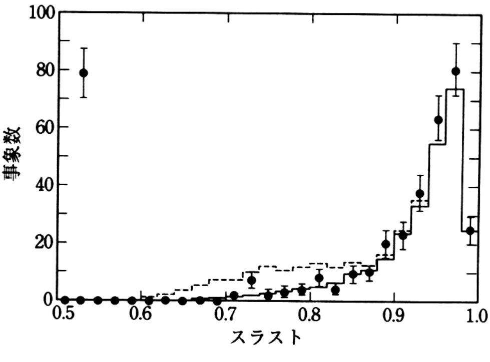
c.　新粒子発見法

e^+e^- 重心系のエネルギー $\sqrt{s}$ が，重い新粒子 Q（質量 M）生成のしきい値の近く ($\sqrt{s}\sim 2M+\varepsilon$, $\varepsilon \ll M$) では，$Q\overline{Q}$ はほとんど静止して生成されるから破砕化してできるハドロンはほぼ等方的に分布する．すなわちスラストが小さ

く，ふくらみ指数 (acoplanarity) が大きい．この性質は e^+e^- 反応で新粒子を発見する方法として有用である．図8.9 (a)，(b) はトリスタンヴィーナスグループで得られたデータを示したもので，トップクォークが生成されていたならば示したであろう分布と実験データを比較したものである[8)]．トップクォーク対が生成されているならば，ふくらみ指数 (acoplanarity) の大きい事象，スラストの小さい事象の数が多くなるはずである．データは，T, A の分布の形が u, d, s, c, b の軽いクォーク生成のみで十分説明できるので，トッ



(a)



(b)

図 8.9 $e^+e^- \to q\bar{q}$ 反応のジェットトポロジー変数分布[8)]
$\sqrt{s}=52$ GeV トリスタンヴィーナスデータ
—— は五つのクォーク (u, d, c, s, b) の寄与のモンテカルロ
---- は $m=25.5$ GeV のトップを加えた場合の予想値
これからこのエネルギーではトップクォークが生成されていないとわかる．

プは生成されていないことがわかる．CERN の LEP ($\sqrt{s}=90$ GeV) でも同様の方法で探したが見つからなかった．トップの発見は，最終的には $\sqrt{s}$ のはるかに大きなハドロンコライダーのテバトロン (TEVATRON) でなされた (§ 9.8 参照).

8.2　ハドロン化モデル

パートンがハドロンジェットとして観測されるならば，理論と実験データとの比較をするためには，パートンがどのようにハドロンに変換されるかを理解する必要がある．現時点では数学的に厳密な方法が存在せずさまざまのアプローチがあり，いくつかのモデルが存在する．出発点の考え方が対極にあるように見えるモデルも存在するが，実験データをよく再現するのであれば，基本にある考えはどこかで繋がると期待される．データの精密化にも淘汰されず生き残るモデルの特質を理解することができれば，正しい理論に行き着くであろう．

8.2.1　理論とデータの比較処方

ハドロン化モデルを適用して，QCD 計算を実験でテストするとき，大きく分けて二つの方法がある．第 1 はパートンレベルで物理量（行列要素）を解析的に計算し，終状態のパートンを何らかのハドロン化モデルを使ってハドロンレベルの物理量に対応づけるやり方（行列要素の方法）である．第 2 は終状態パートンができた段階で，DGLAP 発展方程式を適用し，次々とエネルギーの低いパートンに分岐させ，パートンシャワーを発生させるやり方（パートンシャワーの方法）である．これらを模式的に表したのが図 8.10 である．行列要素の方法はこの図でいえば，$O(\alpha_s{}^2)$ の計算からシャワー発生過程を飛び越えて直接ハドロン化の手続きをとることに相当する．

シャワー発生の場合は，カスケード発生の各段階で適切な仮想度 (virtuality) Q^2 (QCD のスケールを与える量) の値を入れて計算する．Q としては，2 次パートン発生の際の横運動量 p_T もしくは親パートンの不変質量がよ

く使われる．シャワーは仮想度 Q^2 が，切断値 $Q_0{}^2$ に達したところで止め，それ以後はハドロン化モデルを採用してハドロンにもっていく．カスケード発展の摂動的取扱いが有効であるためには，各段階での $\alpha_s(Q)$ が十分小さいこと，すなわち，$Q_0 \gg \Lambda$ でなければならない．通常は，$Q_0 \sim 1$ GeV くらいにとる．$Q \lesssim \Lambda$ では非摂動的な効果（例えば，ボーズ‐アインシュタイン相関など）が現れる．

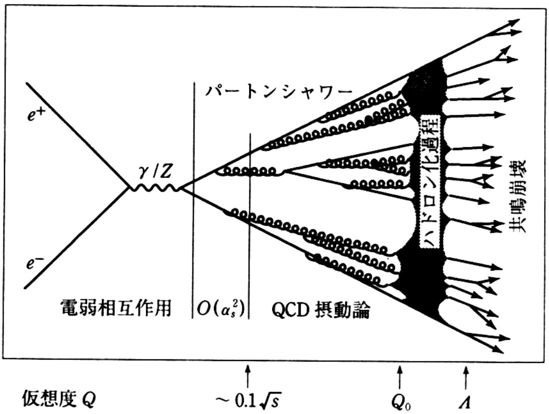


図 8.10 ハドロン化の模式図

パートンの数が少ない（$n \lesssim 4$）ときは，QCD 行列要素の解析計算が可能．グルーオン放出が小角度またはソフトという近似では，QCD カスケードの統計的取扱いが可能（$Q > Q_0$）．最終的には（$Q < Q_0$）パートンをハドロンに転換するモデルが必要である．$Q \lesssim \Lambda$ では非摂動的効果が現れる．Q は仮想度（virtuality）と呼ばれる．実の粒子は $Q \simeq 0$ で，Q が大きいほど摂動近似がよくなる．

行列要素の方法は，α_s の関数として少なくも n 次までは正確であるが，現段階で理論計算が存在するのは，$\sigma_{\text{TOT}}(e^+e^- \to$ ハドロン）以外は $n \leqq 2$，つまり終状態は 4 個のパートンまでに限られている．また，高いエネルギー（すなわち大きな仮想度 Q^2）をもつ終状態パートンに直接ハドロン化モデルを適用するので（典型的な仮想度$\sim 0.1\sqrt{s}$）モデルに対する依存度が高い．その意味で，パートンシャワー発生段階を通す方が，より QCD の基本に忠実といえる．パートンシャワーの方法は発生パートンの数に制限がないこと，ソフトグルーオンが自然に取り入れられていること，仮想度の切断 Q_0 が~ 1 GeV と十

分低いので，最終段階でどのハドロン化モデルを使っても，結果はあまり変わらないなどの利点がある．しかし，パートンが分岐する際の各ヴァーテックス点で，シャワー発生に便利なようにグルーオンを同方向 (collinear) に放出する対数近似を使うので，堅い過程 (hard process : Q^2 の大きなグルーオン発生を伴う，例えばエネルギー相関 EEC 現象）に対しては原理的に精度が悪い弱点もあり，このようなときは行列要素の方法に利点がある*1)．

行列要素の方法を採用したプログラムには JETSET[9] の行列要素版（ハドロン化は紐モデル)，パートンシャワーの方法には JETSET のパートンシャワー版（ハドロン化は紐モデル）や，HERWIG[10]（ハドロン化はクラスターモデル)，NLLA[11] などがよく使われる．同じパートンシャワーモデルでもプログラムによって変数の選び方などに差があり同一ではない．これらの手法には一長一短があり，状況に応じて使い分ける必要があるが，最近はパートンシャワーの方法が優勢となってきている．そこで，まずパートンシャワー発生の基本的な考え方を説明しておこう．

8.2.2 パートンシャワーの手法

a. シャワー発生法

DGLAP 発展方程式 (5.99)～(5.100) を使えば，対数近似の範囲内で，パートンは一定の確率で2個のパートンに分裂することを繰り返すのでパートンシャワーを起こすことが可能である（図 8.11 (a))．運動学の考察から各段階でのパートンの不変質量 t_i $(=Q_i^2$ virtuality に使う）は，正でありかつ分割ごとに小さくなる ($i \to j, k$ に対し $t_i > t_j, t_k$)．発展方程式に従えば発展変数 $\tau = \ln(Q^2/\Lambda^2)$ のわずかな変化 $\mathrm{d}\tau = \mathrm{d}Q^2/Q^2$ の間に $a \to b + c$ なる分割が起きる確率は，対数第1近似で

$$\frac{\mathrm{d}W_{bc\leftarrow a}}{\mathrm{d}\tau} = \int \mathrm{d}z \frac{\alpha_s(Q^2)}{2\pi} P_{bc\leftarrow a}(z) \tag{8.18 a}$$

で与えられる．$P_{bc\leftarrow a}(z)$ は§5.5で定義した分割関数である．分割関数は $z = 0, 1$ で特異点をもつのでモンテカルロ計算をするときは，あまりにたくさんの

*1) 最近のパートンシャワーモデルでは，少なくも最初のグルーオン発生に関しては，$O(\alpha_s)$ の正確な行列要素と整合をとっているうえ，シャワー発展に際しても，対数第2近似を使うなど，これらの欠点は大幅に改良されている．

ソフトグルーオンがつくられるのを防ぐため，各段階でのパートンの仮想度 Q を Q_0 より大きいとするか，またはグルーオンに仮想的な質量 (m_g) を導入して切断する．発展変数が τ のときにパートン放出が起きるためには，$\tau=\tau_{\max}$ より出発して，τ になるまでパートンを放出しないことが必要である．ある小さな範囲 $\delta\tau$ の間，分割が起きない確率は $1-\delta\tau$ $(\mathrm{d}W/\mathrm{d}\tau)$ で与えられるので，τ をもつパートン a が $\tau_{\min}=\ln(Q_0^2/\Lambda^2)$ になるまで他のパートンを放出しない確率 $S_a(\tau)$ は

$$\begin{aligned} S_a(\tau)&=\exp\left(-\int_{\tau_{\min}}^{\tau}\mathrm{d}\tau'\frac{\mathrm{d}W_{bc\leftarrow a}}{\mathrm{d}\tau'}\right) \\ &=\exp\left(-\int_{\tau_{\min}}^{\tau}\mathrm{d}\tau'\int_{z_{\min}}^{z_{\max}}\mathrm{d}z\frac{\alpha_s(Q^2)}{2\pi}P_{bc\leftarrow a}(z)\right) \end{aligned} \tag{8.19}$$

これをスダコフ形状因子 (Sudakov form factor) という．これを使えばパートン a が，$\tau_{\max}$ から τ までパートンを放出しない確率 $P_a(\tau_{\max},\ \tau)$ は $S_a(\tau_{\max})/S_a(\tau)$ で与えられる．したがって，はじめに $\tau_{\max}$ をもっていたパートン a が $\tau\sim\tau+\mathrm{d}\tau$ の間に 2 個のパートンに分裂する確率は，

$$\frac{S_a(\tau_{\max})}{S_a(\tau)}\frac{\mathrm{d}W_{bc\leftarrow a}}{\mathrm{d}\tau}\mathrm{d}\tau \tag{8.20}$$

で与えられる．いったん分岐した後は，b または c を親として再度上の処方を繰り返しシャワーを起こし，τ が $\tau_{\min}$ になったところで終了させる．

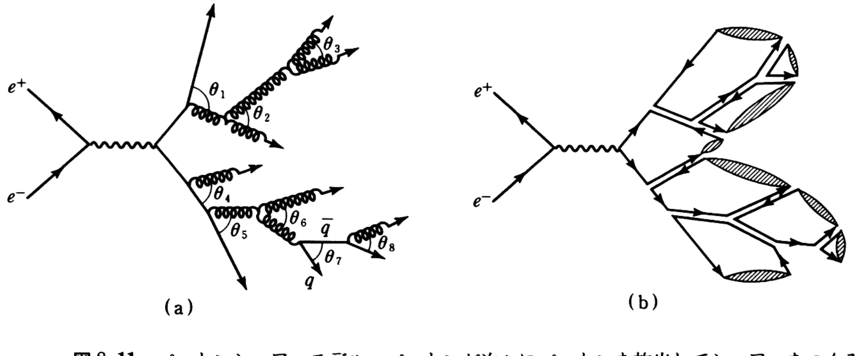


図 8.11 パートンシャワーモデル．パートンが次々にパートンを放出してシャワーをつくる．
(a) 角整列化 ($\theta_1>\theta_2>\theta_3$, $\theta_4>\theta_5>\theta_6>\theta_7>\theta_8$) により干渉効果を取り入れることができる．
(b) クラスターモデル：$Q<Q_0$ になるとカラー1 重項になるようにパートンを組み合わせてクラスタ (斜影をつけた部分) をたくさんつくり，ハドロンに転換させる．

演習 8.2　$a=b=q$, $c=g$ とし，クォークによるグルーオン放出のみ考えるとき，対数第 1 近似（$\alpha_s(\tau)=[b_0\tau]^{-1}$, (5.32) 参照）では，

$$S_a(\tau)=\left[\frac{\alpha_s(\tau_{\min})}{\alpha_s(\tau)}\right]^{-\gamma_0/b_0}, \qquad \gamma_0=\frac{1}{2\pi}\int_{z_{\min}}^{z_{\max}}\mathrm{d}zP_{qg\leftarrow q}(z) \tag{8.21}$$

を示せ．ただし，z 積分と τ 積分は独立とする．

ループ補正の理論的考察によれば，α_s の引数 Q^2 としては，パートンの不変質量 t よりはむしろ，$p_T{}^2\fallingdotseq z(1-z)Q^2$ を使うのが適切という考え方もあり[12]，HERWIG プログラムなどで実際に使われている．

b．グルーオン干渉効果

次々と放出されるグルーオンの波長が長いと（ソフトグルーオン），空間的に重なる領域が生じる．もし 2 個のグルーオンがカラーと反カラーの関係にあれば，そこでは干渉により互いに打ち消し合う効果が生じる．対数第 1 近似でこの効果を調べたところ，後に放出されるグルーオンの放出角度が先に放出されるグルーオンの角度より大きいと打ち消し効果が生じることがわかった[13]．モンテカルロでは，後に放出されるグルーオン角を，その前の放出角より小さくするという角整列化によりこの効果を取り入れている（図 8.11 (a)）．

角整列により干渉効果が取り入れられることの直観的理由は次のようにして得られる．いま電子と陽電子が開口角 α で生成されて，電子は仮想状態 v から，Δt 後に運動量 $\boldsymbol{k}$ のフォトンを角 β で放出し，運動量 $\boldsymbol{p}$ をもつようになったとする．ハイゼンベルグの不確定性原理によって，Δt は仮想状態のエネルギーと最初のエネルギーとの差 ΔE と結びついている．$|\boldsymbol{p}|\gg|\boldsymbol{k}|$, m および $\beta\to 0$ の極限で

$$\Delta E=\sqrt{\boldsymbol{p}^2+m^2}+|\boldsymbol{k}|-\sqrt{(\boldsymbol{p}+\boldsymbol{k})^2+m^2}\sim|\boldsymbol{k}|\beta^2 \tag{8.22}$$

$$\therefore\quad \Delta t\sim\frac{1}{|\boldsymbol{k}|\beta^2}\sim\frac{\lambda_T}{\beta}, \qquad \lambda_T=\frac{1}{|\boldsymbol{k}_T|}=\frac{1}{|\boldsymbol{k}|\beta} \tag{8.23}$$

λ_T は横方向の波長である．この Δt の間に電子と陽電子間の距離 Δd は

$$\Delta d=\Delta t\alpha=\frac{\lambda_T\alpha}{\beta} \tag{8.24}$$

となるから，$\Delta d\lesssim\lambda_T$（すなわち $\alpha\lesssim\beta$）ならば，フォトンは電子と陽電子を区別できず，全体として中性の物体としてしか認識しないから放出は抑制され

る．$\Delta d > \lambda_T$ ならば電荷ははっきりと分かれるからフォトン放出は抑制されない．QCD の場合は，親がグルーオンのときなど全カラー荷が 0 にはならず $\Delta d \lesssim \lambda_T$ であってもグルーオン放出が 0 ではないが，同じような議論が可能である[14]．

c．ハドロン化

パートンは最終的にはハドロンに変換するが，ハドロン種を選択するためには香りとスピンを指定しなければならない．パートンをハドロンに変換する最も簡単な方法はクラスターモデルと呼ばれ，次のようにする．まず，グルーオンは強制的に $q\bar{q}$ 対に変換してから，カラーが中性になるように，かつ位相空間内で最も近い $q\bar{q}$ の組み合わせを選ぶ（クラスターという．図 8.11 (b)）．このとき，真空から $q'\bar{q}'$ または $q'q'\bar{q}'\bar{q}'$（q' は c, b をも含む任意の香りのクォーク）をすべて同じ確率で選んで，$q\bar{q}', q'\bar{q}$ の量子数をもつ 2 個のメソンまたは $qq'q'$, $\bar{q}\,\bar{q}'\bar{q}'$ の量子数をもつ 2 個のバリオンに崩壊させる．崩壊先の選択には位相空間体積（$p_{CM}\cdot(2S_1+1)(2S_2+1)$）に比例した重みをつける．すなわち，崩壊は等方的に起きる．S_1, S_2 は崩壊先ハドロンのスピンである．クラスタの質量が軽すぎてそのような 2 体の崩壊先が存在しないときは，$q\bar{q}'$ の量子数をもつハドロンにそのまま移行させる．変換先のハドロンが共鳴の場合はさらに崩壊させる．クラスタモデルの特徴は，変換先が位相体積の重みをつける以外は等加重であり，調整すべきパラメターをもたないという非常に単純明快な手法を採用していることである．

干渉効果を入れた最初のパートンシャワーモデル（Webber モデル[15]）では，シャワーを止めた後のハドロン化モデルとしてクラスターモデルを採用した．Webber モデルの使うパラメターの数は，Q_0（virtuality cut）および $\Lambda_{\overline{MS}}$ くらいのものであり，実験データの試練に耐えていままで生き残っているのは驚嘆すべきことである．さすがに元の素朴なモデルではあまりに単純すぎて不都合な点もでたので改良はされているが，他のモデルに比べ桁違いにパラメターの少ない特徴は残っている．ハドロン化モデルとしては特にクラスターモデルに限る必要はなく，現在では紐モデルと組み合わせて使う場合が多い．

8.2.3　独立破砕モデル[16)]

独立破砕モデル (independent fragmentation model, 以下 IF モデルと略す) はハドロン化モデルに先鞭をつけたものであり，ジェット研究の初期，主としてDESY における PETRA のデータを解析するのに威力を発揮した．ここで，開発された基本的手法は各種モデルに受け継がれ今日でも生きている．

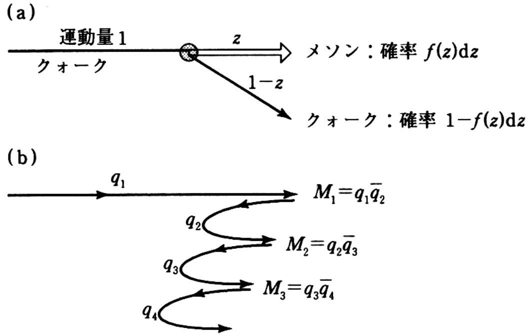


図 8.12　独立破砕モデル (independent fragmentation model)
最初のクォーク q_1 が真空中より $\bar{q}_2q_2$ を拾い上げ，$M_1=q_1\bar{q}_2$ というメソンをつくる．残った q_2 は再び真空中より $q_3\bar{q}_3$ を拾い上げというように，各クォークはまったく独立にしかし同じように真空から $q_i\bar{q}_i$ を拾い上げる．この過程は残りのクォークエネルギーが小さくなりもはやハドロンをつくれなくなるまで繰り返す．

a.　破 砕 関 数

このモデルは，縦運動量についてはスケーリングが成立し，横運動量分布はエネルギーに独立という経験則を織り込んだものである．いまパートンの質量を 0 とし，横運動量 p_T を無視すると，縦運動量 $p_{q/\!/}$ をもつパートン q_i は，ある確率 $f(z)\mathrm{d}z$ をもって真空中にある $q_{i+1}\bar{q}_{i+1}$ から $\bar{q}_{i+1}$ を拾って縦運動量 $p_{Mz}=zp_{q/\!/}$ をもつメソン $M(q_i\bar{q}_{i+1})$ をつくり，残りのパートン q_{i+1} は縦運動量 $(1-z)p_{q/\!/}$ をもって進行を継続する (図 8.12 (a)，IF モデルの図)．質量が有限なときは運動量の代わりに $(E+p_{/\!/})$ という光円錐変数 (light cone variable) がよく使われる．このときは，$z=(E_h+p_{h/\!/})/(E_q+p_{q/\!/})$ で定義する．各プロセスで，パートン q_i と q_j はまったく独立にハドロン化するとすれば，繰り返しの方法が使えてモンテカルロ計算が可能となる (図 8.12 (b))．ハドロン化の繰り返しはパートンのエネルギーが小さくなってこれ以上ハドロンができなくなるまで続ける．このエネルギーは，たくさん存在するハドロン共鳴の質量

付近～O(1 GeV)にとることが多い．最初のパートンがハドロン化する全確率 $D(z)\mathrm{d}z$ は，このパートンが最初のハドロン化で運動量 z のメソンになる確率 $f(z)\mathrm{d}z$ に，残りのパートンがハドロン化する全確率を加えたものであるから，

$$D(z)=f(z)+\int_z^1 f(1-\eta)D\left(\frac{z}{\eta}\right)\frac{\mathrm{d}\eta}{\eta} \tag{8.25 a}$$

$$\int f(z)\mathrm{d}z=1 \tag{8.25 b}$$

という方程式が成立する．(8.25 b) は運動量保存則 (8.6) を保証する．これは $z\to 0$ で $D(z)\fallingdotseq \mathrm{d}z/z$ のような解をもつので，ラピディティ η

$$\eta=\frac{1}{2}\ln\left[\frac{(E+p_{\parallel})}{(E-p_{\parallel})}\right]=\ln\left[\frac{(E+p_{\parallel})}{m_T}\right]\fallingdotseq \ln z+\text{const.} \tag{8.26}$$

$$m_T{}^2=p_T{}^2+m^2$$

の分布としては，$\eta\fallingdotseq 0$ 付近で平坦となる．$1/z$ の振る舞いは，高エネルギーでハドロン発生の平均多重度が対数的に増加するという経験則に適合するために必要である．f 関数としては香りが u, d, s の軽いクォークの場合

$$f(z)=(1+\alpha)(1-z)^{\alpha}, \qquad \alpha\sim 0.6 \tag{8.27 a}$$

がよく使われる（図 8.13 (a) に掲げた実際の π, K 生成のデータ[17]と比較せよ）．このときは，

$$D(z)=(1+\alpha)\frac{(1-z)^{\alpha}}{z} \tag{8.28}$$

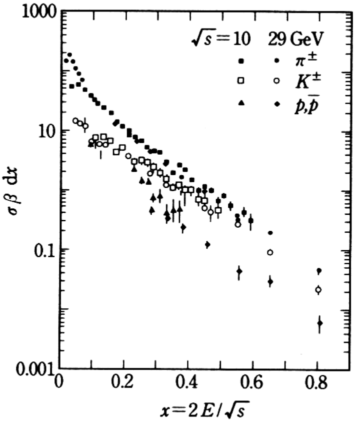
となる．香りが c または b の重いクォークの場合は，ピーターソン関数[18]

$$f(z)=\left[z\left(1-\frac{1}{z}-\frac{\varepsilon_Q}{(1-z)}\right)^2\right]^{-1} \tag{8.27 b}$$

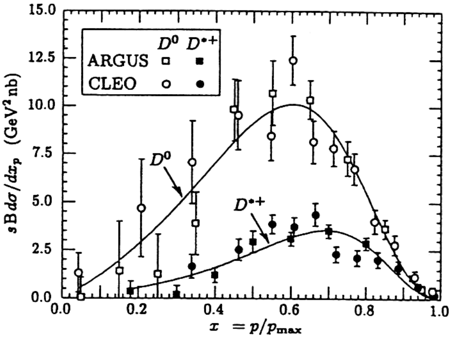
がよく使われる．

この関数の由来は次のように考えられている．c, b などの重いクォーク Q は，真空から u, d, s などの軽いクォークを拾ってメソンをつくってもほとんどエネルギーを変えないから，$Q\to M(Q\bar{q})+q$ の振幅はエネルギー差の逆数 ΔE^{-1} に比例する．$M_M\fallingdotseq M_Q$ として

$$\begin{aligned}\Delta E&=(m_Q{}^2+z^2P^2)^{1/2}+[m_q{}^2+(1-z)^2P^2]^{1/2}-(m_Q{}^2+P^2)^{1/2}\\&\fallingdotseq\frac{m_Q{}^2}{2P}\left[\frac{1}{z}+\frac{(m_q{}^2/m_Q{}^2)}{1-z}-1\right]\end{aligned} \tag{8.29}$$



(a)



(b)

図 8.13　破砕関数パラメター化のデータ資料[17)]

(a)　$(1/\sigma\beta)(d\sigma/dx)(e^+e^-\to hX)$，$h=\pi^\pm$，$K^\pm$，$p\bar{p}$，$\sqrt{s}=10.29$ GeV，$x=2E/\sqrt{s}$

(b)　c クォークの破砕関数[1)]．実線は ε をパラメターとしたピーターソン曲線．$\varepsilon=0.135\pm0.010(D^0)$ と $\varepsilon=0.078\pm0.008(D^*)$

実験的には $\varepsilon_c\fallingdotseq0.01\sim0.2$，$\varepsilon_b\fallingdotseq(m_c{}^2/m_b{}^2)\varepsilon_c\fallingdotseq0.005$ が成立している（図 8.13 (b)[17)]）．この関数形は m_Q が大きくなると山が $z\sim1$ 付近に移動し，t クォークの場合（$m_t\gg m_b$）の場合はほとんど $\delta(1-z)$ に近いと考えてよい．

b.　グルーオンの取扱い

グルーオンの取扱いは，クォークとまったく同じとするか[19)]，または分割関数に従い $q\bar{q}$ に分けて後，上記のハドロン化を適用する[20)]．

c.　横運動量 p_T

IF モデルは基本的に縦運動量のみ扱うので，横運動量は独立に発生させる．発生確率は実験経験式から

$$\propto \quad \exp\left(-\frac{p_T{}^2}{2\sigma_q{}^2}\right) \tag{8.30}$$

とする．$\sigma_q\fallingdotseq0.3$ GeV である．この p_T は q' と $\bar{q}'$ との間で局所的に保存するように決める．

d.　香りとスピンの選択

u, d, s, c, b を拾う確率は，データを再現するように，1：1：0.3：0：0 の割合とする．この数は，c, b の重いクォークは最初の反応で直接生成されな

い限りハドロン終状態には現れないことを意味する．スカラーメソン P とベクトルメソン V の統計的な重みは，単純に考えると 1：3 であるが，ベクトルメソンは通常重くて位相体積で損をするので，生成相対確率を $V/(V+P)\sim0.6$ くらいにとる．スピンが 2 以上のテンソル粒子も，確率を適当に割り振って発生させることは可能であるが，通常は無視する．バリオンは 2 個のクォーク対 $qq\bar{q}\bar{q}$ を香りに応じて一定の確率 $(qq/q\sim0.08)$ で真空から拾いだし，無色の qqq または $\bar{q}\bar{q}\bar{q}$ をつくって発生させる．香りとスピンが決まれば，ハドロン化した後の落ち着く先（共鳴または安定ハドロン）は一義的に決まる．共鳴の場合はさらに崩壊させる．

このモデルは，ジェット生成の取扱いを初めて定量化したという点で大きな歴史的意義があり，ジェットの細かい構造を問題にしない限り現在でも有効である．このモデルの欠点は，ローレンツ不変でないこと，$q\bar{q}$ 対が独立に生成されるためエネルギーと運動量が保存しないことなどである．エネルギー運動量の保存は最後に全体の重心系で全体のスケールを調節してから元の系にもどすことで成立させている．またクォークとグルーオンの差がなく，後に述べる紐効果も再現できないので最近はあまり使われないが，基本的な発想は現在でも生きている．

8.2.4 紐モデル[21)]

a. 破砕関数

紐モデル (string fragmentation model ; SF モデル) は，QCD の紐概念を取り入れた点で画期的であるが，モデルの手法からいえば IF の流れを汲むものであり，パートンシャワーモデルとは発想が根本的に異なる．初期には Lund モデルとも呼ばれた．$q\bar{q}$ が $t=x=0$ で発生すると，その後は $m=0$ ならば，ともに $t^2-x^2=0$ の光円錐に沿って移動するが，$q\bar{q}$ の間に距離に比例したポテンシャルエネルギーが $q\bar{q}$ を結ぶ線の間に蓄えられるとする．紐に蓄えられるエネルギーは，$\Phi=\kappa x$ ($\kappa\sim1$ GeV/fm (1fm$=10^{-13}$cm)) である．$q\bar{q}$ は，初期運動量により紐を引き延ばすが，紐の張力により減速され，やがては元にもどるという振動を繰り返す．紐の端にあり右方向に進む有限質量のパートン（質量 m）のエネルギー運動量は，相対論的運動方程式から

$$\kappa x=\sqrt{p_0{}^2+m^2}-\sqrt{p^2+m^2},\qquad \kappa t=p_0-p \tag{8.31}$$

で与えられる．ただし，p_0 は $t=0$ にパートンがもっていた初期運動量である．したがって，軌跡は一般に双曲線である．$m=0$ のときは直線となるが，運動エネルギーがなくなると今度は左方向に進むので，図 8.14 (a) にあるようなジグザグの軌跡（ヨーヨーという）となる．ローレンツブーストすると (b) のようになる．最初の $q\bar{q}$ のエネルギーが大きいと紐に与えられるエネルギーも大きくなり，真空から $q'\bar{q}'$ を物質化して紐をちぎることが可能となる．このとき，クォーク対発生率は，

$$\propto \quad \exp\left(-\frac{\pi m_T{}^2}{\kappa}\right) \tag{8.32 a}$$

$$m_T{}^2=m^2+p_T{}^2 \tag{8.32 b}$$

に比例することが導ける[*2]．m^2 の代わりに $m_T{}^2$ を使うのは，紐が 1 次元の自由度しかないことによる．この形は，エネルギー保存則を満たすためには，$q\bar{q}$ がある一点で発生するのではなく，質量に見合った距離だけ離れて生成されることによるトンネル効果として理解される．モデルでは $q_i'\bar{q}_i'$ を紐の上に端から順に無秩序に，かつ独立に発生させていき，残りの紐のエネルギーが小さくなりすぎてもはやハドロンを生成できなくなるまで続ける．こうしてたくさんのヨーヨー（ハドロン）が発生する（図 8.14 (c)）．

破砕関数は，クォーク対の発生が 1 次元紐の上で一様かつ対称と要求するとほぼ一義的に形が決まり[23]，

$$f(z)=\frac{(1-z)^a}{z}\exp\left(-b\frac{m_T{}^2}{z}\right) \tag{8.33 a}$$

$$z=\frac{(E+p_{/\!/})_M}{(E+p_{/\!/})_q} \tag{8.33 b}$$

という形となる．指標 M は生成メソン，q はクォークを示す．a, b はデータに合わせるべき自由パラメターで，$a\fallingdotseq 1$，$b\fallingdotseq 0.7\ \mathrm{GeV}^{-2}$ 程度である．

この関数はまた重いクォークに対しては $z\sim 1$ の方に重みがかかるように

---

*2)　強い電場があると真空が不安定となり e^+e^- が発生するというよく知られた類似の現象がある．その場合の電子対発生率は，電子質量を m，電場の強さを E として

$$\frac{\alpha E^2}{\pi^2}\exp\left(-\frac{\pi m^2}{eE}\right)$$

に比例する[22]．同様の取扱いを線形ポテンシャルに適用するとこの式が導ける．

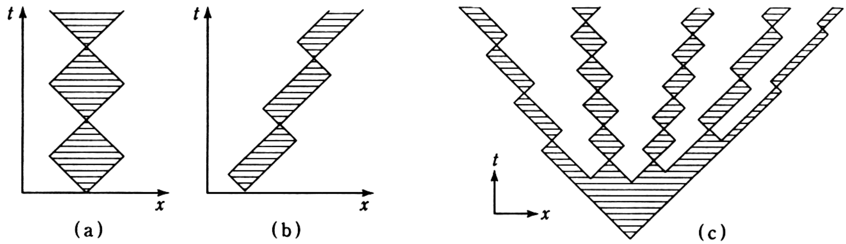


図 8.14 紐モデルの模式図

(a) 紐のエネルギーは小さく，分裂せずに振動を繰り返す．ヨーヨーという．
(b) (a) をローレンツブーストしたもの．
(c) 紐が長くなると，ちぎれてたくさんヨーヨーができる．

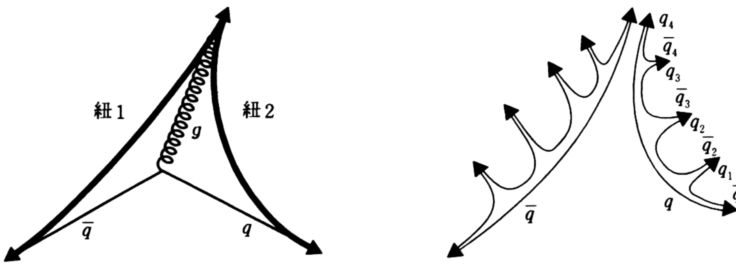


図 8.15 紐モデルではグルーオンは紐のキンク（折れ曲がり）として表される

なっていて，(8.27 b) の形に近い分布が自動的にでるようになっている．

b. グルーオン

グルーオンは紐の中のキンク（折れ曲がり）として扱うので（図 8.15），ハドロンはグルーオンを頂点とする 2 本の紐の上に分布する．このためグルーオン破砕関数の性質は自動的に決まり，余分のパラメターが入る余地はない．ただし，発散を避けるためグルーオンの運動量のある切断値 ($Q_0 \sim 5-10$ GeV) 以下のときは $q\bar{q}$ として扱う．このことによって，クォークとグルーオンの取扱いが非対称となる．独立破砕モデルが，基本的には両者を区別しないのに比べて，際立った違いを見せている．

c. p_T，香り，スピンの分配

トンネル効果により，横運動量はガウス分布 (8.32) に従う．また，重いクォークに対しては自動的に抑圧因子がかかるようになっている．クォークの

質量を代入すると $u:d:s:c \sim 1:1:0.3:10^{-11}$ となり，実験値を再現する（c, b クォーク対が真空から拾い上げられる確率は事実上 0 になる）．IF モデルでは手で入れていた確率分布が，紐モデルの中にははじめから組み込まれている．しかし，データとの一致をよくするために，これらのパラメターを IF モデルと同じように手で入れる場合もある．スピンの入れ方やバリオンの発生は IF モデルと同様に行う．

紐モデルでは，QCD の紐効果とクォークの質量効果が取り入れられており，かつローレンツ不変性，エネルギー運動量の保存が成立しているなど，IF モデルに比べて進歩しているといえる．また，すぐ後に示すようにデータの再現性においても優れている．

8.2.5　ハドロン化モデルのテスト

ハドロン化モデルは，かなり荒っぽい議論に基づいてはいるものの何年にもわたるデータの蓄積と QCD 理論を指導原理とする改良によって精巧なものとなり，非常に広範囲のデータを説明できるようになっている．個々の過程とモデルの比較は後ほど行うとして，モデルのパラメターは，種々の観測量データ（$d\sigma/dx$, $d\sigma/dp_T$，粒子の多重度 n，スラスト，非平面指数（A_P=aplanarity）ほか）の全体構造（global event shape）を再現するように決める．低エネルギーでは PEP の MARKII データ（$\sqrt{s}=29$ GeV）に合わせたパラメター[24]を使っていたが，SLC，LEP のデータ（$\sqrt{s}=91$ GeV）がでてから，低エネルギーでのデータと高エネルギーでのデータの整合性が調べられた[25]．

ハドロン化モデルの検証例としては，ジェット変数 A と T の分布を取り上げる．ハドロン終状態の全体的形状は，事象のジェット構造と n ジェットの相対的な重みによるところが大きく，スラスト T と非平面指数 A_P はハドロンの種々の分布の違いを見分けるのに特に有用である．例えばたくさんのジェットが出て丸くなる事象（$T, A_P \to 0.5$），3ジェットの円盤状になる事象（$T \fallingdotseq 2/3$, $A_P \fallingdotseq 0$），180度正反対方向に出る2ジェット事象（$T=1$, $A=0$）などの特徴が盛り込まれる．図8.16 (a) は，LEPでのOPAL[25]の非平面指数データを，低エネルギーで合わせたパラメターをそのまま使ったモデル計算と比べた

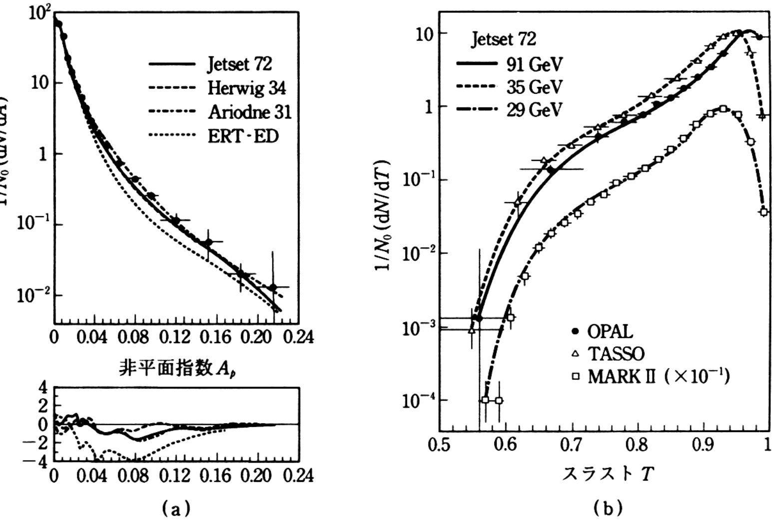


図 8.16 ハドロン化モデルの検証[25)]

(a) aplanarity : 低エネルギーでのパラメターを使ったモデルで，LEP/OPAL データを合わせる．
(b) スラスト : LEP で合わせたパラメターのモデルで，種々のエネルギーデータと比較．

ものである．また，(b) は逆に 91 GeV における OPAL のデータでパラメターを合わせて，どのくらい低エネルギーデータを再現できるかを試みたものである．図はスラストの例を示してある．各種の異なるモデルが，低エネルギーデータと同じく高エネルギーデータをもよく再現することがわかる．ただ，解析的に行列要素を計算してパートンシャワーを経ずにそのままハドロン化させる方法（図 8.16 (a) の ERT）は，A_P の大きいところ（反応平面をはずれたところでの運動量の流れの目安）のデータの再現がうまくできていない．これは，ハドロン化のはじまるエネルギーがパートンシャワーモデルに比べて非常に高く（Z^0 共鳴におけるエネルギー領域では～10 GeV）摂動 QCD 部分に比べモデルの比重が大きくなりすぎるせいと考えられている．

これらの比較からいえることは，ハドロン化モデルのパラメターはエネルギーによらないこと，低エネルギーでの現象と高エネルギー現象の差は QCD パートンシャワーモデルの中の Λ で表した $\alpha_s(Q^2)$ の中にすべて含まれていることを示す．つまり，漸近自由を入れた一つの結合定数で，低エネルギーと高

エネルギーのデータが統一的に説明できることを示す．

ハドロン化モデルがどのくらい精緻に練られているかを試すために，ジェット現象と直接関係はないが，ハドロンスペクトルの再現性を見てみよう．図8.17は，$\sqrt{s}=29$ GeV での $e^+e^- \to$ ハドロン生成におけるハドロンの平均数を見たものである[26]．ハドロンのスペクトルを再現するには相当多くのパラメターの調整を必要とする．例えば，lund（紐）モデルでは，クォーク質量のほかに5個ものパラメターを必要とする．これに引き替えWebberモデルは基本的にはパラメターの数は0である．図8.17を眺めると紐（lund）モデルの再現性が一番よいが，パラメターの数の多さを考えれば当然ではある．しかし，それでもテンソルメソンについてはまったく予言力がない．一方，Webberモデルでは再現性が悪く，やはりパラメター数0では無理があることを示している．しかし全体的に見れば，ハドロン化モデルが基本的には，ジェットの特徴のみならず粒子スペクトルまで含めてかなりよく再現しているというべきであろう．

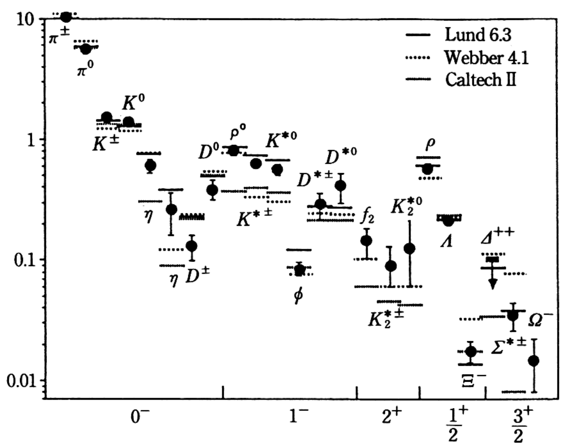


図8.17　1回の e^+e^- 反応で生成される平均ハドロン数[26]
$\sqrt{s}=29$ GeV（データはPEPとPETRAの平均値）
ハドロンスペクトルを再現するためにたくさんのパラメター調整が行われる．紐モデルでは，m_q のほかに≒5個．ただし，2^+ は入っていない．Webberモデルは基本的には0パラメター．

8.3 ジェットの分離

8.3.1 ε, δ の 方 法

パートンはジェットになること，および実験的に 2, 3 ジェット構造が存在することはわかったが，この区分けが常に明瞭にできるとは限らない．Q-プロット上 (図 8.8) では，2 ジェットから 3 ジェットへは連続的に移行していて境界が定かではなく，何を n ジェットと呼ぶかは不定性のある問題である．例えば，2，3 ジェット発生過程は，原理的には図 8.18 のファインマングラフで示した 2，3 個のパートン放出過程として記述できるはずである．しかし，グルーオンのエネルギーが小さいか (ソフトグルーオン)，クォークと平行に放出されると (collinear gluon) 2 ジェットと区別がつかない．ジェットの定量的取扱いを最初に与えたのは，スターマン-ワインバーグ (Sterman-Weinberg) であった[27]．ジェットの識別変数を ε, δ とし，図 8.19 にあるように，2 ジェットのほぼすべてのエネルギー (相対比を $1-\varepsilon$ として $\varepsilon \ll 1$) を包むように半頂角 δ の 2 個の円錐をつくる．e^+e^- 反応でこの円錐の中にすべてのパートンがとらえられる断面積を 2 ジェットの断面積として，$O(\alpha_s)$ の近似 ($q\bar{q}$ $+q\bar{q}g$) で計算すると，ε, $\delta \ll 1$ の極限で

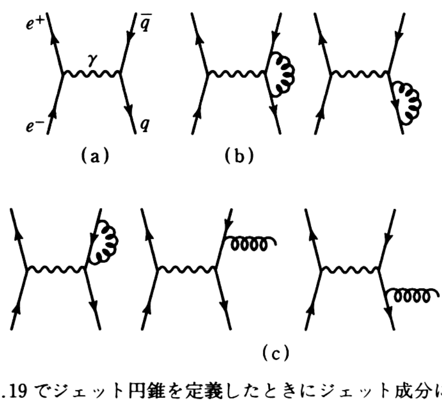


図 8.18 図 8.19 でジェット円錐を定義したときにジェット成分に寄与するファインマングラフ，(c) では実のグルーオンを放出するが，柔らかい (エネルギー小) か，またはジェット軸に平行で半頂角 δ の円錐に入ってしまう部分は，一つのジェットの成分に入る．

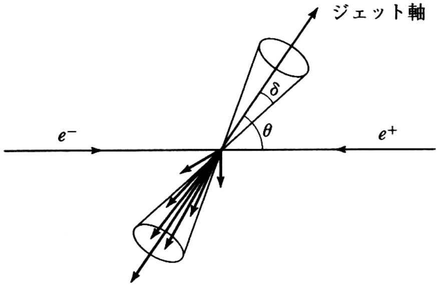


図 8.19　スターマン-ワインバーグの δ, ε によるジェット識別変数
ε＝半頂角 δ の中に入らないエネルギーの相対比.

$$\sigma_{2\text{-jet}}=\sigma_0\left[1+\frac{4\alpha_s}{3\pi}\left(-4\ln\varepsilon\ln\delta^2-3\ln\delta^2-\frac{2\pi^2}{3}+5+O(\varepsilon)+O(\delta)\right)\right] \quad (8.34)$$

$$\sigma_0=\sigma_{\text{TOT}}(e^+e^-\to\gamma\to\text{hadrons})=\frac{4\pi\alpha^2}{3s}N_c\Sigma Q_q{}^2 \quad (8.35)$$

となる．ただし，非常に小さな ε や δ に対しては，(8.34) は負になるのでこの式は使えないことに留意しておく必要がある．これは第 5 章，QCD で述べた赤外発散や質量特異性によるものである．$O(\alpha_s)$ の全断面積は，

$$\sigma=\sigma_0\left(1+\frac{\alpha_s(Q^2)}{\pi}\right) \quad (8.36)$$

であるから，この式と $\sigma_{2\text{jet}}$ との差は $\sigma_{3\text{jet}}$ を与えるはずである．すなわち

$$\sigma_{3\text{-jet}}=\sigma_0\frac{4\alpha_s}{3\pi}\left(4\ln\varepsilon\ln\delta^2+3\ln\delta^2+\frac{2\pi^2}{3}-\frac{17}{4}+O(\varepsilon)+O(\delta)\right) \quad (8.37)$$

(8.34) と (8.37) は，ε と δ を指定すれば，2 ジェットと 3 ジェットの生成断面積が少なくも理論的には定量的に扱えることを示す．ただし，$\sigma_{2\text{-jet}}$ や $\sigma_{3\text{-jet}}$ が実験的に観測される 2 ジェット断面積そのものかどうかは定かではない．実験でテストするときには理論式がハドロン化モデルを通るという不定性がつきまとうからである．今日では，ε, δ の方法はもっぱらハドロン-ハドロン反応において使われる．

8.3.2 y_{cut} の 方 法

第2のそして e^+e^- 反応で主として使われるジェット識別変数 y は，ジェットの不変質量に関連する．パートン i, j が存在するとき，y_{ij} を

$$y_{ij} \equiv \frac{(p_i+p_j)^2}{s} \tag{8.38 a}$$

で定義する．パートン i, j の質量が0であるならば，パートン i, j の不変質量は次の量と同等である．

$$y_{ij} \xrightarrow{m_q \to 0} \frac{2E_iE_j}{s}(1-\cos\theta_{ij}) \tag{8.38 b}$$

$y > y_{\min}$ を要求することにより赤外発散が防げる．全断面積など包含的な測定量は $y_{\min}$ と独立であるが，個々のジェットの発生断面積 $\sigma_{n-\text{jet}}$ などは $y_{\min}$ に依存する．$\sigma_{2\text{jet}}$ は $O(\alpha_s)$ で[28]，

$$\sigma_{2\text{jet}} = \sigma_0\left[1+\frac{2\alpha_s}{3\pi}\left(-2\ln^2 y-3\ln y+4y\ln y-1+\frac{\pi^2}{3}+O(y)\right)\right] \tag{8.39}$$

$O(y)$ の項は数値的には重要でデータとの比較には入れる必要がある．(ε, δ) 処方と同じく，y が小さくなりすぎると (8.39) は負になるので，ある大きさ以上で使用しなければならない．高次の項を正確に考慮すれば発散はないはずであるから，$y \to 0$ での発散を避ける一つの処方箋は，第1，第2の近似項のみをとり指数化してしまうことである．すなわち

$$\sigma = \sigma_0 \exp\left[-\frac{2\alpha_s}{3\pi}(2\ln^2 y+3\ln y)\right] \tag{8.40}$$

とすれば，$y \to 0$ で有限となる．ただし y の大きいところでは無視した項の寄与が大きくなるので，(8.39) の全部の式を使わなければならない．n ジェット生成断面積については，$O(\alpha_s^2)$ まで計算されている[29]．相対的断面積 R_n を $\sigma_{n\text{jet}}/\sigma_{\text{TOT}}$ で定義すれば

$$\begin{aligned} R_2 &= 1 + C_{21}(y_{\min})\alpha_s(Q^2) + C_{22}(y_{\min}, f)\alpha_s^2(Q^2) \\ R_3 &= \quad C_{31}(y_{\min})\alpha_s(Q^2) + C_{32}(y_{\min}, f)\alpha_s^2(Q^2) \\ R_4 &= \quad C_{42}(y_{\min})\alpha_s^2(Q^2) \end{aligned} \tag{8.41}$$

e^+e^- 反応では $Q^2=fs$ ととる．f は繰り込み点のスケールパラメターで，通常は $f=1$ にとる．

実験レベルでのジェットの再構築には JADE グループ[30] の処法がよく使わ

れる．その方法は，まずハドロン i, j から一つの準粒子 (指標 ij) を構成し，運動量変数を

$$p_{ij} = p_i + p_j$$
$$y_{ij} \equiv 2E_iE_j(1-\cos\theta_{ij})/E_{vis}^2 \qquad (8.42)$$

のように組み合わせる．$y_{ij} < y_{\min}$ ならば，一番小さな y_{ijk} を与えるような第 3 のハドロン k をもってきて，$p_{ijk} = (p_i + p_j) + p_k$ をつくり，ij と k の間で，再び式 (8.42) により y_{ijk} をつくる．この作業をすべての準粒子に対して行い，$y > y_{\min}$ になるまで続ける．$y > y_{\min}$ を満たす準粒子 $i, j \cdots k$ の組全体を 1 個のジェットと見なすのである*3)．同じ操作を理論的なパートンについても，$y_{\min}$ の関数として求める．この理論上での $R_{n\text{-parton}}$ と実験的に決めた $R_{n\text{jet}}$ とを比較するには，パートンのハドロン化効果の影響を計算する必要があるが，これは非摂動効果であり，モデルに頼らざるをえない．$\sqrt{s} > 25$ GeV，$y_{\min} > 0.04$ ならば，ハドロン化モデルにあまりよらずに，$R_{n\text{-parton}} \fallingdotseq R_{n\text{jet}}$ であることがモンテカルロにより示されているので，安定した理論と実験の比較ができる．図 8.20 はトリスタン AMY 測定器で得られた n ジェット断面積であり，y_{cut} があまり小さくない限りモンテカルロ計算は実験値をよく再現している[31]．

留意すべきは，R_n は明らかに $y_{\min}$ の関数であるということであり，“n 個のジェット” という言葉の n は最初に述べたように，パラメターにより変わる量で不動の数ではない．また $Q^2 = fs$ のスケールパラメターのとり方によりデータの再現性が微妙に変わる．これは現象的に高次効果をとり入れることに相当する．

---

*3) この方法では，各段階での準粒子のエネルギー運動量は，各ハドロンのエネルギー運動量の和であって保存している．しかし，y 変数をつくるときは，式でわかるように前段階の準粒子の質量は 0 と見なしていて，本来の不変質量 $m^2 = E^2 - p^2$ とは違う．これは理論上はパートンの質量が 0 であるということに合わせたものである．$y_{ij} = 2\,\text{Min}(E_i^2, E_j^2)(1-\cos\theta_{ij})/s$ で定義する場合もある (Durham 計量)．ジェットを構築する過程の各段階で，どのパラメターを保存させるか，どの計量を使用するかの選択肢の中で，実験的に最良結果を与えるのが本文の方法であるが，理論的には Durham の計量を使うのが望ましいとされている[30,33]．

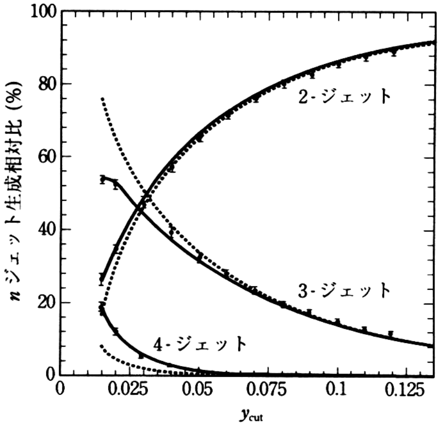


図 8.20　n 個のジェットへの分岐比を $y_{\rm cut}$ の関数としてプロットしたもの[31]
実線は NLLA パートンシャワーモデルで，$Q^2=0.0021s$ とした場合，点線は $Q^2=s$ としたときの値である．

8.4　$\alpha_s(Q^2)$ の決定法

8.4.1　包　含　反　応

α_s または同じことであるが $\Lambda_{\overline{MS}}$ を決めるには，ハドロン化モデルやジェット識別変数に依存しない過程で決めるのが理想的である．このような過程としては包含反応があり，e^+e^- 反応のハドロン生成相対断面積 R や Z 粒子の幅 Γ_Z に対する QCD 補正および深非弾性散乱の Q^2 発展式がある．

a．R, Γ_Z

R, Γ_Z は $O(\alpha_s{}^3)$ の計算ができている[32]．

$$\frac{\delta R_{\rm QCD}}{R}=\frac{\alpha_s}{\pi}+r_2\left(\frac{\alpha_s}{\pi}\right)^2+r_3\left(\frac{\alpha_s}{\pi}\right)^3+O(\alpha_s{}^4) \tag{8.43}$$

$$r_2=1.411, \qquad r_3=-12.8$$

式 (8.43) を使って，35 GeV 領域で実験値に合わせれば[33]

$$\alpha_s(34\ {\rm GeV})=0.146\pm0.03 \tag{8.44 a}$$

$$\Lambda_{\overline{MS}}=223^{+160}_{-109}\ {\rm MeV} \tag{8.44 b}$$

LEP の実験データ（表 7.2 の $R=\Gamma_h/\Gamma_l$）を入れて解けば[31]

$$\alpha_s(m_Z)=0.124\pm0.007 \tag{8.44 c}$$

を得る．

b．R_τ の方法

τ 崩壊のハドロン部分，すなわち，

$$R_\tau=\frac{BR(\tau\to \text{ハドロン}+\nu_\tau)}{BR(\tau\to e\bar{\nu}_e\nu_\tau)}$$

について同様な方法が適用できる[33,34]．これはいまのところ最も低い Q 値 (m_τ) での $\alpha_s(Q)$ を与える．

$$\alpha_s(m_\tau)=0.373\pm0.010(\text{exp})^{+0.041}_{-0.031}(\text{theory}) \tag{8.45}$$

上の方法は，理論的には最も不定性のない値が得られる方法であるが，残念なことにこれらは主過程が電弱相互作用であり，QCD 効果は補正としてのみ入るので（$\delta R/R$, $\delta\Gamma_z/\Gamma_z$ はともに～5%程度）実験的に精密に決めるのは容易でない．

c．深非弾性散乱

深非弾性散乱を使って $\Lambda_{\overline{MS}}$ を決める方法（QCD§5.6）は，最初のそして現在も最も正確な方法の一つである．この過程は，包含反応でありクォークやグルーオンのハドロン化に伴う不定性を含まないことは，e^+e^- 反応の R 値と事情が似ている．しかし，R 値における QCD 効果は主要寄与に対する補正であり実験的に小さい量を扱うのに対し，ここでは構造関数の Q^2 発展を直接見ている．さらに深非弾性散乱では x をパラメターとし，原理的には無限個の一連の構造関数の総合テストとなっていることにも留意しよう．ただし，ツイスト項（$1/Q^2$ に比例する項）の不定性などは存在するので，理論的明快さという点では一歩ゆずる．最近のミューオンとニュートリノデータを使い，まとめた総合的解析の結果を $\mu=m_Z$ に外挿すると[17]

$$\alpha_s(M_Z)=0.117\pm0.002(\text{exp})\pm0.004(\text{scale}) \tag{8.46 a}$$

$$\Lambda_{\overline{MS}}(4)=305\pm25\pm50\ \text{MeV} \tag{8.46 b}$$

となっている．なお，深非弾性散乱で求めた $\Lambda_{\overline{MS}}=\Lambda_{\overline{MS}}(4)$ であるので，e^+e^- 反応や，ハドロンコライダーの $\mu^2\sim s$ の大きいところで求める $\Lambda=\Lambda_{\overline{MS}}(5)$ と比較するときは，(5.51) によって変換しなければならない．

8.4.2　ジェットのトポロジーから決める方法

包含反応で決める方法は，理論的曖昧さがなく原理的に優れているといえるが，実験的観点からは，個々のジェット現象やその特徴を表すパラメターから決める方が有利なことも多い．また，個々の現象の再現性や，それらが共通の α_s を与えるかどうかのチェックも必要である．ジェットのさまざまの性質を表す形態変数 (shape variable) としては，ジェット多重度，平均ジェット質量，スラスト，エネルギー相関[35]，3点エネルギー相関 (planer triple-energy correlation[36]) などがあるが，ここでは二つの例をあげるに止める．これらの量を表す理論式は，$e\bar{e}\to q\bar{q}g$ の断面積の式 (5.65) を適当に変数変換して得られる．

a.　n ジェット

n ジェットの式の形は (8.41) で与えた．実験との比較は行列要素の方法とパートンシャワーの方法いずれも可能であるが，パートンシャワーの方法では，$\Lambda_{\overline{MS}}$ を入力としてシャワーを発生させるので $\Lambda_{\overline{MS}}$ が直接求められる．それから，式 (5.45) を使って α_s が計算できる．次の値は，ヴィーナスのデータを使って決めた $\Lambda_{\overline{MS}}$ と α_s である[37]．

$$\alpha_s(58.5\,\mathrm{GeV})=0.132^{+0.003}_{-0.002}(\mathrm{stat})^{+0.005}_{-0.004}(\mathrm{sys}) \tag{8.47 a}$$

$$\Lambda_{\overline{MS}}(5)=320\pm36(\mathrm{stat})^{+65}_{-58}(\mathrm{sys}) \tag{8.47 b}$$

b.　エネルギー相関[35]

e^+e^- 反応でのハドロン生成物を互いに角度で β だけ離れた2個のカロリメターで同時測定する場合 (図8.21) の相関量を，実験的に

$$\mathrm{EEC}(\chi)=\frac{1}{N_{\mathrm{ev}}}\sum_{\mathrm{ev}}\sum_{i,j}\sum x_i x_j\frac{1}{\Delta}\int_{\chi-\Delta/2}^{\chi+\Delta/2}\mathrm{d}\chi_{ij}\delta(\chi_{ij}-\chi) \tag{8.48}$$

$$\chi=\cos\beta,\qquad x_i=E_i/E_{CM}$$

$$\mathrm{AEEC}(\chi)=\mathrm{EEC}(\pi-\chi)-\mathrm{EEC}(\chi) \tag{8.49}$$

で定義する．Δ は測定器のもつ χ の幅である．i,j は一つの事象中の粒子番号であり，EECの計算にはすべての事象 (event) の和をとる．EECはEnergy-Energy Corelation, AEEC は Asymmetry of EEC の略である．理論的には

$$\frac{1}{\sigma}\frac{\mathrm{d}\Sigma_C{}^{\mathrm{EEC}}}{\mathrm{d}\chi}=\frac{1}{\sigma}\sum_{ij}\int\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}x_i\mathrm{d}x_j\mathrm{d}\chi}x_i x_j\mathrm{d}x_i\mathrm{d}x_j \tag{8.50 a}$$

$$\frac{1}{\sigma}\int d\chi \frac{d\Sigma_C}{d\chi}=1 \tag{8.50 b}$$

を計算して得られる．実験的にはたいていの場合，θ（測定器を置いた地点のビーム軸に対する角度）で積分した平均の EEC をだすので，上式を θ で積分すると，相関関数は

$$\frac{1}{\sigma}\frac{d\Sigma_C^{EEC}}{d\chi}=\frac{\alpha_s(Q^2)}{\pi}F(\xi), \qquad \xi=(1-\chi)/2 \tag{8.51 a}$$

$$F(\xi)=\frac{3-2\xi}{6\xi^5(1-\xi)}[2(3-6\xi+2\xi^2)+\ln(1-\xi)+3\xi(2-3\xi)] \tag{8.51 b}$$

で与えられる．

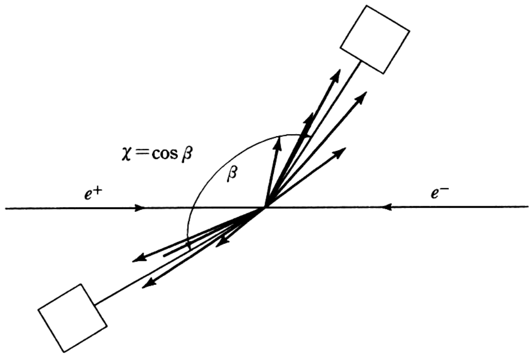


図 8.21　エネルギー相関を測る．EEC，AEEC 測定

2 ジェット配位の場合，ハドロンは主として 180 度方向にたくさん放出されるから，2 粒子は $\beta=0$, π の方向すなわち $\xi=0, 1$ のところに集中する．式 (8.51) が $\xi=0, 1$ に特異点をもつのはそれを反映している．ソフトグルーオン放出もまたほぼ対称と考えられるが，ハードグルーオン放出の 3 ジェットのときは中間の $0<\beta<\pi$ のところで相関が強くなる．したがって，AEEC は，2 ジェットおよびソフトグルーオン放出に起因する相関を相殺するようになっているので，3 ジェットに起因する効果が直接表面にでてくる．EEC，AEEC は

(1)　破砕機構にあまり依らない，つまりモデルに独立．

(2)　赤外発散がない．先に議論した R_n は解析的には赤外発散はないが，摂動の固定次で考えると存在する．ジェット変数 $y_{\min}$ を有限にとるな

どして赤外発散を防いでいる．EEC は本質的に赤外発散を含まず，ジェット変数のとり方によらない．

(3)　ジェット軸の知識を必要としない．

(4)　摂動計算の収束が早く，$O(\alpha_s^2)$ の補正に対して安定．PETRAのエネルギー領域で，EEC では $O(\alpha_s^2)$ の補正が ≒35%，AEEC では ~12%．

(5)　堅い過程であり，パートンシャワー手法が必ずしも信用できるとは限らない過程である．

などの理由から，行列要素での手法で α_s を決めるのに最適の現象として注目されていた．特に高エネルギーでのデータは信用できるものと思われる．理

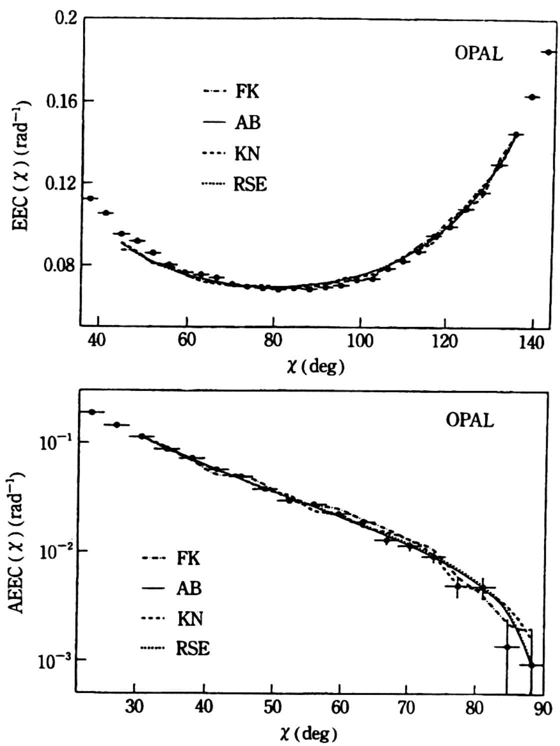


図 8.22　EEC (a)，AEEC (b) データと各種行列要素計算値との比較[38]
比較はパートンレベル（本文参照）．FK, AB, … は各種の理論計算値である．

由として，α_sが小さくなり集束がさらによいこと，ハドロン化モデルによる変動が少ないことがあげられる．OPAL グループ[38]は，測定器で観測されるデータをパートンレベルに引きもどして，解析的な理論値[39]と比較した（図8.22)．MCはモンテカルロシミュレーションを意味する．その結果

$$\alpha_s(M_Z)=0.131\pm0.006\pm0.007 \qquad \text{EEC} \tag{8.52 a}$$

$$\alpha_s(M_Z)=0.117^{+0.007+0.006}_{-0.009-0.002} \qquad \text{AEEC} \tag{8.52 b}$$

$$\Lambda_{\overline{MS}}=438\pm109(\text{exp})^{+150}_{-114}(\text{theor}) \qquad \text{EEC} \tag{8.53 a}$$

$$=211\pm92^{+75}_{-20} \qquad \text{AEEC} \tag{8.53 b}$$

を得た．摂動の高次効果（$O(\alpha_s^2)$）はEECの方が大きいと見積もられているので，EECから得られたα_sがAEECデータに比べ高い値を示すのは，この事

表 8.1　種々の反応から決めたQCD結合定数 $\alpha_s(Q)$[33]

反応の種類	Q(GeV)	$\alpha_s(Q)$	$\alpha_s(m_Z)$
R_τ*	1.777	$0.373^{+0.042}_{-0.033}$	0.125 ± 0.004
$p\bar{p}$, $pp\to\gamma+X$	4.0	$0.206^{+0.045}_{-0.032}$	$0.112^{+0.012}_{-0.010}$
格子ゲージ理論*	5.0	0.203 ± 0.010	0.115 ± 0.003
深非弾性散乱	7.1	0.177 ± 0.011	0.113 ± 0.005
J/ψ, Υ	10.0	$0.167^{+0.015}_{-0.011}$	$0.113^{+0.007}_{-0.005}$
$e\bar{e}$ 反応	10.53	0.165 ± 0.018	0.113 ± 0.006
$p\bar{p}\to b\bar{b}$＋ジェット	20.0	$0.138^{+0.028}_{-0.019}$	$0.109^{+0.016}_{-0.012}$
R_γ	31.6	0.163 ± 0.022	0.133 ± 0.015
$e\bar{e}$ 反応	34.0	0.140 ± 0.020	0.119 ± 0.015
$e\bar{e}$ 反応	58.0	0.131 ± 0.006	0.122 ± 0.005
$p\bar{p}\to W$＋ジェット	80.6	0.123 ± 0.025	0.121 ± 0.024
R_Z	91.2	0.126 ± 0.007	0.126 ± 0.007
$Z\to$ハドロン	91.2	0.122 ± 0.006	0.122 ± 0.006
世界平均（＊）	91.2		0.1180 ± 0.0045

世界平均（＊）をつくる上で，＊をつけた2処方は除いた．表8.1の全部を使うと$\alpha_s(m_Z)=0.1183\pm0.0025$を与える．理由は，$R_\tau$処方の理論的取扱いが，この時点では決着していなかったこと，格子ゲージ理論値に関しては歴史的に値が変動していたことによる．除外しても中心値は変わらず誤差が大きくなるのみである．

実を反映しているものと考えられる．その意味で AEEC によって求めた α_s の方がより真実に近いと考えられる．

8.4.3 漸近自由のテスト

表 8.1 に，種々の過程から導かれた α_s および $\Lambda_{\overline{MS}}(5)$ を比較する[33]．$Q=m_Z$ に外挿した $\alpha_s(m_Z)$ をも与え，比較が容易にできるようにした．図 8.23 には現時点での最新のデータによる値をまとめた[17]．明らかに，低エネルギーから外挿した $\alpha_s(m_Z)$ と，$Q=m_Z$ での $\alpha_s(m_Z)$ の値は同一と見てよいこと，したがって QCD は唯一の結合定数で記述されることが示されたといってよいであろう．図 8.24 は $\alpha_s(Q)$ の値を Q の関数としてプロットしたもので[33]，漸近自由から要求されるように，α_s が Q の関数として減少している様子が明瞭に見てとれる．

漸近自由の証拠は，ほかには (1) 深非弾性散乱のパートン分布関数のスケール発展，(2) ハドロン化生成モデルが漸近自由を取り入れた単独の結合定数 α_s で，低高エネルギーのデータを統一的に説明するなどの事実があり，ここ

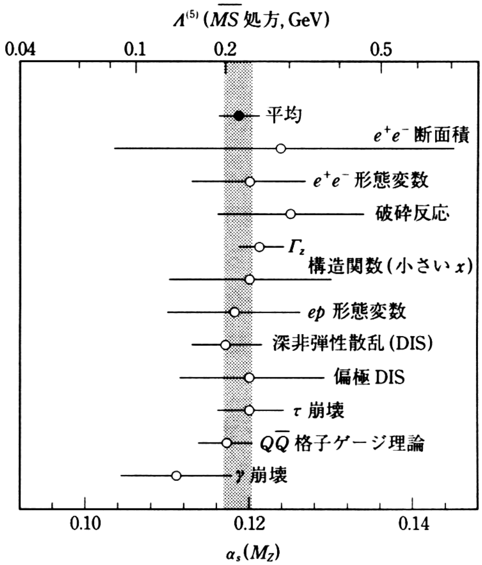


図 8.23 種々の過程より決めた QCD 結合定数を M_Z に外挿した値
上欄には対応する $\Lambda_{\overline{MS}}(5)$ を示してある[17,33]．

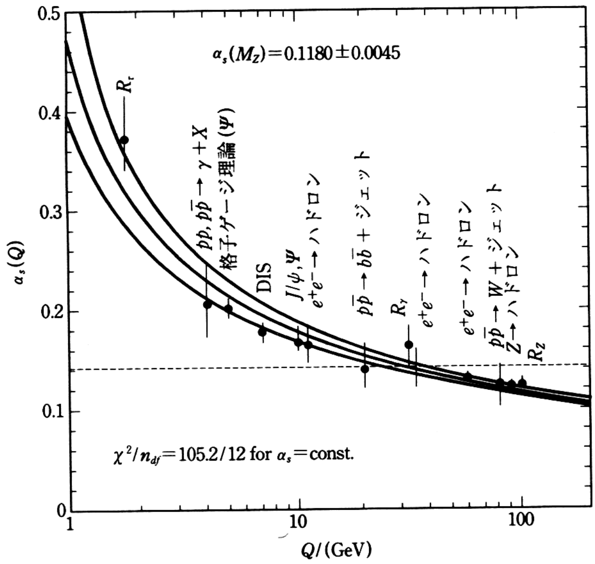


図 8.24　有効結合定数 $\alpha_s(Q)$[33)]
Q の関数として結合定数の値が変化する.

での異種反応での $\alpha_s(Q)$ の直接比較における証拠を含めて，いまや確固たる実験基盤に支えられているといってよいであろう.

結局，エネルギーの異なる領域での，すべての QCD データは，$Q=m_Z$ を標準にとったとき，α_s のただ一つの値で代表させることができることがわかった．ここでは PDG[17)] の引用している値を掲げておく

$$\alpha_s(m_Z)=0.119\pm0.002 \tag{8.54 a}$$

$$\Lambda_{\overline{MS}}(5)=219^{+25}_{-23}\,\mathrm{MeV} \tag{8.54 b}$$

8.5　グルーオンの性質

8.5.1　ス　ピ　ン

QCD でのゲージ粒子としての位置づけからすれば，グルーオンスピンは 1 でなければならない．実験的には，グルーオンスピンは $q\bar{q}g$ 重心系における

ダリツ図から求められる[40]．スピンが1の場合のグルーオン放出断面積は，すでに第5章QCDで求めた（式(5.65)）．

$$\frac{1}{\sigma_0}\frac{\mathrm{d}^2\sigma}{\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2}=\frac{2\alpha_s}{3\pi}\left[\frac{{x_1}^2+{x_2}^2}{(1-x_1)(1-x_2)}\right] \tag{8.55}$$

$$x_i=2E_i/Q$$

一方，同じ計算をスピン0のグルーオンに対して行うと，相対断面積は次式で与えられる[41]．

$$\frac{1}{\sigma_0}\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2}=\frac{2\,\bar{\alpha}_s}{3\pi}\left[\frac{{x_3}^2}{(1-x_1)(1-x_2)}\right] \tag{8.56}$$

$\bar{\alpha}_s$ はスカラーグルーオンの有効結合定数である．$\bar{\alpha}_s$ は参照すべき他の過程がなく任意の値をとれるから，比較には規格化された分布を使用しなければならない．図8.25 (a) を参照すれば

$$x_1+x_2+x_3=2$$

$$x_i=\frac{2\sin\theta_i}{\sin\theta_1+\sin\theta_2+\sin\theta_3}\quad \text{for } m_q,\ m_g=0 \tag{8.57}$$

が成立するが，エリス-カーリナー(Ellis-Karliner[42])の処方に従ってパートン2,3の重心系に移り，E-K 角 $\hat{\theta}$ を図8.25 (b) のように定義すると

$$\cos\hat{\theta}=\frac{x_2-x_3}{x_1}=\frac{\sin\theta_2-\sin\theta_3}{\sin\theta_1} \tag{8.58}$$

となる．図8.26に，TASSOグループの $(1/\sigma_0)\mathrm{d}\sigma/\mathrm{d}\cos\hat{\theta}$ データと理論予想値の比較がしてあるが，明らかにスピン1の方によく合う[43]．

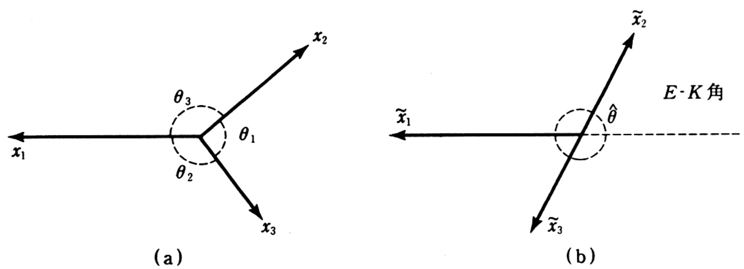


図 8.25　グルーオンスピンを決めるための運動学変数
(a)　重心系での $q\bar{q}g$ の運動学変数
(b)　パートン2,3の重心系へ移り，エネルギー $\tilde{x}_i$ と Ellis-Karliner 角 $\hat{\theta}$ を定義する．

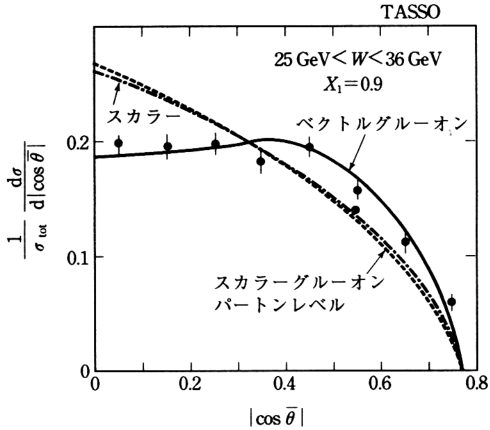


図 8.26　グルーオンスピンの決定[43)]
$x_1<0.9$ の領域で E-K 角 $\hat{\theta}$ の関数としてパートン分布をプロットする．
———ベクトルグルーオン式
- - - - スカラーグルーオン式

8.5.2　ソフトグルーオンと干渉効果

グルーオンに限らず質量 0 の粒子の放出確率は dz/z に比例する．グルーオンの場合はエネルギーの小さいハドロンの大量放出となるが，カラー干渉効果という非アーベルゲージ理論特有の現象がある．ここでは，この干渉効果が具体的にどのような形で現象として現れるか，二つの例で QCD 行列計算との直接比較を行ってみよう．比較にあたってはハドロン化モデルの影響を排除するため，パートンレベルの計算を直接ハドロン終状態と比較する．すなわち，実際に観測されるハドロンの終状態は，パートンレベルの計算結果に直接比例するという LPHD 近似（local parton-hadron duality）を採用する．グルーオンの横運動量を p_T とすると，$k_T \geq p_T$ のグルーオン放出確率 W は $\sim\alpha_s\ln^2\left(\frac{p_T^2}{Q^2}\right)$ に比例する（(5.74 a) 参照）ので，$W\sim1$ になるような小さな p_T では摂動計算が破たんする．しかし p_T が十分小さい場合は n グルーオン放出の和が計算できるので，主要な干渉効果を取り入れたある種の対数近似計算ができる（MLLA : modified leading log approximation）[44,45)]．MLLA 近似

での干渉効果は，パートンシャワーモデルを通したときの角整列効果と同等である．

a．紐効果

まず3ジェットという配位が固定されたときの第4のジェット（第2のグルーオン）の分布を調べてみよう．計算によれば3個のパートンがつくる平面上に投影した第2のグルーオンの極角 ϕ の分布は[45]，

$$W(\phi)=(2C_F-N_c)\cos\theta_{12}F(\phi_1,\phi_2)+N_c(\cos\theta_{13}+\cos\theta_{23})F(\phi_1,\phi_3) \tag{8.59}$$

$$F(\alpha,\beta)=\frac{2}{\cos\alpha-\cos\beta}\left(\frac{\pi-\alpha}{\sin\alpha}-\frac{\pi-\beta}{\sin\beta}\right) \tag{8.60}$$

ここに θ_{ij} はパートン i と j の間の角であり，ϕ_i はパートン i より測ったグルーオンの極角である．$C_F=4/3$ はQCDのカラー因子，$N_c\,(=3)$ はカラーの数であるから，QED などアーベルゲージ理論の角分布は $N_c=0$ とおいて得られる．図8.27 (a) には，TPC のデータ[46]と上の式による放出頻度 $(\ln[(dn/d\phi)/N])$ を極座標表示で示した．図からわかるように，QED でのフォトン放出分布（ダッシュ線）と違い，堅いグルーオン（パートン3）と正反対の方向には，ソフトグルーオン放出が著しく少なくなっている．すなわち，柔らかいグ

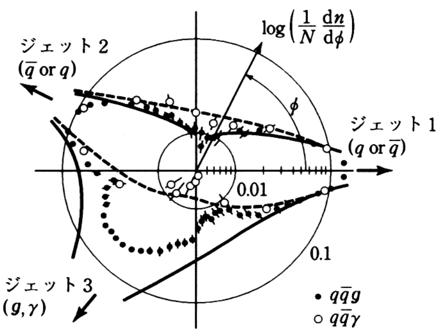
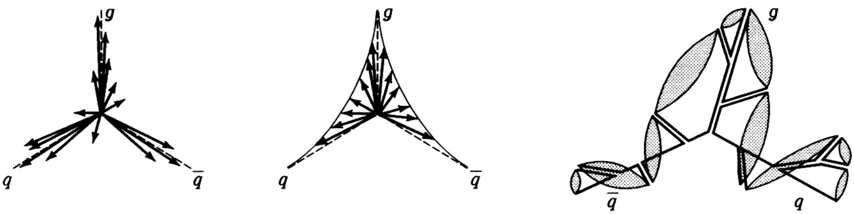


図 8.27 グルーオン干渉による紐効果
$(1/N)(dn/d\phi)$ を ϕ の関数として極座標で描く．グルーオンと反対方向のハドロン放出が抑えられている．
直線とダッシュ線は $q\bar{q}g$(QCD) と $q\bar{q}\gamma$(QED) の理論曲線[45]
データは TPC[46] による（● $q\bar{q}g$，○ $q\bar{q}\gamma$）．
三つのジェットは，エネルギーの高い順にかつ反時計まわりになるように配置して，ϕ をジェット1からの角とする．ジェット3をグルーオンと見立てる．

ルーオンは堅いグルーオンに引きずられるのである．これがソフトグルーオンの干渉による紐効果であり，QCDの非アーベルゲージ理論の性質に根ざすものである．

なお，このデータを含め3ジェット現象における粒子の角分布結果[47]を，各種モデルについて比較した結果，独立破砕モデルまたは干渉効果を入れないパートンシャワーモデルは，紐の効果を再現できずデータと合わないことがはっきりした．紐モデルや角整列効果の入っているパートンシャワーモデルでは紐効果を再現する．これらについて，なぜ紐効果が現れるかの理由を図8.28に模式的に表した．紐モデルとシャワーモデルは発想が根本的に違うのに同じような効果を再現することは興味深い．



（a）独立破砕モデル　（b）紐モデル　（c）パートンシャワーモデル

図8.28　紐効果の模式図

(a)　独立破砕モデルではどのジェットも同様である．
(b)　紐モデルではグルーオンは紐のキンクである．紐に沿ってハドロンができるので，キンクの反対側は少ない．
(c)　パートンシャワーモデルではグルーオンが二重のカラーをもつので，グルーオンと q または $\bar{q}$ の間に中性のカラーの組み合わせができやすい．

b.　多重ハドロンの運動量分布

角整列という形で干渉効果を取り入れる場合，後に放出されるグルーオンほど放出角が小さくなる（図8.11参照）．このことは，低運動量パートンの放出が抑圧されること，したがってLPHD近似により低エネルギーハドロンが抑圧されることを意味する．このことから $\xi \equiv \ln(1/x)$, $x = E_{\rm had}/\sqrt{s}$ の関数として，ハドロンのエネルギースペクトルに山が生じることが予言される．MLLA近似の計算によれば[48]，

$$\frac{1}{\sigma}\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\xi}=\frac{4N_c}{b}\Gamma(B)K(Y)\times\int_{a_0-i\pi/2}^{a_0+i\pi/2}\frac{\mathrm{d}\tau}{\pi}e^{-B\alpha}\left[\frac{C(\alpha,\xi,Y)}{(4N_c/b)Y\alpha/\sinh\alpha}\right]^{B/2}$$
$$\times J_B(\sqrt{D(\alpha,\xi,Y)}) \tag{8.61 a}$$

$$\sqrt{D(\alpha,\xi,Y)}=\frac{16N_c}{b}Y\frac{\alpha}{\sinh\alpha}C(\alpha,\xi,Y) \tag{8.61 b}$$

$$C(\alpha,\xi,Y)=\cosh\alpha+\left[\frac{2\xi}{Y}-1\right]\sinh\alpha \tag{8.61 c}$$

$$Y=\ln(E_{CM}/2\Lambda_{eff}) \tag{8.62}$$

$$b=(11N_c-2N_f)/3 \tag{8.63 a}$$

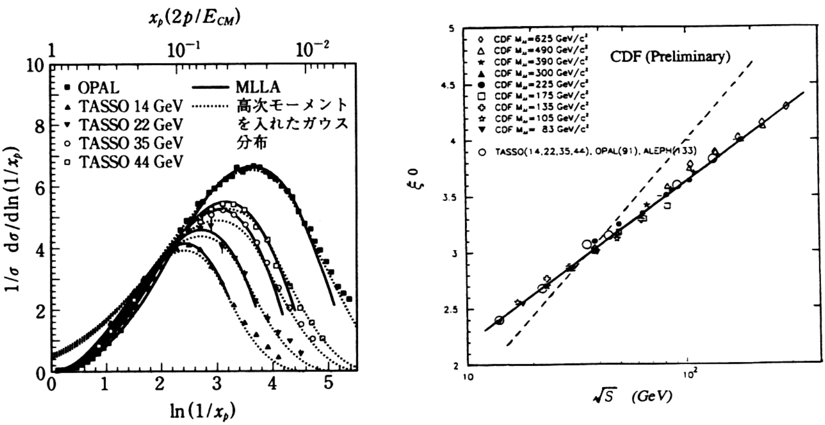
$$B=(11N_c+2N_f/N_c^2)/3b \tag{8.63 b}$$

$$\alpha=a_0+i\tau \tag{8.63 c}$$

a_0 は,

$$\tanh a_0=1-2\xi/Y \tag{8.63 d}$$

によって決められる. J_B は B 次の修正ベッセル関数である. この公式では, パートンの発展とハドロン化は因数として積の形で取り出してある. パート



(a) (b)

図 8.29 QCD 干渉効果 (MLLA 近似計算)[49]

(a) $\xi=\ln(1/x_p)$, $x_p=2P/E_{CM}$ の関数として ξ の大きいところが抑圧され山形のスペクトルとなる.

(b) 山の頂上値 $\xi=\xi^0$ のエネルギー依存性
直線は, $\xi^0=0.5\,Y+\sqrt{0.292\,Y}-0.292$, $Y=\ln(E_{CM}/2\Lambda_{\mathrm{eff}})$, $\Lambda_{\mathrm{eff}}=234$ MeV, ダッシュ線は, パートンシャワーモデルで干渉効果を入れず位相体積のみ考慮した線. CDF データは $\sqrt{s}=M_{jj}\theta$ としている.

ンのハドロンへの変化はすべて $K(Y)$ という全体の規格因子に集約されている．LPHD によって $K(Y)$ は Y のみの関数と考える．上記方程式は全体の規格化因子 $K(Y)$ 以外は，$\Lambda_{\rm eff}$（ハドロン種$=\pi/K/p$ などにより異なる～200 MeV 程度の定数）をパラメターとして含むのみである．十分大きい E_{CM} でかつ山の頂上（$\xi=\xi_0$）付近では，上式はほぼガウス関数形をとる．

$$\frac{1}{\sigma}\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\xi}\fallingdotseq N(Y)\left(\frac{c_1}{\pi Y^{3/2}}\right)^{1/2}\exp\left[\frac{-c_1(\xi-\xi^0)^2}{Y^{3/2}}\right] \tag{8.64 a}$$

$$\xi^0=0.5\,Y+c_2Y^{1/2}+O(1)\ \text{程度の定数} \tag{8.64 b}$$

$$c_1=(36N_c/b)^{1/2}, \qquad c_2=B(b/16N_c)^{1/2} \tag{8.64 c}$$

図 8.29 (a) に $e\bar{e}$ 反応のハドロンの運動量分布を，図 8.29 (b) にはハドロン反応におけるジェット分布の頂上値 ξ_0 のエネルギー依存性を，データ[49]と MLLA 計算と比較して載せる[33]．ハドロンデータについては，$\sqrt{s}=M_{jj}\theta$（θ はジェットサイズを決めるコーンの大きさ）とした．MLLA は基本的に 2 個のパラメター（$K(Y)$ と $\Lambda_{\rm eff}$）しか含まない近似式であるが，ジェット生成法の違いやエネルギーに関係なくジェット内，ジェット間の粒子分布をよく再現する．またデータが LPHD 近似の妥当性を保証していることもわかる．MLLA/LPHD 近似の代わりにハドロン化モデルを使ってハドロンスペクトルをシミュレーションした場合は，角整列を考慮したパートンシャワーモデルが細部に到るまでよくデータを再現する．

8.5.3 グルーオンの自己結合

QCD の非アーベルゲージ理論としての性格は，漸近自由やカラーの閉じ込めあるいは上の紐効果などからすでに証明されていると考えてよいが，グルーオンが自己結合作用をもつことを直接証明できればより一層明らかとなるであろう．QCD の最低次の過程では $\alpha_s(\mathrm{QED})=C_F\alpha_s(\mathrm{QCD})$（$C_F=4/3$）とおけば，アーベルゲージ理論と非アーベルゲージ理論との区別はつかない．非アーベルゲージ理論としての効果は高次過程つまり 4 ジェットの生成反応ではじめて現れる．最終状態が 4 個のパートンであるような過程は，図 8.30 に示されるように仮想グルーオンが 2 個のグルーオンを放出する寄与（図 8.30 (a)）を含む．グルーオンスピンを考慮したときの DGLAP 方程式の分割関数 $P_{gg\leftarrow g}$，

$P_{qq\leftarrow g}$ は次式で与えられる[50].

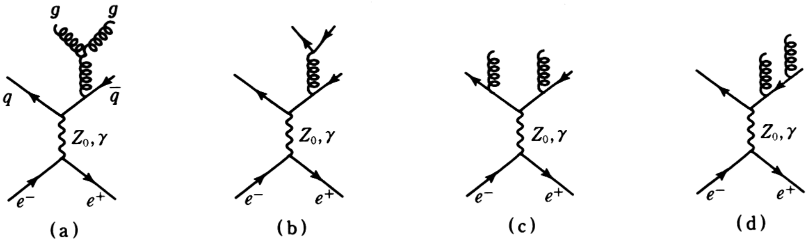


図 8.30 4ジェットトポロジーに寄与するファインマン図
(a) が QCD 特有のグルーオン自己結合作用

$$P_{gg\leftarrow g}(z,\chi)=\frac{6}{2\pi}\left[\frac{(1-z+z^2)^2}{z(1-z)}+z(1-z)\cos\chi\right] \tag{8.65 a}$$

$$P_{qq\leftarrow g}(z,\chi)=\frac{n_f}{2\pi}\left[\frac{z^2+(1-z)^2}{2}-z(1-z)\cos\chi\right] \tag{8.65 b}$$

n_f は香りの数，z は放出されたパートンの相対運動量であり，χ は仮想グルーオンの線偏光ベクトルと gg または $q\bar{q}$ のつくる平面との間の角である．式 (8.65a) は $z\sim0$ および1で発散するのに反し，(8.65b) はそのような特異な振る舞いはないので，この特徴を引き出せるような観測量を考えればよい．仮想グルーオンの線偏光ベクトルはグルーオンを放出する最初の $q\bar{q}$ と仮想 g のつくる平面内にあるから（パリティ保存より振幅は$\sim(\varepsilon_g\cdot p_q-p_{\bar{q}})$），$q\bar{q}$ のつくる平面と gg のつくる平面の間の角が χ となる．実験的には (1) きれいな4ジェットのサンプルを取り出すこと，(2) q と g のつくるジェットを区別することがポイントとなる．(1) の条件を満たすには重心系のエネルギーが十分高い必要がある．(2) の条件は4個のジェットをエネルギーの高い順から 1, 2, 3, 4 と名づけ，1, 2 をクォーク，3, 4 をグルーオンと見なすことにより対応する．PEP, PETRA ではエネルギーが低すぎて効果が見えず，最初のグルーオン自己結合存在の証拠はトリスタンで得られた[51]．ここでは LEP のデータをみてみよう．4個のジェットには，$y>y_{\min}=0.01$ という条件を課してつくる．このとき図 8.30 (b) の寄与はアーベル理論では 31.4% もあるが QCD では 4.7% となる[52]．使った変数は，図 8.31 (a), (b) で示されているような θ_{BZ} と $\theta_{NR}{}^*$ で

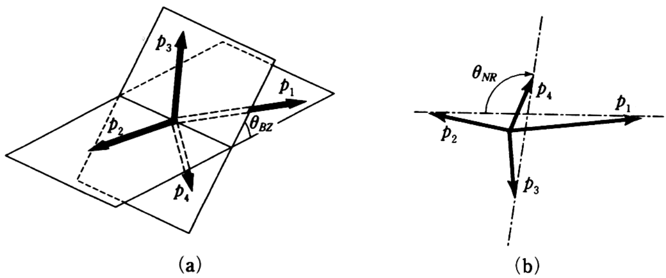


図 8.31　グルーオン自己相互作用の存在テストのための角度変数 (a) θ_{BZ}, (b) θ_{NR} の定義．4本のジェットについて $E_1>E_2>E_3>E_4$ とする．

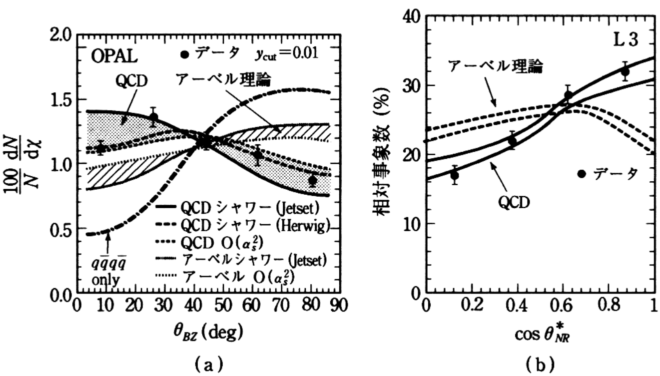


図 8.32　グルーオン自己結合の証拠データ
(a) θ_{BZ} 分布/OPAL データ[54]，(b) θ_{NR} 分布/L3 データ[55]

$$\cos\theta_{BZ}=\frac{(\boldsymbol{p}_1\times\boldsymbol{p}_2)\cdot(\boldsymbol{p}_3\times\boldsymbol{p}_4)}{|\boldsymbol{p}_1\times\boldsymbol{p}_2|\quad|\boldsymbol{p}_3\times\boldsymbol{p}_4|} \tag{8.66 a}$$

$$\cos\theta_{NR}{}^*=\frac{(\boldsymbol{p}_1-\boldsymbol{p}_2)\cdot(\boldsymbol{p}_3-\boldsymbol{p}_4)}{|\boldsymbol{p}_1-\boldsymbol{p}_2||\boldsymbol{p}_3-\boldsymbol{p}_4|} \tag{8.66 b}$$

と定義される[53]．図 8.32 に OPAL[54] と L3[55] の結果を示すが，データは明瞭にアーベル理論を否定している．

ここで，ゲージ群を $SU(3)$ に限定せず，一般的に群のパラメターを使って図 8.30 の各グラフの寄与を表すと

$$\text{図 8.30 (a) の寄与} \qquad \propto \quad C_A\sigma_A \tag{8.67 a}$$

図 8.30 (b) の寄与 $\propto \quad T_R \cdot n_f \cdot \sigma_B + (C_F - C_A/2)\sigma_C$ (8.67 b)

図 8.30 (c), (d) の寄与 $\propto \quad C_F \cdot \sigma_D + (C_F - C_A/2)\sigma_E$ (8.67 c)

と書き表すことができる．$\sigma_A \sim \sigma_E$ は各群に共通な量である．各カラー因子は

$C_A = N_c$: $g \longrightarrow gg$ の結合定数（の自乗平均）

C_F : $q \longrightarrow gq$ の結合定数（の自乗平均）

T_R : $g \longrightarrow q\bar{q}$ の結合定数（の自乗平均）

であり，表 8.1 のような値をもつ．したがって，原理的には $SU(N)$ の N を決めることができる．これを図示したのが図 8.33 である[33]．$SU(3)$ とは矛盾せず，しかも相当数の群を除外できることがわかる．

表 8.2 ゲージ群のカラー因子

	C_F	C_A	T_R	C_A/C_F $g \to gg$	T_R/C_F $g \to q\bar{q}$
$SU(N)$	$\frac{1}{2}\left(N - \frac{1}{N}\right)$	N	1/2		
QCD	4/3	3	1/2	2.25	0.375
アーベル群	1	0	3	0	3
LEP				2.21±0.19	0.33±0.11

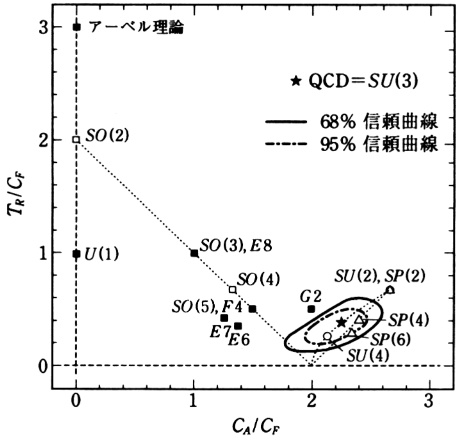


図 8.33 グルーオンの自己結合の証拠
各種ゲージ群の N_C/C_F と T_R/C_F の比較．データは $SU(3)$ と合う[33]．

8.5.4　クォークジェットとの違い

グルーオンはクォークより大きなカラー電荷をもつので，相互作用が大きく，シャワーもクォークよりは起こしやすいであろう．このことから直ちに，グルーオンジェットは同じエネルギーのクォークジェットに比べ，柔らかで（$\langle p\rangle$ が小），ジェット軸を中心に広がっていて（$\langle p_T\rangle$ または $\langle\theta\rangle$ が大），多重度が大きい（$\langle n_g\rangle$ が大）という推察ができる．実際，理論的には $\sqrt{s}\to\infty$ で，QCD では $\langle n_g\rangle/\langle n_q\rangle=C_A/C_F=9/4$ が予言できる[56]．この比は，グルーオンのカラー電荷の自乗平均をクォークのカラー荷の自乗平均で割った量である．干渉効果を取り入れれば，この比は1に近づく．

$e\bar{e}$ 反応では，グルーオンは第3のジェットとして現れるから，簡単に考えれば3ジェット現象の中で，最もエネルギーの低いジェットをグルーオンと見なして第1，第2のジェットと比較すればよい．しかし，エネルギーが低いとシャワーが十分発達せず，グルーオンとクォークの差がハドロンレベルで顕著に見えるとは限らない．実際，初期の $\sqrt{s}=34$ GeV（DESY, PETRA）での試みは結果がまちまちであり[57]，$\sqrt{s}=60$ GeV のトリスタンでようやく差が見えるようになった[58]．この場合でも，グルーオンとクォークを区別するためには運動学的条件を適切に選ぶ必要があり，例えばヴィーナスグループは，対称

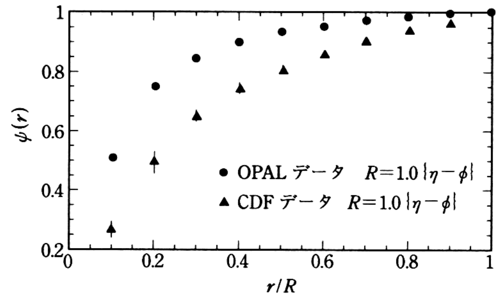


図 8.34　クォークジェットとグルーオンジェット内の各運動量分布の比較[60]
LEP と TEVATRON でのジェットを条件をほぼ同じくして比較した．LEP では，$E=45$ GeV のジェット，TEVATRON では，$40<E_T<60$ GeV，$\langle E_T\rangle=65$ GeV のジェットを拾い，η（ラピディティ）-ϕ（方位角）平面で，ジェット軸を中心に，$E\geqq35$ GeV，$R=(\Delta\eta^2+\Delta\phi^2)^{1/2}\leqq1$ の中に入るジェット内粒子のエネルギー分布を測定して，ジェット中心から半径 r 内に含まれるジェットエネルギー量の相対比 $\psi(r)\equiv\left[\int E(x\leqq r)\mathrm{d}x\right]/\left[\int E(x\leqq R)\mathrm{d}x\right]$ を示す．

3ジェット現象($q\bar{q}g$)とγ+2ジェット現象($q\bar{q}\gamma$)を選択したうえでジェットの性質を比較している.

エネルギーが高くなれば差は見やすくなる. e^+e^-反応では$q\bar{q}$対がまず生成され, グルーオンはクォークから2次的に放出されるので, LEPエネルギー領域ではジェットの80%以上がクォーク起源である. 一方, ハドロン反応, 特に$\sqrt{s}$の大きい反応ではグルーオンによる2パートン→2ジェット反応が優勢であり(後述第9章), テバトロン(TEVATRON : $\sqrt{s}$=1.8 TeV)におけるデータでは, ジェットの80%以上がグルーオン起源である[59]. このことに着目して, OPALグループは, 解析条件を同じにして, CDFデータと比べた. 図8.34[60]に示すように, クォークジェット(OPALデータ)の場合は$\Delta R \leqq 0.4$の中心部にエネルギーの90%($\Delta R \leqq 1$の総エネルギーに対する比)を含むが, グルーオン(CDFデータ)は75%しか含まない. このように, エネルギーが高くなると, クォークジェットとグルーオンジェットの差は非常に顕著である.

参考文献

1) R.F. Schwitters *et al.*: *Phys. Rev. Lett.*, **35** (1975) 1320
G.G. Hanson *et al.*: *Phys. Rev. Lett.*, **35** (1975) 1609
2) VENUS; R. Arai *et al.*: *Nucl. Instr. Methods*, **217** (1983) 181
3) TASSO; R. Brandelik *et al.*: *Phys. Lett.*, **B114** (1982) 65; *Z. Phys.*, **C22** (1984) 307
P. Darriulat: *Ann. Rev. Nucl. Part. Sci.*, **30** (1980) 159
4) E. Farhi: *Phys. Rev. Lett.*, **39** (1977) 1587
J.D. Bjorken and S.J. Brodsky: *Phys. Rev.*, **D1** (1970) 1416
5) D.P.B. Barker *et al.*: *Phys. Rev. Lett.*, **43** (1979) 830
6) J. Steinberger: *Phys. Report*, **203** (1991) 345
L3: Paper submitted to Int. Conf. on High Energy Physics at Vancouver, July 23-29, 1998
7) TASSO; M. Althoff *et al.*: *Z. Phys.*, **C22** (1984) 307
8) VENUS; *Phys. Lett.*, **B198** (1987) 570
9) T. Sjostrand: *Comput. Phys. Commun.*, **39** (1986) 347
T. Sjostrand and M. Bengtsson: *Comput. Phys. Commun.*, **43** (1987) 367
T. Sjostrand: *Int. J. Mod. Phys.*, **A3** (1988) 751
10) G. Marchesini and B.R. Webber: *Nucl. Phys.*, **B310** (1988) 461
11) K. Kato and T. Munehisa: *Phys. Rev.*, **D36** (1987) 61

12) L.A. Gribov *et al.*: *Phys. Rep.*, **100** (1983) 1
A. Bassetto *et al.*: *Phys. Rep.*, **100** (1983) 201
B.R. Webber: *Ann. Rev. Nucl. Part. Sci.*, **36** (1986) 253
13) A.H. Muller: *Phys. Lett.*, **B104** (1981) 161
B.J. Ermolaev: *JETP Lett.*, **33** (1981) 269
Yu. L. Dokshitzer: *Sov. J. Nucl. Phys.*, **47** (1988) 1384
14) Yu. L. Dokshitzer, V.A. Khoze and S.I. Troyan: *Rev. Mod. Phys.*, **60** (1988) 373
R.K. Ellis and W.J. Stirling: Fermilab-Conf-90/164-T 1988 CERN School of Physics, CERN 91-01
15) G. Marchesini and B.R. Webber: *Nucl. Phys.*, **B238** (1984) 1
B.R. Webber: *Nucl. Phys.*, **B238** (1984) 492
16) R.D. Field and R.P. Feynman: *Nucl. Phys.*, **B136** (1978) 1
17) Particle Data Group: *Phys. Rev.*, **D54** (1996), EPJ., **C3** (1998)
18) C. Peterson *et al.*: *Phys. Rev.*, **D27** (1983) 105
19) P. Hoyer *et al.*: *Nucl. Phys.*, **B161** (1979) 349
20) A. Ali *et al.*: *Phys. Lett.*, **B93** (1980) 155
21) X. Artu and G. Mennessier: *Nucl. Phys.*, **B70** (1974) 93
X. Artu: *Phys. Rep.*, **B97** (1983) 147-171
T. Sjostrand and M. Bengtsson: *Comput. Phys. Communi.*, **43** (1987) 367
P. Mattig: *Phys. Rep.*, **177** (1989) 142
22) J. Schwinger: *Phys. Rev.*, **82** (1951) 664; *ibid.*, **93** (1954) 615
E. Brezin and C. Itzykson: *Phys. Rev.*, **D2** (1970) 1191
23) B. Anderson *et al.*: *Z. Phys.*, **C20** (1983) 317
X. Artru: *Z. Phys.*, **C26** (1984) 83
B. Anderson, G. Gustavson, G. Ingelman and T. Sjostrand: *Phys. Rep.*, **97** (1983) 31-146
24) G. Abrams *et al.*: *Phys. Rev. Lett.*, **63** (1989) 1558
25) OPAL: *Z. Phys.*, **C47** (1990) 505
DELPHI: *Phys. Lett.*, **B240** (1990) 271
26) W. Hoffman: *Ann. Rev. Nucl. Part. Sci.*, **38** (1988) 279
27) G. Sterman and S. Weinberg: *Phys. Rev. Lett.*, **39** (1977) 1436
28) G. Kramer and B. Lampe: *Z. Phys.*, **C34** (1987) 497
29) Z. Kunst: *Phys. Lett.*, **B99** (1981) 429
K. Fabricius *et al.*: *Z. Phys.*, **C11** (1982) 315
F. Gutbrod *et al.*: *Z. Phys.*, **C21** (1984) 235
B. Lampe and G. Kramer: *Prog. Theor. Phys.*, **76** (1986) 1340; *Z. Phys.*, **C34** (1987) 497
30) JADE; *Phys. Lett.*, **B213** (1988) 235
S. Bethke *et al.*: *Nucl. Phys.*, **B370** (1998) 310
31) AMY; I.H. Park *et al.*: *Phys. Rev. Lett.*, **71** (1993) 2578
SLD; K. Abe *et al.*: *Phys. Rev.*, **D51** (1995) 962
32) L.R. Surguladze and M.A. Samuel: *Phys. Rev. Lett.*, **66** (1991) 560

Erratum : *ibid*., 2416
S. Gorishny, A.L. Kataev and S.A. Larin : *Phys. Lett*., **B259** (1991) 144
33) S. Bethke and J.E. Pilcher : *Ann. Rev. Nucl. Part. Sci*., **42** (1992)
M. Schmelling : *Physica Scripta*, **51** (1995) 683
34) E. Braaten, S. Narrison and A. Pich : *Nucl. Phys*., **B373** (1992) 581
35) C. Basham *et al*. : *Phys. Rev. Lett*., **41** (1978) 1585 ; *Phys. Rev*., **D19** (1979) 2018 ; *Phys. Rev*., **D24** (1981) 2382
A. Ali and F. Barreiro : *Phys. Lett*., **B118** (1982) 155
D.G. Richards *et al*. : *Phys. Lett*., **B119** (1982) 193 ; *Nucl. Phys*., **B229** (1983) 317
N.K. Falk and G. Kramer : *Z. Phys*., **C42** (1989) 459
Z. Kunst *et al*. : Z. Phys. at LEP, vol. 1, CERN 89-08
36) F. Ciskor *et al*. : *Phys. Rev*., **D31** (1985) 1025
37) VENUS ; K. Abe *et al*. : *Phys. Lett*., **B240** (1990) 232
VENUS ; A. Suzuki, Ph. D. Thesis, Osaka Univ., 1992
38) OPAL ; *Phys. Lett*., **B252** (1990) 159
DELPHI ; *Phys. Lett*., **B252** (1990) 1491
L3 ; *Phys. Lett*., **B257** (1991) 471
39) FK ; N.K. Falck and G. Kramer : *Z. Phys*., **C42** (1989) 459
AB ; A. Ali and F. Barreiro : *Nucl. Phys*., **B236** (1984) 269
KN ; Z. Kunst *et al*. : Z. Phys. at LEP, vol. 1, CERN89-08, 1989
RSE ; D.G. Richards, W.J. Stirling and S.D. Eliis : *Phys. Lett*., **B119** (1982) 193
40) J. Ellis *et al*. : *Nucl. Phys*., **B111** (1976) 253
41) J. Ellis, M.K. Gaillard and G.G. Ross : *Nucl. Phys*., **B111** (1976) 253
42) J. Ellis and I. Karliner : *Nucl. Phys*., **B148** (1979) 141
43) TASSO ; R. Brandelik *et al*. : *Phys. Lett*., **B97** (1980) 453
44) Ya. I. Azimov, Yu. L. Dokshitzer, V.A. Khoze and S.I. Troyan : *Z. Phys*., **C27** (1986) 213 ; *Phys. Lett*., **B115** (1982) 242 ; *Rev. Mod Phys*., **60** (1988) 373
45) Ya. I. Azimov *et al*. : *Phys. Lett*., **B165** (1985) 147
R.K. Ellis, D.A. Ross and Terrano : *Phys. Rev. Lett*., **45** (1980) 1226, *Nucl. Phys*., **B178** (1981) 421
46) TPC ; H. Aihara *et al*. : *Phys. Rev*., **57** (1986) 945
MARKII, P.D. Sheldon, *et al*. : *Phys. Rev. Lett*., **57** (1986) 945
47) JADE ; W. Bartel *et al*. : *Phys. Lett*., **B101** (1981) 129 ; *Phys. Lett*., **B134** (1985) 31
48) A.H. Mueller : *Nucl. Phys*., **B213** (1983) 85
Ya. I. Azimov, Yu. L. Dokshitzer, V.A. Khoze and S.I. Troyan : *Z. Phys*., **C31** (1986) 213
C.P. Fong and B.R. Webker : *Nucl. Phys*., **B335** (1991) 54
Yu. L. Dokshitzer *et al*. : *Rev. Mod. Phys*., **60** (1988) 373
49) OPAL ; M.Z. Akrawy *et al*. : *Phys. Lett*., **B247** (1990) 617
M.G. Albrow : Fermilab. Conf. 97/073, QCD in Hadron-Hadron Collisions, Talk at SLAC Summer Institute on Particle Physics, Aug. 19-30, 1996
50) G. Altarelli and G. Parisi : *Nucl. Phys*., **B126** (1977) 298

51) AMY ; *Phys. Rev. Lett.*, **62** (1989) 1713
52) S. Bethke *et al.* : *Z. Phys.*, **C49** (1991) 59
53) M. Bengtson and P. Zerwas : *Phys. Lett.*, **B208** (1988) 306
O. Nachtman and A. Reiter : *Z. Phys.*, **C16** (1982) 45
54) OPAL ; M.Z. Akrawy *et al.* : *Z. Phys.*, **C49** (1991) 49
55) L3 ; B. Adeva *et al.* : *Phys. Lett.*, **B248** (1990) 227
56) S.J. Brodsky and J. Gunion : *Phys. Rev. Lett.*, **37** (1976) 402
57) JADE ; W. Bartel *et al.* : *Phys. Lett.*, **B123** (1983) 460
UA2 ; P. Bagnaia *et al.* : *Phys. Lett.*, **B144** (1984) 291
HRS ; M. Derrick *et al.* : *Phys. Lett.*, **B165** (1985) 449
MKII ; A. Peterson *et al.* : *Phys. Rev. Lett.*, **55** (1985) 1954
UA1 ; G. Arnison *et al.* : *Nucl. Phys.*, **B276** (1986) 253
TASSO ; W. Braunschweig *et al.* : *Z. Phys.*, **C45** (1989) 1
58) AMY ; *Phys. Rev. Lett.*, **63** (1989) 1772
VENUS ; H. Takaki *et al.* : *Phys. Rev. Lett.*, **71** (1993) 38
59) CDF ; *Phys. Rev. Lett.*, **70** (1993) 713
60) OPAL ; *Phys. Lett.*, **B265** (1991) 462 ; *Z. Physik.*, **C63** (1994) 197

9

高エネルギーハドロン反応（ジェット現象 2）

ハドロン反応の大部分，すなわち全断面積に寄与する部分は，そのほとんどがいわゆる“柔らかい過程＝soft process＝エネルギー損失や散乱角が小さい反応”である．これはQCDでは非摂動部分にあたり，まだ第1原理からはいまだ計算不可能な部分である．柔らかい過程は，次のように二つの特徴をもつ．第1は，エネルギーが上がってビーム方向に位相空間が増大したとき，位相空間の特定の部分を選択する力学的要因はなく2次粒子は位相空間内に一様に分布する．高エネルギー反応の運動学的変数として，ラピディティ

$$\eta=\frac{1}{2}\ln\frac{E+p_Z}{E-p_Z} \tag{9.1}$$

と，横運動量 p_T，方位角 ϕ を使うと便利なのは，ローレンツ変換に関して簡単な変換性をもつことのほかに，これらの変数を使えば，位相空間体積要素が

$$\frac{\mathrm{d}^3p}{E}=\frac{\mathrm{d}\phi\mathrm{d}p_T{}^2\mathrm{d}p_Z}{2E}=(1/2)\mathrm{d}\phi\mathrm{d}p_T{}^2\mathrm{d}\eta \tag{9.2}$$

と表されるので，粒子分布が η に関して一様になると期待できることによる．図9.1 (a), (b) に高エネルギー反応のデータ[1,2]を示すが，上記の期待を裏づけるものとなっている．また，$|\eta|<\eta_{\max}$ の範囲で生成粒子の数がほぼ一様ならば全粒子数 N は $\eta_{\max}$ に比例するであろう．

$$\eta_{\max}=\frac{1}{2}\ln\frac{E+p_Z}{E-p_Z}\bigg|_{\max}\simeq\frac{1}{2}\ln\frac{(E+p_Z)^2}{p_T{}^2+m^2}\sim\ln s$$

であるので，$N\sim\ln s$ のように成長する答であり，データをほぼ再現する．理論的には，$N\lesssim\ln^2 s$ というフロアッサール上限が存在する．

第2の特徴として，柔らかい過程では運動量遷移が小さいため2次粒子の横運動量は小さく（$\langle p_T\rangle\sim300$ MeV），p_T が増大するにつれ指数関数的に反応率

が減衰する．しかし，実際の高エネルギーハドロン反応には，指数関数的に減少しないいわゆる大きな p_T の事象 (high p_T events) が存在する（図 9.1 (c), p_T の小さいところと大きいところを区別してみよ）．この章で扱うのは，この大きな p_T 事象であり，QCD の摂動計算が適用できる反応である．

大きな p_T のハドロン現象でジェットが観測されるであろうことは理論的に予想されていたことであり[3]，歴史的には CERN の ISR (intersecting storage ring; 24+24 GeV pp collider, 1972 稼動）で最初のジェットが観測された[4]．しかし，ISR ではジェットはまれな現象で，多量のジェット観測には $\mathrm{Sp\bar{p}S}$ (super proton antiproton synchrotron, $\sqrt{s}=570$ GeV 後に 630 GeV; $p\bar{p}$-collider) を待たねばならなかった．陽子の中のパートンの運動量は平均として陽子の 1/6 程度しかないので，ISR では，パートンの運動量は ≲4 GeV 程度となり，ジェット現象を観察するにはエネルギーが，したがって p_T もまた低すぎたのである．

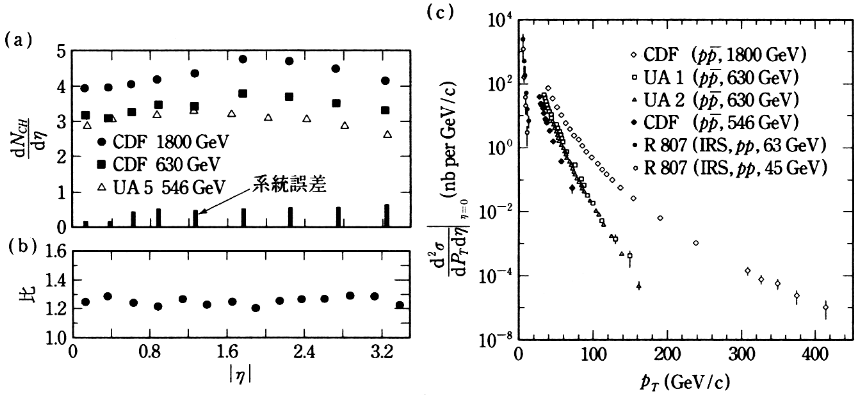


図 9.1　高エネルギーハドロン反応 2 次粒子のラピディティ (η) 分布 (a), (b) と横運動量 (p_T) 分布 (c)[2]

9.1　大横運動量のジェット生成

ハドロン衝突型加速器 $\mathrm{Sp\bar{p}S}$ では，パートン 1 個あたりのエネルギーが優に 50 GeV を超えるので非常に明瞭で見誤りようのないジェット現象を多発する．特に横運動量が～100 GeV を超える大角度散乱現象はそのほとんどが

ジェットを含む反応であり，その中でも2個のパートンが弾性散乱をする2→2ジェット反応が大部分を占める．

図9.2には初期のUA2グループによって得られたデータ[2,5]を示す．横運動量 p_T（またはほとんど同じことであるが横エネルギー E_T）が，~75 GeVを超えると球形指数（sphericity）が急激に小さくなりジェットとしての特徴を表してくること，また2ジェット現象が占めるエネルギーの割合が大きくなることを示している．しかも，優勢な2個のジェットはほぼ180度正反対方向に放出されている．これらのデータから，横運動量の大きい（$p_T \gtrsim 100$ GeV）領域ではほぼすべてがジェット現象，それもほとんどが2ジェットの2体反応であることがわかる．

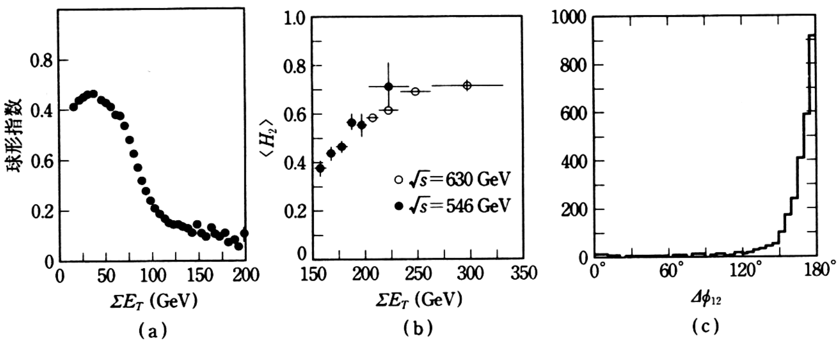


図9.2 E_T が大きくなるとジェット現象が増える[2,3]

(a) $E_T > 75$ GeV で sphericity が急速に小さくなる．

(b) $h_2 = (E_{T1} + E_{T2})/\Sigma E_T$ 分布．2本のジェットのエネルギーが $E_T > 180$ GeV を超えると優勢になる．

(c) 2個のジェットのつくる方位角の差の分布[5]．180°方向に出ることは2体反応であることを示す．

これらの現象は，図式的には図9.3のような過程と理解される．ハドロンAの中のパートンの一つが，ハドロンBの中のパートンと反応して，2体散乱をした後，2個のパートンがジェットを形成する（2→2反応）．反応に加わらなかった残りのパートン（傍観者パートン：spectator parton）は，そのまま前方に進んでビームジェットとなるが，これは相当部分がビームパイプの中からでないので，測定器に捉えられることが少なく，定量的取扱いが困難であるので，これからの考察の対象からは外すことにする．

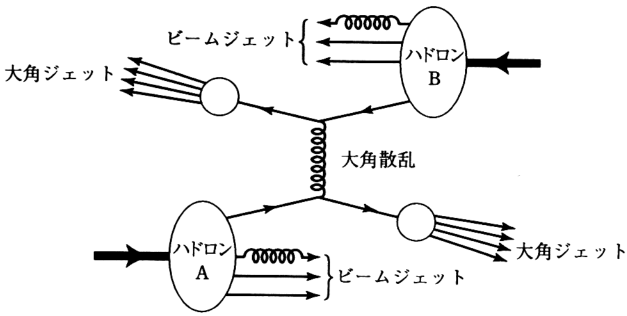
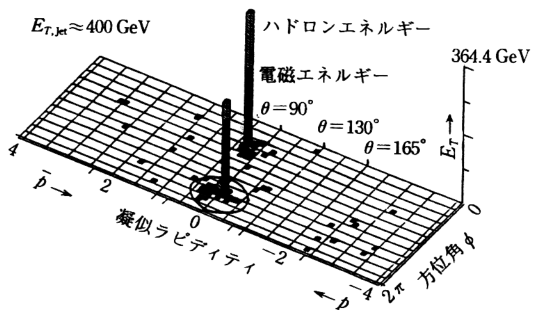
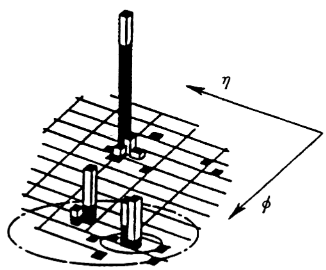


図 9.3 ハドロン反応における大角 2→2 反応が大角ジェットをつくる．残りの傍観者 (spectator) パートンがビームジェットをつくる．



(a)



(b)

図 9.4 ハドロンコライダーにおけるジェット現象[6)]
(a) 2→2 ジェット，(b) 2→3 ジェット
CDF グループの観測したジェットを，$\eta=-\ln\tan\theta/2$ と ϕ の平面にジェットのもつ E_T を高さとしてプロットしたもの．η-ϕ 平面の一つのジェットの周囲に $R=\sqrt{\varDelta\eta^2+\varDelta\phi^2}=0.7$ の円を描き，この円内のエネルギーをジェットエネルギーとする．

衝突型加速器実験の場合，測定器は衝突点を囲むようにつくるので，粒子分布を衝突点からの極角 θ と方位角 ϕ で方向を表すことができる．放出粒子の分布は θ で表すより，通常はラピディティ（または質量を無視する疑似ラピディティ $\eta=\ln\cot(\theta/2)$）と方位角 ϕ の 2 次元平面でのエネルギー分布のヒストグラム（通常レゴプロット[*1)]といわれる）がよく使われる．2 次粒子の大部分を占める柔らかい過程の粒子は，η-ϕ 平面で一様に分布するから，この平面上のある特定領域にエネルギーが集中したとき（energy cluster＝エネルギーの塊），それをジェットと見なすのは理にかなっている．図 9.4 にレゴプロットによる 2, 3 ジェットの一例を示す[6)]．図 9.4 のジェットの一つの根元に円が描いてあるが，これは $R\equiv\sqrt{((\Delta\eta)^2+(\Delta\phi)^2)}=0.7$ の円で，CDF グループはこの中にあるエネルギーをジェットのエネルギーと定義している．図 9.4 (b) は，高エネルギーのパートンの一つがグルーオンを放出して 3 個のジェットになったと解釈できるが（2→3 反応），囲い込みの円を大きくとれば 2→2 反応と見なすこともできる．

9.2 2→2反 応

a. 断 面 積

パートン 2 体反応の $O(\alpha_s{}^2)$ のファインマン図を図 9.5 に示す．ハドロン A の中のパートン a とハドロン B の中のパートン b とが衝突してパートン c と d を放出する包含反応を考えよう．

$$A+B\to c+d \tag{9.3}$$

$ab\to cd$ 反応が堅い（p_T が大きい）場合の反応断面積は，(5.145) で与えられている．

$$\sigma(AB\to cd)=\sum_{ab}\int \mathrm{d}x_a\mathrm{d}x_b\{f_A{}^a(x_a)f_B{}^b(x_b)+(A\leftrightarrow B\text{ if } a\neq b)\}\hat{\sigma}(ab\to cd) \tag{9.4}$$

ここに $\hat{\sigma}$ は，パートン反応 $(ab\to cd)$ の断面積で始状態のカラーについては

[*1)] $Z=f(x,y)$ とするとき，x-y 平面を四角なマスで区切り，Z をそのマス上の柱の高さで表す表示のこと．

平均を，終状態のカラーについては和をとってあるものとする．パートン ab 系の全エネルギーを $\hat{s}$ とすると

$$\hat{s}=(x_a p_A+x_b p_B)^2 \fallingdotseq 2x_a x_b(p_a p_b)=x_a x_b s\equiv \tau s \tag{9.5}$$

である．パートンの散乱断面積は

$$\mathrm{d}\hat{\sigma}(ab\to cd)=\frac{\overline{\Sigma}|\mathcal{M}|^2}{2\hat{s}}\frac{(2\pi)^4}{(2\pi)^6}\delta^4(p_a+p_b-p_c-p_d)\frac{d^3p_c}{2E_c}\frac{d^3p_d}{2E_d}\frac{1}{1+\delta_{cd}} \tag{9.6}$$

で与えられる．δ_{cd} は同一粒子の場合の統計因子である．

$\hat{t}=(p_a-p_c)^2$,　$\hat{u}=(p_a-p_d)^2$,　$p_T{}^2=\hat{u}\hat{t}/\hat{s}=(\hat{s}/4)\sin^2\theta^*$ とすれば，

$$\frac{\mathrm{d}\hat{\sigma}}{\mathrm{d}\hat{t}}=\frac{1}{16\pi\hat{s}^2}\overline{\Sigma}|\mathcal{M}|^2\frac{1}{1+\delta_{cd}} \tag{9.7 a}$$

$$\frac{\mathrm{d}\hat{\sigma}}{\mathrm{d}p_T{}^2}=\frac{\mathrm{d}\hat{\sigma}}{\mathrm{d}\hat{t}}\frac{1}{\cos\theta^*}=\frac{\mathrm{d}\hat{\sigma}}{\mathrm{d}\hat{t}}\frac{\hat{s}}{(\hat{t}-\hat{u})} \tag{9.7 b}$$

4 元運動量 k^μ を，k_T，方位角 ϕ，ラピディティで τ で表すと，一般に

$$k^\mu=((\sqrt{k_T{}^2+m^2}\cosh\tau\,;k_T\cos\phi,\ k_T\sin\phi,\ \sqrt{k_T{}^2+m^2}\sinh\tau) \tag{9.8}$$

が成り立つ．パートン c, d のラピディティを η_c, η_d とすれば，パートン系の 2 粒子重心系が，ハドロン重心系でもつラピディティ η とハドロン重心系での 2 粒子の相対ラピディティ $(\varDelta y)$ は

$$\eta=(\eta_c+\eta_d)/2, \qquad \varDelta y=\eta_c-\eta_d \tag{9.9}$$

であり，質量 0 のパートン c のパートン重心系での散乱角 θ^* は

$$\cos\theta^*=\frac{p_z{}^*}{E^*}=\frac{\sinh(\varDelta y/2)}{\cosh(\varDelta y/2)}=\tanh\left(\frac{\varDelta y}{2}\right) \tag{9.10 a}$$

$$\sin\theta^*=\frac{1}{\cosh(\varDelta y/2)} \tag{9.10 b}$$

で与えられる．生成されたジェットのラピディティ y_c, y_d が，パートンのラピディティ η_c, η_d と同じであるとすれば，全体（粒子 AB）の重心系でのパートンの運動量

$$p_a{}^\mu=x_a p_A{}^\mu, \qquad p_b{}^\mu=x_b p_B{}^\mu \tag{9.11}$$

およびエネルギー運動量保存則から，縦運動量 x_a, x_b と横運動量 $x_T=2p_T/\sqrt{s}$ は

$$x_a=x_T e^\eta\cosh\frac{\varDelta y}{2}, \qquad x_b=x_T e^{-\eta}\cosh\frac{\varDelta y}{2} \tag{9.12 a}$$

$$\eta=\frac{1}{2}\ln\frac{x_a}{x_b},\qquad x_T{}^2=\frac{4p_T{}^2}{s}=\frac{2x_ax_b}{1+\cosh\Delta y} \tag{9.12 b}$$

という関係式から計算できる．また2個のジェットの不変質量 $M_{jj}{}^2$ は

$$M_{jj}{}^2=\hat{s}=2p_T{}^2(1+\cosh\Delta y) \tag{9.13}$$

これらの変数を使えば，断面積は

$$\frac{d^3\sigma}{\mathrm{d}\eta_c\mathrm{d}\eta_d\mathrm{d}p_T{}^2}=\frac{1}{16\pi s^2}\sum_{ab}\frac{f_A{}^a(x_a)f_B{}^b(x_b)}{x_ax_b}\overline{\Sigma}|\mathcal{M}(ab\to cd)|^2\frac{1}{1+\delta_{cd}} \tag{9.14}$$

また，

$$\mathrm{d}\eta_c\mathrm{d}\eta_d\mathrm{d}p_T{}^2=(s/2)\mathrm{d}x_a\mathrm{d}x_b\mathrm{d}\cos\theta^* \tag{9.15}$$

を使えば，

$$\frac{d^3\sigma}{\mathrm{d}x_a\mathrm{d}x_b\mathrm{d}\cos\theta^*}=f_A{}^a(x_a)f_B{}^b(x_b)\frac{\mathrm{d}\hat{\sigma}}{\mathrm{d}\cos\theta^*} \tag{9.16 a}$$

$$\frac{\mathrm{d}\hat{\sigma}}{\mathrm{d}\cos\theta^*}=\frac{\hat{s}}{2}\frac{\mathrm{d}\hat{\sigma}}{\mathrm{d}\hat{t}}=\sum_{cd}\frac{1}{32\pi\hat{s}}\overline{\Sigma}|\mathcal{M}(ab\to cd)|^2\frac{1}{1+\delta_{cd}} \tag{9.16 b}$$

とも表される．さらに (9.13) を使い，$M_{jj}{}^2/s=\tau$ とおいて，2ジェット生成断面積を書き表すと

$$\frac{\mathrm{d}^2\sigma}{\mathrm{d}M^2{}_{jj}\mathrm{d}\cos\theta^*}=\sum_{ab}\int f_A{}^a(x_a)f_B{}^b(x_b)\delta(x_ax_bs-M^2{}_{jj})\mathrm{d}x_a\mathrm{d}x_b\frac{\mathrm{d}\hat{\sigma}}{\mathrm{d}\cos\theta^*}$$

$$\equiv\sum_{ab}\frac{\tau}{M^2{}_{jj}}\frac{\mathrm{d}L_{ab}}{\mathrm{d}\tau}\cdot\frac{\mathrm{d}\hat{\sigma}}{\mathrm{d}\cos\theta^*} \tag{9.17}$$

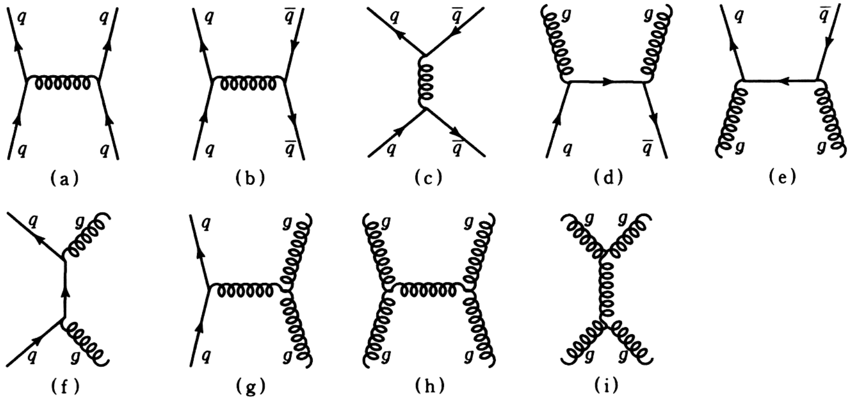


図 9.5　2→2反応における $O(\alpha_s{}^2)$ 過程

(a)　qq 散乱，(b)，(c)　$q\bar{q}$ 散乱，(d)　$q\bar{q}\to gg$，(e)　$gg\to q\bar{q}$，(f)，(g)　qg 散乱，
(h)，(i)　gg 散乱

となる．

$$\frac{\mathrm{d}L_{ab}}{\mathrm{d}\tau}=\frac{1}{1+\delta_{ab}}\int\delta(\tau-x_a x_b)\mathrm{d}x_a\mathrm{d}x_b[f_A{}^a(x_a)f_B{}^b(x_b)+(a\leftrightarrow b)] \tag{9.18}$$

は，ハドロン A と B の反応におけるパートン a, b 衝突のルミノシティである．ただし，親によるジェットの区別はできないので，$c=d$ の場合以外は $\hat{t}\leftrightarrow\hat{u}$ とした項を加えるが，角度についての積分は 90 度で止めることとする．

表 9.1 に，図 9.5 のファインマングラフに対応する反応の $|\mathcal{M}|^2$ を与える[7]．表 9.1 で注目すべきは，大きな断面積を与えるのは弾性散乱であり，特にグルーオンが関与するとこの特徴が著しい．これはグルーオンがカラーを二重にもっており結合が大きいことからくる．

表 9.1　2→2 パートン反応の不変行列要素 $\Sigma|\mathcal{M}|^2$ [7]
パートン質量は 0 とし，カラーとスピンについては始状態の平均と終状態の和をとっている．$g^2=4\pi\alpha_s$ であり，右側の列の数値は 90 度での相対値を示す．

反応	$\overline{\Sigma}|\mathcal{M}|^2/g^4$	$@\theta^*=\pi/2$
$qq'\to qq'$	$\frac{4}{9}\frac{\hat{s}^2+\hat{u}^2}{\hat{t}^2}$	2.22
$qq\to qq$	$\frac{4}{9}\left(\frac{\hat{s}^2+\hat{u}^2}{\hat{t}^2}+\frac{\hat{s}^2+\hat{t}^2}{\hat{u}^2}\right)-\frac{8}{27}\frac{\hat{s}^2}{\hat{u}\hat{t}}$	3.26
$q\bar{q}\to q'\bar{q}'$	$\frac{4}{9}\frac{\hat{t}^2+\hat{u}^2}{\hat{s}^2}$	0.22
$q\bar{q}\to q\bar{q}$	$\frac{4}{9}\left(\frac{\hat{s}^2+\hat{u}^2}{\hat{t}^2}+\frac{\hat{t}^2+\hat{u}^2}{\hat{s}^2}\right)-\frac{8}{27}\frac{\hat{u}^2}{\hat{s}\hat{t}}$	2.59
$q\bar{q}\to gg$	$\frac{32}{27}\frac{\hat{t}^2+\hat{u}^2}{\hat{t}\hat{u}}-\frac{8}{3}\frac{\hat{t}^2+\hat{u}^2}{\hat{s}^2}$	1.04
$gg\to q\bar{q}$	$\frac{1}{6}\frac{\hat{t}^2+\hat{u}^2}{\hat{t}\hat{u}}-\frac{3}{8}\frac{\hat{t}^2+\hat{u}^2}{\hat{s}^2}$	0.15
$gq\to gq$	$-\frac{4}{9}\frac{\hat{s}^2+\hat{u}^2}{\hat{s}\hat{u}}+\frac{\hat{u}^2+\hat{s}^2}{\hat{t}^2}$	6.11
$gg\to gg$	$\frac{9}{4}\left(\frac{\hat{s}^2+\hat{u}^2}{\hat{t}^2}+\frac{\hat{s}^2+\hat{t}^2}{\hat{u}^2}+\frac{\hat{t}^2+\hat{u}^2}{\hat{s}^2}+3\right)$	30.4

b.　実験との比較

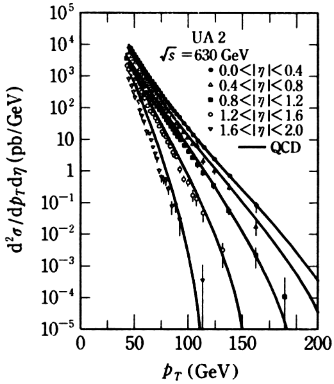
横運動量の大きい現象を捕らえると，ジェットが際だってくることは述べた．これは Sp$\bar{\mathrm{p}}$S での UA1, UA2 グループの経験である．ならば，はるかに高いエネルギーをもつテバトロン（$\sqrt{s}=1.8$ TeV，これは Sp$\bar{\mathrm{p}}$S の～630 GeV に比べて3倍のエネルギーである）でとにかくジェットを一つ捕まえて横運動量の関数としてどう振る舞うか調べよう．これはジェットの包含反応であるので，(9.14) を η_d について積分し，改めて $\eta_c=\eta$ とおき，さらにジェットの質

量を 0 とおく近似で

$$\frac{d^2\sigma}{d\eta dp_T^{\ 2}} \sim \frac{1}{2E_T}\frac{d^2\sigma}{dE_T d\eta} \tag{9.19}$$

図 9.6 (a), (b) は, UA2, CDF グループによる $p\bar{p}$ 衝突での実験データを示す[8,9]. UA2 グループのデータは第 1 近似 (LO: leading order, すなわち $O(\alpha_s^2(Q^2))$ の寄与で表 9.1 に与えたもの) の計算と, CDF データは第 2 近似 (NLO: next leading order$=O(\alpha_s^3(Q^2))$)[10] の計算と比較してある. 第 1 近似でほぼ満足すべき結果を与えるものの η の大きいところではややずれてくる. 第 2 近似計算が 9 桁にもわたるデータを ±20% の精度で再現しているのは見事である. 図 9.7 に断面積を 2 ジェットの不変質量の関数として描いたが, これも QCD の予想値と合っている[9].

散乱角 θ^* を固定した場合のジェット質量 M_{jj} $(=x_a x_b s)$ 分布は, パートン分布関数の x 依存性により決まる. 図9.8に各過程 $gg\to gg$, $gq\to gq$, $qq\to qq$ の相対寄与を2ジェット質量の関数として示す. 次節に示すように, 2 ジェット生成は弾性散乱過程が主成分であり, かつ各過程の相対比は角度にほとんど関係なく一定である. M_{jj} の小さいところ ($M_{jj}\leqq 50$ GeV) で gg 過程が優勢であるのは, x の小さいところでグルーオン分布関数が大きく, また gg 散乱断面積自身も大きいことによる. $100\lesssim M_{jj}\lesssim 200$ GeV では gq 過程が,



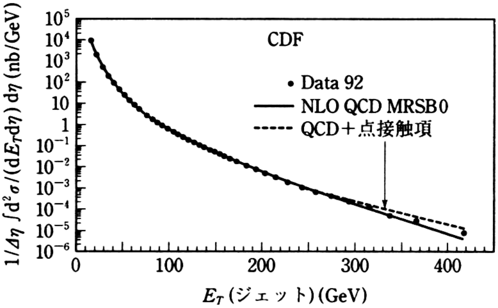


図 9.6 包含反応 $d^2\sigma/dp_T d\eta$

(a) UA2 データ[8], (b) CDF データ[9]

(a) では実線で QCD 第 1 近似計算結果を, (b) では実線で QCD 第 2 近似計算を示した. (b) の点線は, $\Lambda=1.4$TeV とした場合の下層構造を付加したモデル (§ 9.4 参照) を示す.

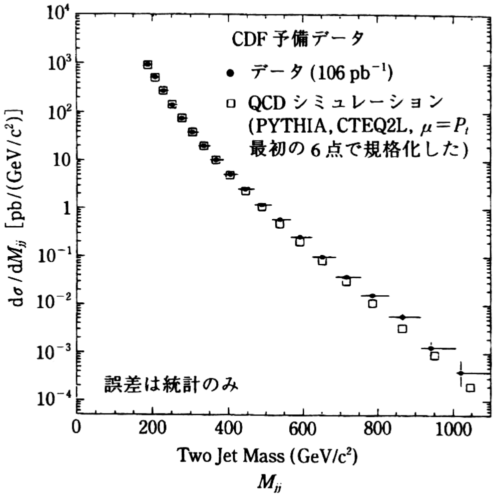


図 9.7　$d\sigma/dM_{jj}$:2 ジェット不変質量分布[9)]
CDF データと QCD 計算との比較.

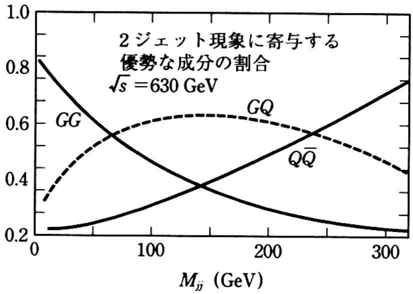


図 9.8　2 体反応における各過程（GG；グルーオン-グルーオン融合，GQ；グルーオン-クォーク反応，$Q\overline{Q}$；クォーク-クォーク反応）の相対寄与を M_{jj} の関数として表す.

$M_{jj}\gtrsim 250$ GeV では qq 過程が優勢になるのは，x したがって M_{jj} が大きいところでクォーク分布関数が大きいことを反映している．2 ジェット生成断面積が，表 9.1 の中にある過程を正しく考慮してデータが説明できるということは，グルーオンの関与する散乱すなわちグルーオン-グルーオン結合の存在の明白な証拠であり，QCD の非アーベル的性質の間接的証拠となっている.

c.　歴史は繰り返す（ジェットのラザフォード散乱）

ジェット現象がパートンレベルでは 2 体反応であり，QCD による力は近距離ではクーロン型であることを考慮するならば，ラザフォード散乱の特徴を備えているはずである．表 9.1 の各チャネルの角分布はそれぞれ微妙に違うが，$\theta\lesssim 90$ 度では，優勢な項は $\hat{t}$ チャネル交換項（$(1-\cos\theta^*)^{-2}$ に比例する項）であることを考慮すると実はほとんど変わらない．そこで，$q\bar{q}\rightarrow q\bar{q}$，$qg\rightarrow qg$，

$gg\to gg$ の角分布はほとんど同一であるとして，2→2反応の角分布は，$gg\to gg$ 反応で代表させることができる[10)]．この場合，全体の断面積からパートン分布関数を分離することができる．表9.1から，各チャネルの寄与は

$$|\mathcal{M}(qq\to jj)|^2:|\mathcal{M}(q\bar{q}\to jj)|^2:|\mathcal{M}(qg\to jj)|^2:|\mathcal{M}(gg\to jj)|^2 \\ \fallingdotseq 4/9:4/9:1:9/4 \tag{9.20}$$

で与えられるので

$$\frac{\mathrm{d}^3\sigma(AB\to jj)}{\mathrm{d}x_a\mathrm{d}x_b\mathrm{d}\cos\theta^*}=F(x_a)F(x_b)\frac{\mathrm{d}\hat{\sigma}(gg\to gg)}{\mathrm{d}\cos\theta^*} \tag{9.21}$$

$$F(x)=g(x)+(4/9)[q(x)+\bar{q}(x)] \tag{9.22}$$

$$\frac{\mathrm{d}\hat{\sigma}(gg\to gg)}{\mathrm{d}\cos\theta^*}=\frac{9}{8}\frac{\pi\alpha_s^2}{2x_ax_bs}\frac{(3+\cos^2\theta^*)^3}{(1-\cos^2\theta^*)^2} \tag{9.23}$$

となる．したがって，$\theta\sim 0$ 付近で，$\mathrm{d}\hat{\sigma}/\mathrm{d}\cos\theta^*\sim\sin^{-4}(\theta^*/2)$ となり，よく知られたラザフォード散乱と同じ形になる．小角でのデータ比較には変数を

$$\chi=\frac{1+\cos\theta^*}{1-\cos\theta^*}=e^{\eta_c-\eta_d} \tag{9.24}$$

に変えると，

$$\frac{\mathrm{d}\hat{\sigma}}{\mathrm{d}\chi}=\frac{(1-\cos\theta^*)^2}{2}\frac{\mathrm{d}\hat{\sigma}}{\mathrm{d}\cos\theta^*} \tag{9.25}$$

となり，$\chi>2$ でほとんど定数となるので見やすくなる．図9.9に，$\mathrm{d}\sigma/\mathrm{d}\cos\theta^*$ と $\mathrm{d}\sigma/\mathrm{d}\chi$ のデータを示すが[11,12)]，QCD計算とよく合っている．$\chi<1(\theta^*>\pi/2)$ で，断面積が上向きに転じるのは，s チャネル寄与のせいである．

個々のパートン断面積を外に取り出すことにより，パートン分布関数が分離できるので，2ジェット散乱データからパートン分布関数 $F(x)$ が決められる．図9.10に，$Q^2=20\,\mathrm{GeV}^2$ で深非弾性散乱その他のデータから決めたパートン分布関数（図9.10の実線）から，$Q^2=2000\,\mathrm{GeV}^2$ まで発展させた曲線（点線；Duke-Owens[13)]）と，UA1の $p_T>70\,\mathrm{GeV}$ のデータから決めた $F(x)$ との比較を示す[14)]．このように高い p_T 領域では構造関数はほとんど指数関数的である．注目すべきは $g+(4/9)(q+\bar{q})$ と $(4/9)(q+\bar{q})$ との差で，グルーオンの寄与（$gg, gq, g\bar{q}$ 散乱）が大きいことを示している．図によれば，xの小さいところではほぼ純粋なグルーオンジェットが取り出せること，x の大きいところからはほぼ純粋なクォークジェットが取り出せることを示す．また，発

展方程式から計算で決めたパートンの分布関数（§5.6.2の議論を参照）が，Q^2発展を含めて正しく実験値を再現することを示している．

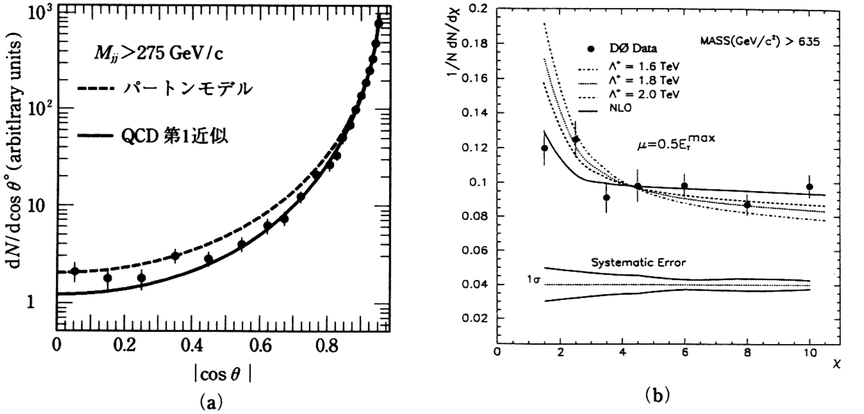


図 9.9 2-2 反応における角分布[11,12)]

(a) $d\sigma/d\cos\theta^*$ $M_{jj}>275$ GeV, D0.

(b) $d\sigma/d\chi$ $M_{jj}>635$ GeV, D0.

(a) では，実線がQCD 第1近似，ダッシュ線はパートンモデルで，スケーリングが成り立つとした曲線，(b) では，実線がQCD 第2近似，ダッシュ線が複合モデル（§9.4参照；$\Lambda_c=2$ TeV）を付加したもの．

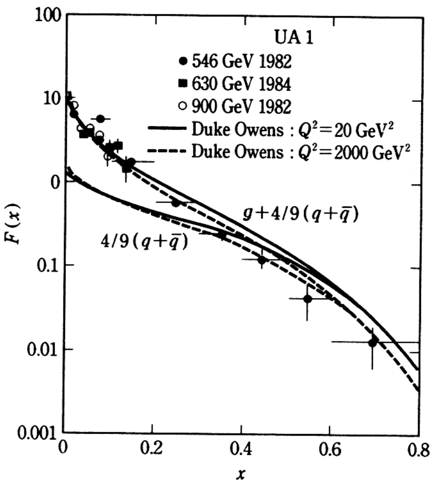


図 9.10 2→2 ジェット反応により求めたパートン分布関数[14)]

g：グルーオン分布，q, $\bar{q}$：クォーク分布

——：$Q^2=20$ GeV^2，----：$Q^2=2000$ GeV^2 の Duke-Owens によるパラメター化．

9.3 QCD の理論と実験の整合性[15)]

理論計算はデータの形は正確に再現するものの絶対誤差はまだ大きく，特に対数第 1 近似のみでは，最高 2 倍から 1/2 くらいの範囲内で不定性がある．現在，測定器の性能，データの統計量は非常に向上していて，理論的不定性の方が大きい．不定性には次のようないくつかの原因があり，小さくする努力が続けられている．

9.3.1 スケール依存性

ハドロン反応の断面積を算出するときは，素過程のパートン反応断面積に，μ によって発展させたルミノシティ関数を掛け合わせる．また，素過程の計算にも，繰り込み点のスケール μ の値の不定性がある．

$$\sigma(AB \to cd\,;Q)=\sum_{ab}\int \mathrm{d}x_a\mathrm{d}x_b f_A{}^a(x_a,\,\mu)f_B{}^b(x_b,\,\mu)\hat{\sigma}(ab \to cd\,;Q,\,\mu,\,\alpha(\mu)) \tag{9.26}$$

物理量は，μ に依存しないはずであるから，

$$\mu\frac{\partial\sigma}{\partial\mu}(AB \to cd)=0 \tag{9.27}$$

パートン分布関数の μ 依存性は，そもそもはパートンの素過程としての 2 体反応（第 1 近似）にグルーオン発生を考慮し（第 2 近似），グルーオンのソフトおよび collinear 部分を，素過程から切り離して分布関数の方に繰り入れることによって得られたものであった（factorization）．したがって，行列要素の計算にも第 2 近似まで含めてはじめて整合性のある式が得られる．パートン反応行列要素の $\mu(\equiv\mu_M)$ による依存性が，分布関数の $\mu(\equiv\mu_P\,;\mu_P$ と μ_M は，発生原因が異なるから必ずしも同じものとは限らないが，通常は等しくとる）依存性を，相殺して全体で μ 依存性を小さくすると期待される．ジェット包含反応 $\mathrm{d}^2\sigma/\mathrm{d}\eta\mathrm{d}E_T$ 計算の第 1 近似（$O(\alpha_s{}^2)$）と第 2 近似（$O(\alpha_s{}^3)$）の計算値のスケール依存性を図 9.11[15)] に示す．第 2 近似では μ に対する依存性が著しく改善されていることがわかる．μ の値は，通常 $E_T\sim E_T/2$ の間でデータに合う

ように決める．

上記の過程に限らず一般に QCD 計算においては，第 2 近似 ($O(\alpha_s^3)$) のスケール不定性は $O(\alpha_s^4)$ と期待されるから，不定性の少ない理論計算には，第 2 近似まで進めることが大切であることがわかるであろう．

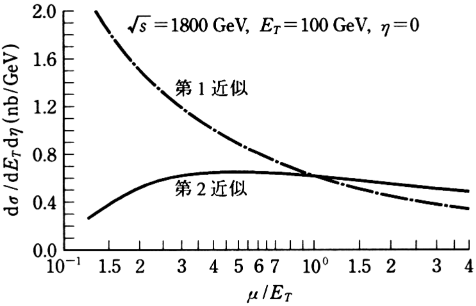


図 9.11　QCD 計算のスケール依存性[15)]
$d^2\sigma/dE_T d\eta$ を QCD $O(\alpha_s^2)$ 計算 (LO, 一点鎖線) と $O(\alpha_s^3)$ 計算 (NLO, 実線) とで比較する．NLO までいくと μ に対する安定性がよくなる．

9.3.2　ジェットサイズ

図 9.12 は UA1 の測定したジェット ($\sqrt{s}=540$ GeV, $E_T>35$ GeV) と，将来の大型加速器で予想されるジェット ($\sqrt{s}=40$ TeV, $E_T\fallingdotseq 3$ TeV) に含まれるエネルギーのプロファイルである[16)]．この図から明らかなようにジェットのエネルギーは，η-ϕ 平面で相当遠くまで広がっている．ジェット以外の生成物はバックグラウンドとして紛れ込んでいるが，柔らかい過程の寄与を含めて，η-ϕ 平面では平坦な分布をしていると考えられる．切断条件を定めジェットを同定してエネルギーの値を定めるとき，ジェットのエネルギーの何％を捕らえているか，ジェット以外の寄与をどれだけ取り込んでいるかは，ハドロン化モデルのモンテカルロで計算する．このとき，使用するハドロン化モデルの種類によって差が生じる．また一つのジェットの中でいくつかの不連続または連続的に連なっているエネルギーの塊をどうつなげるかというジェットの構成手順 (jet clustering algorithm：実験グループにより異なる) によってもできあがったジェットの中身は異なる[*2)]．ジェット取扱いの初期はこう

したジェットの内容に対する理解不足からくる不定性要因が大きかった.

低エネルギージェットでは，ハドロン化のモデルがまだ十分には理解できていないことからくる理論的不定性が大きいが，高エネルギージェットの場合は，堅いグルーオン放出による広がりが大きい．QCDの第1近似では，ジェットサイズ R による差は原理的に見ることはできない．なぜなら，第1近似ではジェットは1個のパートンであり空間的に広がっていないから，測定効率は測定器側の受容開口角の大きさに無関係となるからである．第2近似，すなわちグルーオン放出を取り入れると放出グルーオンとの間の開口角によるジェットサイズの変化を取り入れられるのである．図9.13 (a) は断面積の変化をジェットを同定するための R 切断の関数として描いたもので，理論[15,17]とデータ[9]を比較したものである．$R=0.7$ ととれば理論による不定性を最も小さくできることから，CDFグループは，$R=0.7$ をジェット再構成の標準切断値としている．ただし対象とする過程が異なるときは別の値，例えば多重

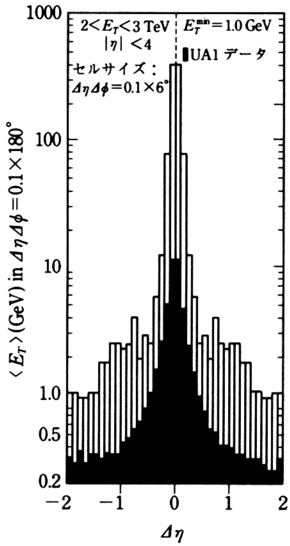


図 9.12 ジェットエネルギーのプロファイル[16)]
黒いヒストグラム：UA1 データ：$\sqrt{s}=540$ GeV で $E_T>35$ GeV のジェット．白いヒストグラム：モンテカルロシミュレーション；$\sqrt{s}\fallingdotseq 40$ TeV で $2<E_T<3$ TeV のジェット

*2) (前頁) 同様な事情は，$e\bar{e}$ 反応におけるジェット再構成においても存在した．§8.3.2の脚注を参照せよ．

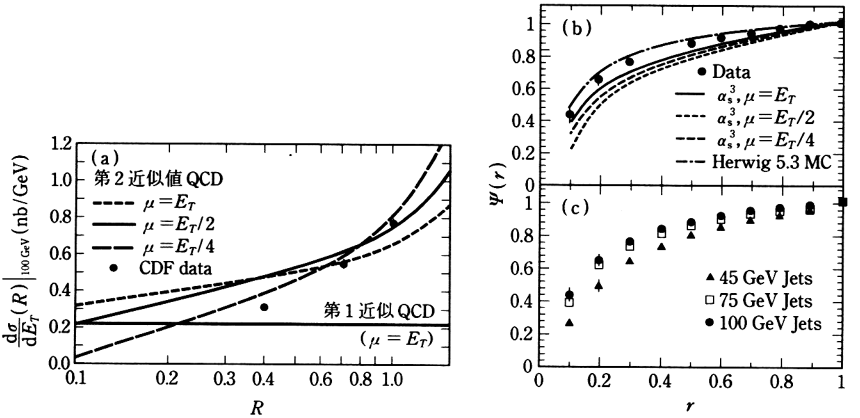


図 9. 13　(a)　100 GeV のジェットサイズと断面積との関係[9)]
線はスケールを変えたときの QCD 計算で，●が CDF データ
(b)　100 GeV，η-ϕ 平面上で円サイズを $R=1.0$ としたときのジェット内粒子の $\Phi(r)=\sum p_T(R<r)/\sum p_T(R\lesssim 1.0)$ を描いた[18)]．各種の線は QCD $O(\alpha_s{}^3)$ の計算でスケール μ を変えたものおよび HERWIG パートン計算（一点鎖線）
(c)　(b) と同じ．ただしジェットエネルギーを変える．

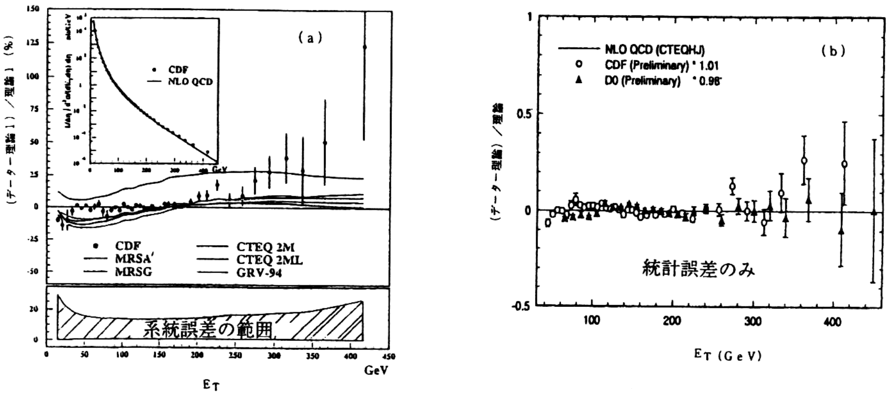


図 9. 14　$d^2\sigma/dE_Td\eta$ 包含反応データと QCD 計算の比較[9)]
(a)　パートン分布関数として MRSDO′（理論 1）を基準として，データ（黒丸）および各種分布関数＋QCDNLO 計算との相対的なズレを比較したもの．
(b)　分布関数として CTEQHJ を使用したときのデータとの比較．

ジェット分離のときは 0.4 を採用している．図 9.14 (b) には，ジェット内の各粒子のもつ横運動量について，CDF データ[18] と $O(\alpha_s^3)$ の QCD 計算との比較，およびモンテカルロプログラム HERWIG との比較を示す．QCD 計算にはスケール依存性が多少残っているが，パートンシャワーモデルによるモンテカルロシミュレーションの再現性はかなりよいことがわかる．第 1 近似のみの場合には 2 倍程度の変動があったが，第 2 近似まで取り入れると，図に示すように，だいたい 20%以内におさまっていることがわかる．

9.3.3　パートン分布関数

パートンのルミノシティ評価の基礎になるパートンの分布関数 $q_A(x_a)$ にも，まだ実験データが十分でなく不定性が存在する．このことにより断面積の決定に同じだけの不定性が生じる．図 9.14 (a) に実験データと各種のパートン分布関数を使った場合の理論計算との相対誤差を示す．図 (a) では $E_T>300$ GeV で明らかに理論値からずれてくる．新現象？としばらくの間騒がれたが，分布関数のわずかな修正で図 (b) のように合わせられたので (a) の理論予想値からのずれは分布関数の不定性が原因であると解釈するのが正しいであろう．またこの図は，§9.3.1 で行った議論，すなわち第 2 近似以上を使うことの重要さを確認するデータともなっている．このように，最近ではジェットのサイズの扱い方については理解が進み，実験による測定の不定性は 20%以内に入るまでに追い込んできた．

9.4　パートンの下層構造は見えるか？

これだけ QCD の再現性が正確であると，QCD を信頼してそこからのずれを新現象と見なす解釈が成り立つ．もしクォークやレプトンが下層構造をもち，より基本的な粒子 (プレオン，preon) の複合体であるならば，点粒子としての断面積からのずれが観測されるであろう．その効果は結合定数 g_s に形状因子

$$F(Q^2)=(1+Q^2/\Lambda_c^2)^{-1} \tag{9.28}$$

を導入して表すことができる．ここに Λ_c は複合体の大きさの程度 (の逆数)

を表し，レプトンに関しては $e^+e^- \to l\bar{l}$ などのデータから Λ_c は，2〜3 TeV より小さくはないとわかっている[19]．さらに $g-2$ の実験から $\Lambda_c > 670$ GeV がいえている．これらの効果は一般的には断面積を減らす方向に働くが，もしプレオンが存在すればプレオンを交換する過程も存在し，p_T の大きいところではこちらの方が優勢になることがいえる．パートンやレプトンは非常によい近似で点状粒子であるからプレオンの相互作用は非常に短距離であり，実際上は点接触相互作用となる．したがってプレオンが存在するときの左巻きパートン間の反応 (LL) の実効ラグランジアンは，

$$\mathscr{L} = \frac{\eta g_s{}^2}{2\Lambda_c{}^2}\Big(\sum_{i=u,d}\bar{q}_{iL}\gamma^\mu q_{iL}\Big)\Big(\sum_{i=u,d}\bar{q}_{iL}\gamma_\mu q_{iL}\Big) + \cdots \tag{9.29}$$

と書いてよい．$\eta = \pm 1$ で，簡単のため通常は $g_s{}^2/4\pi = 1$ とおくので，Λ_c が結合の強さの目安を与えることになる．このほかに RR, LR 結合も原理的には存在するが，パラメターの数が多くなるので，LL 結合のみに話を限る．この相互作用があると，表 9.1 に与えた QCD 行列要素は変更される．Λ_c が大きければ (9.29) の寄与は小さく，干渉項のみを補正として考慮すればよい．例えば

$$\begin{aligned}
|\mathscr{M}(q\bar{q} \to q\bar{q})|^2 &= \mathrm{QCD} + \frac{8}{9} g_s{}^2 \frac{4\pi\eta}{\Lambda_c{}^2}\left(\frac{\hat{u}^2}{\hat{t}} + \frac{\hat{u}^2}{\hat{s}}\right) + O(\Lambda_c{}^{-4}) \\
|\mathscr{M}(qq \to qq)|^2 &= \mathrm{QCD} + \frac{8}{9} g_s{}^2 \frac{4\pi\eta}{\Lambda_c{}^2}\left(\frac{\hat{s}^2}{\hat{t}} + \frac{\hat{s}^2}{\hat{u}}\right) + O(\Lambda_c{}^{-4}) \\
|\mathscr{M}(q\bar{q} \to q'\bar{q}')|^2 &\fallingdotseq |\mathscr{M}(qq' \to qq')|^2 = |\mathscr{M}(q\bar{q}' \to q\bar{q}')|^2 \\
&= \mathrm{QCD} + O(\Lambda_c{}^{-4})
\end{aligned} \tag{9.30}$$

と表される[20]．η の符号は正も負もありうるので，断面積は必ずしも増えるとは限らない．図 9.6 (b)，図 9.9 (b) にはこうして Λ_c を含む効果を入れた場合の曲線 ($\eta > 0$) が示してあり，データと比較して $\Lambda_c \gtrsim 1.6$ TeV がいえる[12]．$\sqrt{s} \ll \Lambda_c$ の低エネルギー領域ではわずかな補正であるが，エネルギーが Λ_c よりはるかに大きいところでは，ちょうどハドロンのスケール〜m_π を大きく越えるとたくさんの共鳴が現れたようにプレオンの複合体の共鳴がたくさん現れる可能性もあるであろう．すなわち QCD の十分大きな $\sqrt{s}$，E_T 領域で新しい物理を探る一つの方法であり，次世代のハドロン加速器の担う課題である．

9.5 ジェットの多重生成

終状態に N 個のパートンが生成される過程は原則的には N ジェット事象として観察されるはずである．現在までに観測された最高の多重ジェット発生としては，10個のジェット現象が観測されている（図9.15）[21]．$N \geqq 3$ のジェットは，2→2 反応の終状態パートンからの子パートン発生として理解できる．しかし，グルーオン放出断面積の大きいところはグルーオンが柔らかいか（赤外発散）またはジェット主軸に平行な配位（collinear gluon）であり，ハドロンレベルでは分離がむずかしい．そこで通常は理論的にも実験的にも位相空間で

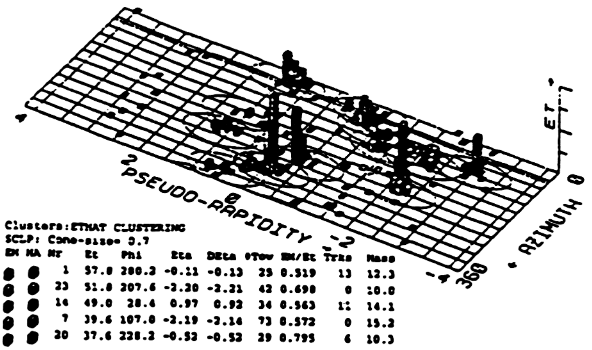


図9.15　10ジェット事象（各 $E_{JT} > 20$ GeV, CDF [21]）

十分分離できる領域のジェット配位に限って N ジェット生成を取り扱う．実験的には各ジェットの $p_{Ti} > p_{T\min}$, $|\eta_i| < \eta_{\max}$, $R_{ij} > R_{\min}$ とする．R_{ij} は η-ϕ 空間でのジェット ij 間の距離である．

$N=3$ の場合，$x_i = 2E_i / \Sigma E_i$, $\Sigma x_i = 2$, $i = 3, 4, 5$ を変数にとれば $e^+e^- \to q\bar{q}g$ のときと同じく位相空間の数密度は x_3-x_4 平面で一様で，境界は三角形のダリツプロットとなる．$x_3 \geqq x_4 \geqq x_5$ とすれば，$2/3 \leqq x_3 \leqq 1$, $1/2 \leqq x_4 \leqq 1$ であり，$x_3, x_4 \to 1$ で3ジェット配位は2ジェット配位となる．図9.16はCDFデータ[22]を示す．ダリツプロットの右上端と下端はそれぞれ赤外発散と平行配位部分に対応する．$x_i \fallingdotseq 1$ のところは発散を防ぐため切断を入れている．位相空間で一様分布ならば x_3, x_4 軸への投影は直線状になるが，データは

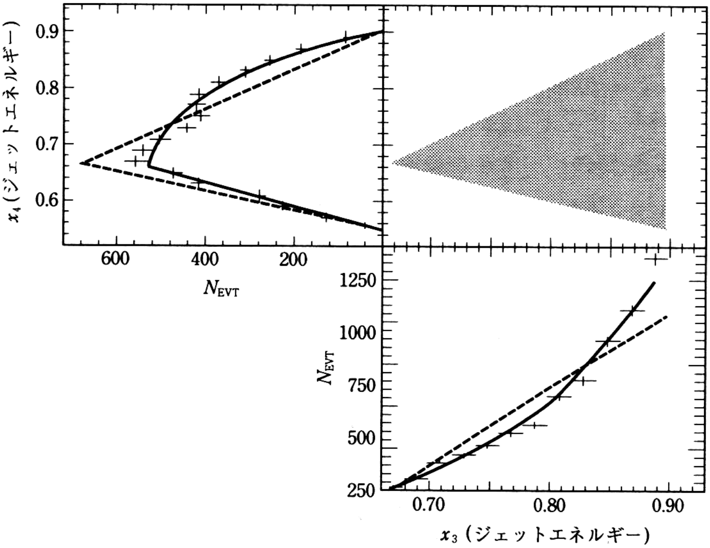
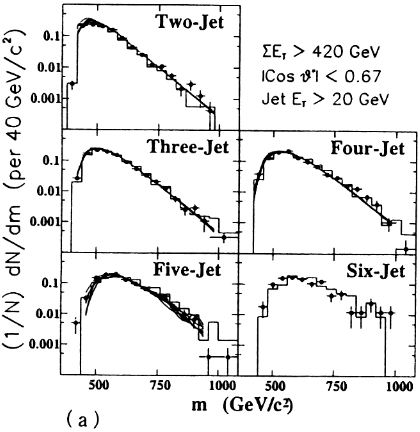


図 9.16　3ジェットデータのダリッツプロット[22)]
断面積が位相空間に比例するならば，x_3-x_4 平面で一様分布となり，x_3, x_4 に投影すると破線のようになる．実線は QCD の予想．QCD 発散を防ぐためカットを入れてある．

明らかに位相空間配置からはずれていて，QCD 計算[15,23)]がよいことを示している．

$N \geqq 3$ についての多重度および質量分布データを図 9.17 (a) に，最高エネルギーをもつジェットの角分布を図 9.17 (b) に示す[21)]．QCD 計算[24)]は現段階では第 1 近似しかないが，計算のできているところでは実験値の傾向をよく再現している．パートンシャワーモデルを使ってのシミュレーションは，$N \lesssim 6$ くらいまではデータを結構よく再現しているが，N が大きくなると過小評価する傾向が見られる．最高エネルギージェットの角分布が 2 → 2 反応の角分布とよく一致することや，発展方程式に基づくパートンシャワーモデルがデータをよく再現することは，多重ジェット発生について，2 → 2 反応＋グルーオン放出によるシャワー形成という図式がほぼ正しいことを示すといってよいであろう．



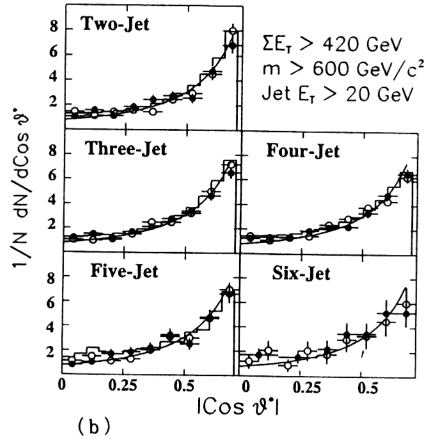


図 9.17 ジェット多重発生とパートンシャワーモデルの比較[21)]

(a) N ジェット発生のジェット質量分布，黒丸はデータ，ヒストグラムは HERWIG 予想．曲線は分布関数や $p_T{}^2$ カットを変えたときの NJETS 予言．

(b) エネルギーの一番大きいジェットの角分布．黒丸がデータ，白丸が HERWIG，ヒストグラムが NJETS，曲線はラザフォード散乱曲線 $(1-\cos\theta^*)^{-2}$

9.6 フォトン直接生成過程

p_T の大きいフォトン生成とジェット生成は密接に結びついている．しかも，主に寄与する過程がグルーオンの場合は（図 9.18 (c), (d)），ハドロン（π ま

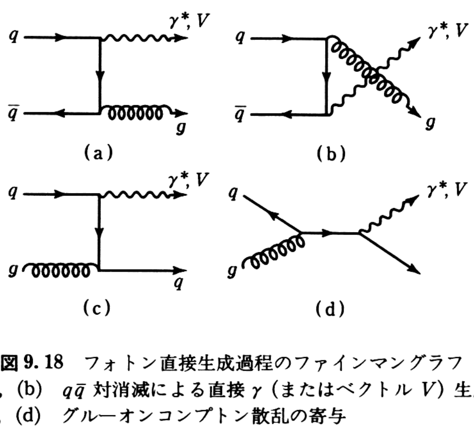


図 9.18 フォトン直接生成過程のファインマングラフ

(a), (b) $q\bar{q}$ 対消滅による直接 γ（またはベクトル V）生成

(c), (d) グルーオンコンプトン散乱の寄与

たは p) の中のグルーオン分布を探る良好のプローブともなる．フォトンは破砕化しないのでジェット再構築起因の実験的不定性を避けることができ，方向，エネルギー，数を精密に決められる利点があり，QCD 計算，ジェット処理法などに良好な比較基準を与える．行列要素は表 9.2 に掲げたが，どちらの過程が優勢になるかは実験条件による．例えば p_T のあまり大きくないところでの pp, p-原子核衝突ではグルーオンとのコンプトン散乱が効く．p_T の大きい $\bar{p}p$ 衝突では，$q\bar{q}$ 対消滅が効く．図 9.19 は p_T の大きいところでの UA2, CDF データ[1,25] と QCD 計算[26] を比較したものである．データの再現性は悪くない．

表 9.2　フォトン直接生成過程の行列要素

フォトンは仮想とし，質量 $Q^2=\hat{s}+\hat{t}+\hat{u}$ をもたせてある．実フォトンの場合は $Q^2=0$ とする．カラーとスピンについては始状態で平均，終状態で和をとってある．

過程	$\overline{\Sigma}\lvert\mathcal{M}\rvert^2/(g^2e_q{}^2)$
$q\bar{q}\to\gamma^*g$	$\dfrac{8}{3}\dfrac{\hat{t}^2+\hat{u}^2+2\hat{s}(\hat{s}+\hat{t}+\hat{u})}{\hat{t}\hat{u}}$
$gq\to\gamma q^*$	$-\dfrac{1}{3}\dfrac{\hat{s}^2+\hat{u}^2+2\hat{t}(\hat{s}+\hat{t}+\hat{u})}{\hat{s}\hat{u}}$

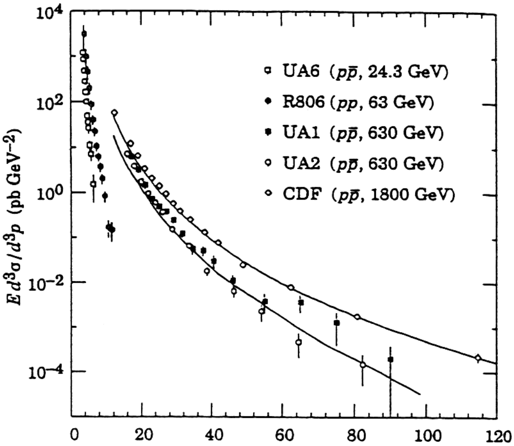


図 9.19　$\bar{p}p\to\gamma X$[25]
実線は QCD の第 2 近似計算値を示す．

9.7 重いクォーク (c, b, t) の生成

9.7.1 重いクォークの生成断面積

軽いクォーク u, d, s を q と書き，c, b, t などの重いクォークを Q と表すことにすると，$Q\bar{Q}$ 生成の最低次の過程は図 9.20 で表される．運動変数を図のようにとると行列要素は容易に計算できる．軽いクォークの質量は無視し，重いクォークの質量 M は考慮することとして $(p_1^2=p_2^2=0,\ p_3^2=p_4^2=M^2)$，スピンとカラーについて平均と和をとった行列要素の自乗は

$$\bar{\Sigma}|\mathcal{M}(q\bar{q}\to Q\bar{Q})|^2=\frac{4g^4}{9}\left[\frac{(M^2-\hat{t})^2+(M^2-\hat{u})^2+2M^2\hat{s}}{\hat{s}^2}\right] \tag{9.31}$$

$$\hat{s}=(p_1+p_2)^2, \qquad \hat{t}=(p_1-p_3)^2, \qquad \hat{u}=(p_1-p_4)^2 \tag{9.32}$$

で与えられる[2)]．各変数につけた ^ はパートンの変数ということを示す．行列要素を簡素化した形で表すために，

$$\tau_1=\frac{2(p_1p_3)}{\hat{s}}, \qquad \tau_2=\frac{2(p_2p_3)}{\hat{s}}, \qquad \rho=\frac{4M^2}{\hat{s}} \tag{9.33}$$

を導入すると (9.31) は

$$\bar{\Sigma}|\mathcal{M}(q\bar{q}\to Q\bar{Q})|^2=\frac{4g^4}{9}\left(\tau_1^2+\tau_2^2+\frac{\rho}{2}\right) \tag{9.34 a}$$

となる．同様に

$$\bar{\Sigma}|\mathcal{M}(gg\to Q\bar{Q})|^2=g^4\left(\frac{1}{6\tau_1\tau_2}-\frac{3}{8}\right)\left(\tau_1^2+\tau_2^2+\rho-\frac{\rho^2}{4\tau_1\tau_2}\right) \tag{9.34 b}$$

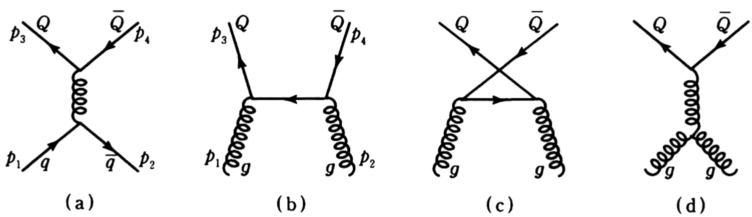


図 9.20 重いクォーク $(Q\bar{Q})$ 生成の最低次の過程
(a) 軽いクォーク対 $(q\bar{q})$ 消滅による生成
(b)~(d) グルーオン融合による生成

と表される．パートンによる $Q\overline{Q}$ 生成断面積は，上記の行列要素を (9.6) の中に代入すれば得られる．最終状態の $Q\overline{Q}$ の変数を横質量 $M_T=(p_T{}^2+M^2)^{1/2}$，ラピディティ η_3, η_4 で表すことにすると，pp 衝突による $Q\overline{Q}$ 生成断面積は，(9.14) で与えられる．実験室系でのエネルギー運動量変数を E_i, p_i とすると，各運動変数は

$$\eta_i=\frac{1}{2}\ln\left(\frac{E_i+p_{i/\!/}}{E_i-p_{i/\!/}}\right) \tag{9.35 a}$$

$$p_a=\sqrt{s}/2(x_a\,;0,0,x_a) \tag{9.35 b}$$

$$p_b=\sqrt{s}/2(x_b\,;0,0,-x_b) \tag{9.35 c}$$

$$p_3=(M_T\cosh\eta_3\,;p_T,0,M_T\sinh\eta_3) \tag{9.35 d}$$

$$p_4=(M_T\cosh\eta_4\,;-p_T,0,M_T\sinh\eta_4) \tag{9.35 e}$$

のように書ける．エネルギー運動量保存則より，

$$x_a=\frac{M_T}{\sqrt{s}}(e^{\eta_3}+e^{\eta_4}) \tag{9.36 a}$$

$$x_b=\frac{M_T}{\sqrt{s}}(e^{-\eta_3}+e^{-\eta_4}) \tag{9.36 b}$$

$$\hat{s}=2M_T{}^2(1+\cosh\varDelta\eta) \tag{9.36 c}$$

が成立する．$\varDelta\eta=\eta_3-\eta_4$ はラピディティの差である．

上記変数を使って断面積の表式を書き直すと，重いクォーク生成断面積は

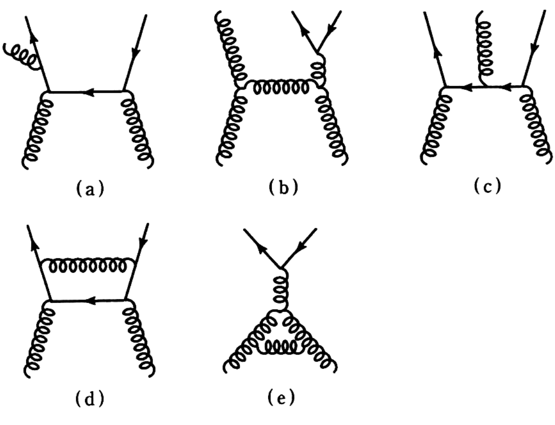


図 9.21　重いクォーク ($Q\overline{Q}$) 生成の高次過程の例
(a)～(c)　実のグルーオン発生，(d)，(e)　仮想グルーオン交換

$$\frac{d^3\sigma}{d\eta_3 d\eta_4 dp_T{}^2}=\frac{\sum_{a,b} x_a f_a(x_a) x_b f_b(x_b) \overline{\Sigma}|\mathcal{M}_{ab}|^2}{64\pi^2 M_T{}^4(1+\cosh\Delta\eta)^2} \tag{9.37}$$

$$\overline{\Sigma}|\mathcal{M}_{q\bar{q}}|^2=\frac{4g^4}{9}\left(\frac{1}{1+\cosh\Delta\eta}\right)\left(\cosh\Delta\eta+\frac{M^2}{M_T{}^2}\right) \tag{9.38 a}$$

$$\overline{\Sigma}|\mathcal{M}_{gg}|^2=\frac{g^4}{24}\left(\frac{8\cosh\Delta\eta-1}{1+\cosh\Delta\eta}\right)\left(\cosh\Delta\eta+2\frac{M^2}{M_T{}^2}-2\frac{M^4}{M_T{}^4}\right) \tag{9.38 b}$$

と表される．現在は，図 9.21 のような高次補正を入れた $O(\alpha_s{}^3)$ の理論計算ができている[27]．

9.7.2　重いクォーク生成過程の特徴

式 (9.37)，(9.38) の形を眺めれば，重いクォーク生成断面積の特徴が浮かび上がってくる．通常，断面積は交換粒子の伝播関数の分母 D が 0 になる付近の寄与が最も大きい．図 9.20 の図の各チャネルについて D を表してみると，

$$\hat{s}\text{ チャネル}：D=\hat{s}=2(p_1p_2)=2M_T{}^2(1+\cosh\Delta\eta) \tag{9.39 a}$$

$$\hat{t}\text{ チャネル}：D=\hat{t}-M^2=-2(p_1p_3)=-M_T{}^2(1+e^{-\Delta\eta}) \tag{9.39 b}$$

$$\hat{u}\text{ チャネル}：D=\hat{u}-M^2=-2(p_1p_4)=-M_T{}^2(1+e^{\Delta\eta}) \tag{9.39 c}$$

となり，M^2 のおかげで $p_T{}^2\to 0$ のとき，$p_T{}^2\sim M^2$ で切断されて，$1/p_T{}^2\to\infty$ の特異性をもたないことがわかる．QCD の結合定数 $\alpha_s(\mu)$ のスケールは $\mu^2\sim p_T{}^2$ であるから，$p_T{}^2\to 0$ の寄与が優勢になるような過程では通常 α_s が大きくなり，摂動展開は信頼できない．しかし，重いクォーク生成過程では，質量 M によって自然な切断が導入されて，$\mu\gtrsim M$ が保証される．$m_b{}^2$, $m_t{}^2\gg 1$ GeV^2 であるので b クォーク生成，そして特に t クォーク生成については摂動展開の近似のよいことがこれで保証されるのである．c クォークについては質量が小さく ($m_c\lesssim 1.5$ GeV) 必ずしもこのことは明らかではない．p_T の依存性はすべて横質量 M_T の中にあり，断面積は，M_T の大きいところでは $M_T{}^{-4}$ で減少するから，p_T の大きいところ ($p_T\gg M$) での断面積は $p_T{}^{-4}$ のように減少する．このことから，断面積に対する寄与は $p_T{}^2\sim M^2$ 付近が優勢となることがわかる．次に，$1+\cosh\Delta\eta$ という因子により，$\Delta\eta$ の大きいところで断面積は強く減少することがわかる．つまり断面積は $\Delta\eta\lesssim 1$ のところが大きく，こ

れは Q と $\bar{Q}$ のラピディティが同じところに生成される傾向があるということである．そして，反クォークまたはグルーオンの分布関数 $f_a(x)$ は，x の小さいところが大きいから，生成は x_1, x_2 がともに小さいところの中央領域に集中することがわかる．

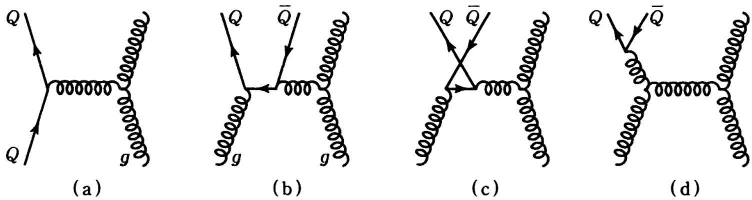


図 9.22　香りの励起過程 (a) とグルーオン励起による $Q\bar{Q}$ 発生 (b)～(d)．(a) の効果は (b)～(d) の中に含まれている．

なお高次効果には香りの励起と呼ばれる図 9.22 (a) のような過程が存在する．これはハドロンの中にはグルーオンからの励起により重いクォーク（仮想粒子）が最初から存在し，グルーオン交換によって，実の重いクォークに変換されるとする過程である．グルーオンは質量が 0 であるので，伝播関数の分母 D が $\hat{t}\to 0$ で 0 になりうる．この結果この寄与が優勢になり最低次の計算は必ずしも信頼できないのではないかという心配がある．しかし，よく調べてみると，これは図 9.22 (b)～(d) の過程の中にすでに取り入れられており，$\hat{t}\sim 0$ の特異性は相殺効果が働いて現れないこと，したがって，香りの励起過程は摂動計算に入れてはならないことがいえる[28)]．

9.7.3　データとの比較

理論的不定性は，α_s の不定性（実際には $\Lambda_{\overline{MS}}$ の不定性，$100<\Lambda_{\overline{MS}}<250$ MeV）の範囲内で α_s を変化させてみて評価することができる．そして，断面積の μ 依存性は，例えば $M/2<\mu<M$ と変化させて評価してみることが可能である．チャームの場合は $m_c/2<1$ GeV となり，必ずしも摂動計算が信用できるとは限らないであろう．にもかかわらず $m_c\sim 1.5$ GeV ととれば，摂動計算は $D\bar{D}$ 生成断面積の実験データ[29)] を比較的よく再現していることがわかる（図 9.23 (a)）．実線が $m_c=1.5$ GeV としたときの理論値で，2本の線は上記の範囲で μ を変化させたときの断面積の変化を示す．$m_c=1.2$ GeV とするとかな

り再現性が悪くなる．b クォークについてのデータ[29,30]との比較を図9.23 (b) に示す．$\sigma(p\bar{p}\to bX)$ を，$p_T > p_{T\min}$ について積分したものを $p_{T\min}$ の関数としてプロットして $O(\alpha_s^3)$ 計算[27]と比較したものである．理論は，データを比較的よく再現している[*3)]．これらのデータに裏づけられた議論から，トッ

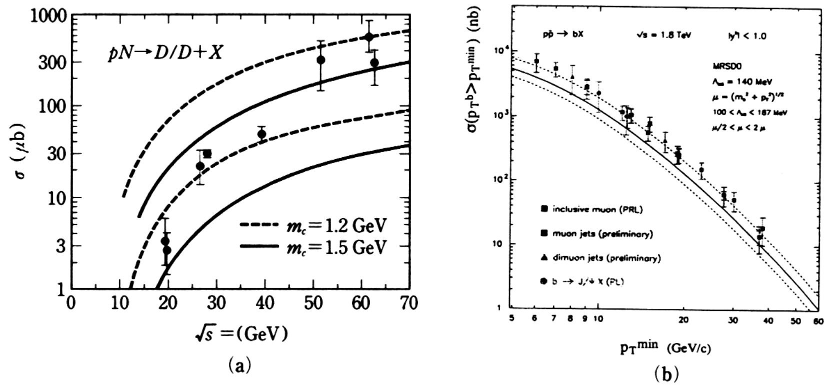


図 9.23 チャーム (a) およびボトム粒子 (b) 生成断面積[29,30]．

(a) ● データ，実線 $m_c=1.5\,\mathrm{GeV}$，破線 $m_c=1.2\,\mathrm{GeV}$ として，$m_c/2<\mu<m_c$ のスケール変化の幅を示す．

(b) $p_T > p_{T\min}$ をすべて加えた断面積と理論の比較

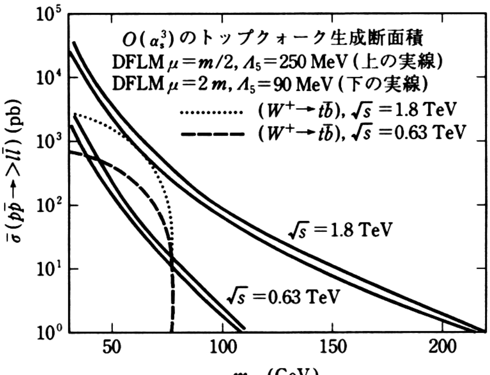


図 9.24 QCD $O(\alpha_s^3)$ 計算による $t\bar{t}$ 生成断面積[27]
実線が $p\bar{p}\to t\bar{t}+X$，ダッシュ線が $p\bar{p}\to W+X,\ W\to t\bar{b}$ を表す．

---

*3) CDF データ[31]は理論値の約2倍くらいある．また，D0のデータはQCDNLO計算と誤差の範囲で一致しているが，理論的上限のところに位置する．しかし，$\sqrt{s}=0.63\,\mathrm{TeV}$ におけるUA1データ[32]は理論と矛盾しない値をだしているので，以下は理論と実験の一致度にこのくらいの不定性があるということで議論を進める．

プ生成の断面積をかなり正確に推定できる．図 9.24 にテバトロン（$\sqrt{s}=1.8$ TeV），Sp$\bar{\text{p}}$S（$\sqrt{s}=630$ GeV）での $t\bar{t}$ 生成断面積の計算[27]を示す．帯の幅が理論的不定性を示す．この図はトップ探しのときの基本となった断面積である．

9.8　トップクォーク

9.8.1　e^-e^+ 反応によるトップクォーク探し

e^+e^- コライダーでは，$\sqrt{s}>2m_t$ であればトップがつくれる．トップクォーク生成を確認するには，$t\bar{t}$ が生成されるところでの R の変化，$\Delta R=4/3$ を測ってもよいし，しきい値を少し超えたあたりのジェット変数（スラスト T）を見ることによっても容易に判断できる（§ 8.1.3「ジェット変数の応用」参照）．トリスタンや LEP では発見されなかったことから，直ちに $m_t>45$ GeV がいえる[33]．これは m_t が標準理論で予想される以外の崩壊モードをもっていても成立するという意味で，モデルによらない普遍的な値である．しかし，e^+e^- コライダーで発見されなかった以上は，残されたチャンスはハドロンコライダーである．$\sqrt{s}=630$ GeV の Sp$\bar{\text{p}}$S で探索されたが見つからなかった[34]．1.8 TeV のテバトロンは，少なくもエネルギー的にはおよそ考えられる範囲内のすべてのトップクォーク質量の値（$m_t\lesssim 200$ GeV）に対して生成能力をもつ．そこで問題は，種々の切断を入れて偽信号を落とした後でも十分な量の信号を残すに必要な事象数，言葉を変えていえば加速器が十分な輝度を提供できるかにかかる．必要事象数を評価するには，t クォーク生成断面積と生成される t のもつ力学的性質を正確に知ることが肝要である．

9.8.2　トップクォークの崩壊モード

トップの重い質量を考慮すると，トップの崩壊モードには，標準理論以外のチャネル例えば超対称性粒子や荷電ヒッグス粒子が存在する可能性がある．すなわち $t\bar{t}$ 生成は単にトップクォークの存在を確かめるにとどまらず，新しい物理を見つける実験工場になる可能性への期待がかかる．このためには，標準

理論では崩壊モードがどうなるかという範囲を確実に抑えておかねばならない．小林-益川行列の特性から，t が直接 s または d に結合する過程は無視できるから，$m_t > m_W$ であれば t の崩壊モードは，ほぼ $t \to b + W^+$ のみで記述される．t 検出のためには，t から崩壊する W の性質を調べておくことが重要である．

わかりやすくするため，m_b を 0 とする近似をとると，W は 0 または負のヘリシティをもつ．これは次のように理解できる．t の静止系で b 放出方向に z 軸をとれば，b はヘリシティ負をもつ．t のスピンが b の方向を向いていれば，W のヘリシティは 0 である．また t のスピンが W の方向を向いていれば，W は b の方向を向きヘリシティは，負となる．次に，$t \to bW$ の崩壊率は，$W \to t\bar{b}$ と交叉対称の関係にあることを考慮すると，第 6 章 (6.6) を参照して，崩壊振幅は

$$\begin{aligned}\langle b(p_2),\ W(k, \varepsilon)|S|t(p_1)\rangle \\ = -i(2\pi)^4\delta^4(p_1 - p_2 - k) \\ \times \frac{g_W}{\sqrt{2}} V_{tb}{}^* \bar{u}(p_2)\gamma^\mu \frac{(1-\gamma^5)}{2} u(p_1)\varepsilon_\mu{}^* \end{aligned} \tag{9.40}$$

と与えられる．これから $m_b = 0$ とおく近似で，

$$\begin{aligned}\Gamma(t \to bW) = \frac{G_F m_W{}^2}{2\sqrt{2}\pi} \frac{|\boldsymbol{k}|}{m_t{}^2} |V_{tb}|^2 \\ \times [(p_1\varepsilon)(p_2\varepsilon^*) + (p_1\varepsilon^*)(p_2\varepsilon) - (p_1p_2)(\varepsilon\varepsilon^*)]\end{aligned} \tag{9.41 a}$$

ただし，$|\boldsymbol{k}|$ は t の静止系における W の運動量の絶対値で，

$$|\boldsymbol{k}| = \frac{m_t{}^2 - m_W{}^2}{2m_t} \tag{9.41 b}$$

である．これから，W の縦偏極，横偏極成分について

$$\Gamma_L = \frac{G_F m_t{}^3}{8\pi\sqrt{2}} |V_{tb}|^2 \left(1 - \frac{m_W{}^2}{m_t{}^2}\right)^2 \tag{9.42 a}$$

$$\Gamma_T = \frac{G_F m_W{}^2 m_t}{4\pi\sqrt{2}} |V_{tb}|^2 \left(1 - \frac{m_W{}^2}{m_t{}^2}\right)^2 \tag{9.42 b}$$

$$\Gamma = \Gamma_L + \Gamma_T = \frac{G_F m_t{}^3}{8\pi\sqrt{2}} |V_{tb}|^2 \left(1 - \frac{m_W{}^2}{m_t{}^2}\right)^2 \left(1 + 2\frac{m_W{}^2}{m_t{}^2}\right) \tag{9.42 c}$$

$V_{tb} \fallingdotseq 1$，$m_t \gg m_W$ を入れれば

$$\Gamma \fallingdotseq \Gamma_L \fallingdotseq \frac{G_F m_t{}^3}{8\pi\sqrt{2}} \fallingdotseq 170\,\mathrm{MeV}\left(\frac{m_t}{m_W}\right)^3 \tag{9.43}$$

すなわち，$m_t \gg m_W$ の近似では t から崩壊してできる W は縦偏極していることがわかる．

9.8.3　トップクォークの発見[35)]

a.　検出信号の特徴

トップクォーク検出に使用できる崩壊モードは，W 生成を経由して

$$t \to b + u\overline{d},\quad u\overline{s},\quad c\overline{d},\quad c\overline{s}\qquad 分岐比 \sim 2/3 \tag{9.44 a}$$

$$b + e^+\nu,\quad \mu^+\nu,\quad \tau^+\nu\qquad 分岐比 \sim 1/3 \tag{9.44 b}$$

である．b は崩壊して複数個のジェットまたはジェット＋レプトンになる．おのおののチャネルの分岐比は，クォークとレプトンの数を数えて

$$t\overline{t} \to b\overline{b} + 4\mathrm{jets}\qquad (36/81) \tag{9.45 a}$$

$$\to b\overline{b} + 2\mathrm{jets} + l\nu\qquad 3(12/81) \tag{9.45 b}$$

$$\to b\overline{b} + l_1\nu + l_2\nu (l_1 \neq l_2)\qquad 3(\ 2/81) \tag{9.45 c}$$

$$\to b\overline{b} + l_1\nu + l_2\nu (l_1 = l_2)\qquad 3(\ 1/81) \tag{9.45d}$$

となる．レプトンを含まないチャネル (9.45 a) は，QCD からのバックグラウンドが大きくて選別が困難であるが，レプトンを放出するチャネルの選別は比較的容易である．レプトンはその出所により特徴をもつので，t または b, c からのレプトンと区別ができる．

t から（W を通して）出てくるレプトンは，t の静止系で平均として少なくも $m_W/2 \sim m_t/2$ くらいのエネルギーをもつから，t の飛来方向（t のジェット軸）にローレンツブーストした後でも同程度の横運動量 p_T をもつ．したがって，このレプトンは，ビーム軸に対して大きい横運動量をもち，かつ η-ϕ 平面上でジェットから遠く離れた“孤立したレプトン”となる．孤立したレプトンとは，一般にレプトン軸を中心に $\Delta R = [\Delta\phi^2 + \Delta\eta^2]^{1/2}$ の円錐をつくり，その中に入る他の粒子のエネルギーが小さいという条件を設定するものである（図 9.25 (a))．

b が崩壊して出すレプトンは $\sim m_b/3$，チャーム崩壊から出るレプトンは $\sim m_c/3$ の横運動量をそれぞれのジェット軸に対してもつ．b クォークを同定

するのに，§4.7ではジェット軸に対する p_T が大きいという事実を使ったが，t 崩壊からの b, c は大きなエネルギーをもつからローレンツブーストも大きく，ジェットとレプトンはほとんど同じ方向に出るといってよい．この場合，レプトンはジェットの中にいるか，ほとんど密着しており，孤立したレプトンとはならない（図9.25 (b)）．またビーム軸に対する横運動量も，t からのレプトンに比べはるかに小さい．

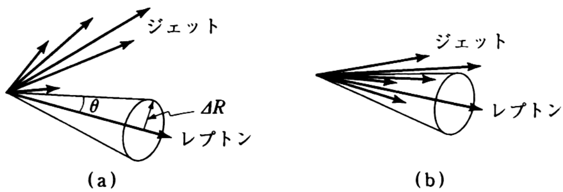


図 9.25 (a) 孤立したレプトン，(b) 孤立していないレプトン

レプトンを中心に，半径 $\Delta R=\sqrt{\Delta\phi^2+\Delta\eta^2}$ または半項角 θ の円錐をつくり，この円錐の中にあるレプトン以外の粒子のエネルギー和 $E_T=\Sigma E_{Ti}$ を測定し，

$E_T \lesssim E_{iso}$ ならば孤立している

$E_T \gtrsim E_{iso}$ ならば孤立していない

と定義する．CDFでは，$\Delta R=0.4$，$E_{iso}=5$ GeV としている．

b. 選別のための切断条件

以上を総合すると，$t\bar{t}$ 生成の際だった信号は，

(1) 1個または2個の孤立したレプトン

(2) ニュートリノの存在（大きな見えないエネルギー）

(3) 2個以上のジェットの存在

(4) b クォークの存在

ということになる．b クォークの存在は，b を含むハドロンが有限の寿命をもつことから一般に衝突点から少し離れたところにジェット発生点をもつという条件，もしくは小さな横運動量をもつレプトンを伴うジェットという条件によって他のジェットと区別ができる．

2個のレプトンを要求すれば最もクリーンな $t\bar{t}$ 信号が得られる．しかし，計数率が非常に低いので，最初の $t\bar{t}$ 信号は，1個のレプトン＋n 個のジェット（少なくも1個は b ジェットという条件つき）のチャネルで得られた[35]．主たるバックグラウンドは，W＋ジェットの直接生成からくるが，ジェットの数 n を3以上と要求すると大幅に減らせる．$t\bar{t}$ 生成反応のうち，レプトン

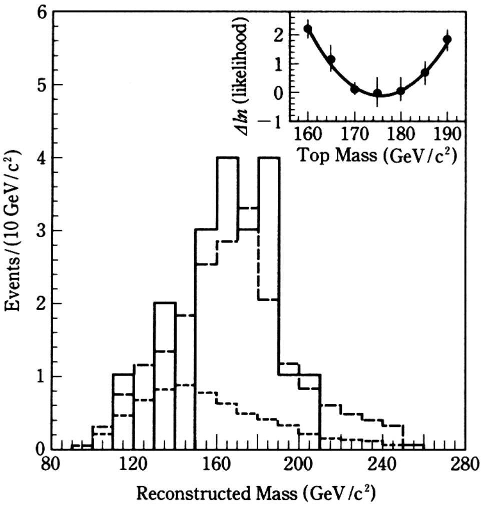


図 9.26　$p\bar{p} \longrightarrow t\bar{t}$ 反応における $W+n\,(\gtrsim 4)$ ジェット事象（実線）の質量分布[35)]
$p\bar{p} \to t\bar{t}$, $t_1, t_2 \to b+W$, $W \to l+V$ または $q_1\bar{q}_2$
点線は雑音信号（主として $W+n$ ジェットの直接生成），ダッシュ線は $t\bar{t}$ 信号＋雑音信号のモンテカルロシミュレーション．挿入図はトップ質量を変えたときの最尤関数の変化

＋4 ジェット事象 ($p\bar{p} \to t\bar{t}+X$, $t(\bar{t}) \to b(\bar{b})W$, $W_1 \to l\nu$, $W_2 \to q\bar{q}'$) についてはトップ質量を再現することが可能である．図 9.26 に CDF グループの得た $t\bar{t}$ 信号＋(W＋ジェットの背景雑音信号) についての質量分布を示す．この結果トップクォークの質量は

$$m_{\rm top} = 174 \pm 10^{+13}_{-12} \quad {\rm GeV} \tag{9.46 a}$$

と決められた．CDF と D0 を合わせた最近のデータでは

$$173.8 \pm 5.0 \quad {\rm GeV} \tag{9.46 b}$$

となっている[36)]．

上記のトップクォーク質量の値が，種々の過程の精密データを電弱相互作用反応の放射補正計算と合わせて間接的に算出したトップクォークの予想値 (PDG[1)] および§7.4 の議論，ただし $m_H = m_Z$ とする)

$$m_{\rm top} = 173 \pm 4 \quad {\rm GeV}^{*4)} \tag{9.47}$$

とよく合っていることは，標準理論の信頼性を再確認することとなった．

*4)　$m_H = 300$ GeV とすると m_t の値は 5 GeV 大きくなり，178 GeV となる．

参考文献

1) PDG : *Phys. Rev.*, **D45** (1992), **D54** (1996), EPJ. **C3** (1998)
2) 一般的な解説として, V.D. Barger and R.J.N. Philips : Collider Physics, Addison Wesley, 1987. Proton-Antiproton Collider Physics, Advanced Series on Directions in High Energy Physics, ed. G. Altarelli and L. Di Lella, World Scientiofic, 1989
M. Shapiro and J. Siegrist : *Ann. Rev. Nucl. Part. Sci.*, **41** (1991) 97
R.K. Ellis and W.J. Stirling : Fermilab-Conf-90/164-T 1988 CERN School of Physics, CERN 91-01
3) S.M. Berman, J.D. Bjorken and J.B. Kogut : *Phys. Rev.*, **D4** (1971) 3388
4) T. Akesson *et al.* : *Phys. Lett.*, **B118** (1982) 185, 193
5) UA1 ; P. Bagnaia *et al.* : *Phys. Lett.*, **B138** (1984) 430
P. Bagnaia *et al.* : *Z. Phys.*, **C20** (1983) 117
UA2 ; J.A. Appel *et al.* : *Phys. Lett.*, **165B** (1985) 44
R. Ansai, *et al.* : *Z. Phys.*, **C36** (1987) 33
6) J. Huth : Proc. DPF91, Vancouver, Aug., 1991
CDF ; *Phys. Rev.*, **D45** (1992) 2249
7) B.L. Combridge, J. Kripfganz and J. Ranft : *Phys. Lett.*, **B70** (1977) 234
8) UA2 ; J. Allitti *et al.* : *Phys. Lett.*, **B257** (1991) 232
9) CDF ; F. Abe *et al.* : *Phys. Rev. Lett.*, **68** (1992) 1104 ; *Phys. Rev.*, **D45** (1992) 2249
CDF ; P. Mêlèse : Fermilab-Conf. 97/167-E
10) B.L. Combridge and C.J. Maxwell : *Nucl. Phys.*, **B239** (1984) 429
11) D0 ; *Phys. Rev. Lett.*, **80** (1998) 666
12) CDF ; *Phys. Rev.* **D41** (1990) 1722 ; *Phys. Rev. Lett.*, **69** (1992) 2896 ; *Phys. Rev. Lett.*, **71** (1993) 2542 ; **77** (1996) 5336
13) D.W. Duke and J.F. Owens : *Phys. Rev.*, **D30** (1984) 49
14) UA1 ; G. Arnison *et al.* : *Phys. Lett.*, **B118** (1982) 185
UA2 ; P. Bagania *et al.* : *Phys. Lett.*, **B144** (1984) 283
P. Bagania *et al.* : *Z. Phys.*, **C20** (1983) 117
15) S.D. Ellis, Z. Kunst and D.E. Soper : *Phys. Rev.*, **D40** (1989) 2188 ; *Phys. Rev. Lett.*, **64** (1990) 643
16) UA1 ; *Phys. Lett.*, **B132** (1983) 214
R.D. Field : *Nucl. Phys.*, **B264** (1980) 687
17) S. Ellis, Z. Kunst and D. Soper : *Phys. Rev. Lett.*, **69** (1992) 3615
18) CDF ; *Phys. Rev. Lett.*, **70** (1993) 713
19) VENUS ; *Z. Phys.*, **C48** (1990) 13
20) E. Eichten, K. Lane and M. Peskin : *Phys. Rev. Lett.*, **50** (1983) 811
E. Eichten *et al.* : *Rev. Mod. Phys.*, **56** (1984) 579
21) CDF ; *Phys. Rev.*, **D47** (1993) 4857
CDF ; Fermilab-Pub/95-038-E

22) CDF ; *Phys. Rev.*, **D45** (1991) 1448
23) F.A. Berends *et al.* : *Phys. Lett.*, **118B** (1981) 124
F. Aversa *et al.* : *Phys. Lett.*, **B210** (1988) 225
24) Z. Kunst and W.J. Stirling : *Phys. Lett.*, **B171** (1986) 307
F.A. Berends, W.T. Giele and H. Kujif : *Phys. Lett.*, **B232** (1989) 266
F.A. Berends and H. Kujif : *Nuc. Phys.*, **B353** (1991) 59
25) UA2 ; J.A. Alitti *et al.* : *Phys. Lett.*, **B263** (1991) 544
CDF ; F. Abe *et al.* : *Phys. Rev. Lett.*, **68** (1992) 2734 ; *Phys. Rev.*, **D48** (1993) 2998 ; *Phys. Rev. Lett.*, **73** (1994) 2662
26) H. Baer, J. Ohnemus and J.F. Owens : *Phys. Lett.*, **B234** (1990) 127
27) P. Nason, S. Dawson and R.K. Ellis : *Nucl. Phys.*, **B303** (1988) 607 ; *ibid.*, **B327** (1989) 49
G. Altarelli, *et al.* : *Nucl. Phys.*, **B308** (1988) 724
P. Nason in "Heavy Flavors" in Advanced Series on Directions in High Energy Physics, ed. M. Lindner and A.J. Buras, Singapore ; World Scientific
E. Laener, J. Smith and W.L. van Neerven : *Phys. Lett.*, **B321** (1994) 254
28) J.C. Collins, D.E. Soper and G. Sterman : *Nucl. Phys.*, **B263** (1986) 37
29) UA1 ; C. Albajar *et al.* : *Phys. Lett.*, **B213** (1988) 405, **B256** (1991) 121
CDF ; F. Abe *et al.* : *Phys. Rev.*, **D50** (1994) 4252
D0 ; S. Abachi *et al.* : *Phys. Rev. Lett.*, **74** (1995) 3548
30) F. Stichelbant : Talk at XXXII Recontres de Moriond March 22-29, 1997
31) CDF ; *Phys. Rev. Lett.*, **68** (1992) 3403 ; *ibid.*, **71** (1993) 2396 ; **71** (1993) 2537 ; *Phys. Rev.*, **D50** (1994) 4252
32) C. Albjar, *et al.* : *Z. Phys.*, **C37** (1988) 505 ; *Phys. Lett.*, **B213** (1988) 405 ; **B256** (1991) 121
33) VENUS ; K. Abe *et al.* : *Phys. Lett.*, **B234** (1990) 382
OPAL ; Akrawy *et al.* : *Phys. Lett.*, **B236** (1990) 3624
ALEPH ; DeCamp *et al.* : *Phys. Lett.*, **B236** (1990) 511
34) UA2 ; T. Akesson *et al.* : *Z. Phys.*, **C46** (1990) 179
UA1 ; C. Albajar *et al.* : *Z. Phys.*, **C48** (1990) 1
35) CDF ; *Phys. Rev. Lett.*, **73** (1994) 225 ; *Phys. Rev.*, **D50** (1994) 2966
CDF ; Fermilab-Pub.-94/022-E
36) R. Partridge : Talk at Int. Conf. on High Energy Physics at Vancouver, July 23-29, 1998

付　　録

A 単位，記号，計量

a. 自然単位

本書では特に断わらない限り自然単位を使用する．すなわち，$\hbar=c=\hbar c=1$ として，すべての物理量をエネルギーで表す．通常の MKS 単位 (m, kg, s) に直すときは，$\hbar, c$ を入れて次元を合わせたうえで

$$\hbar = 1.055\times10^{-34}\ \text{joule}\cdot\text{sec} = 6.582\times10^{-22}\ \text{MeV}\cdot\text{sec}$$
$$\hbar c = 1.9733\times10^{-11}\ \text{MeV}\cdot\text{m}$$
$$1\ \text{MeV}/\text{c}^2 = 1.7827\times10^{-30}\ \text{kg}$$

を入れる．また電磁場は，$\mu_0=\varepsilon_0=1$ のヘビサイド-ローレンツ単位を使用する．

b. 3次元ベクトル

太字もしくは → を付けて表す．

$\boldsymbol{V}=(V^i=V_i\,;\,i=1,2,3)$

スカラー積：$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}=A_iB_i=A_1B_1+A_2B_2+A_3B_3$　　(A. 1)

c. ローレンツベクトル

反変ベクトル；$a^\mu(\mu=0,1,2,3)\equiv(a^0;\boldsymbol{a})=\sum_{\nu=0}^{3}g^{\mu\nu}a_\nu=g^{\mu\nu}a_\nu$　　(A. 2a)

共変ベクトル；$b_\mu(\mu=0,1,2,3)\equiv(b^0;-\boldsymbol{b})=g_{\mu\nu}b^\nu$　　(A. 2a)

ギリシャ文字の指標 μ などは 0～3 を表し，ラテン文字の指標 i, j などは，1～3 を表すものとする．

d. ローレンツスカラー

$$a\cdot b=(ab)=a^\mu b_\mu=g_{\mu\nu}a^\mu b^\nu=a^0b^0-\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} \qquad \text{(A. 3a)}$$

$$p^2=p_\mu p^\mu=p^0p^0-\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{p} \qquad \text{(A. 3b)}$$

e. マンデルシュタム変数 (≃ は，$E\gg m$ の近似)

$$s=(p_1+p_2)^2=\begin{cases} m_1{}^2+m_2{}^2+2E_1m_2\simeq 2E_1m_2 & \text{実験室系} \\ (E_1{}^*+E_2{}^*)^2 \qquad \simeq 4p^{*2} & \text{重心系} \end{cases} \qquad \text{(A. 4a)}$$

$$t=(p_1-p_3)^2\simeq\begin{cases}-2E_1E_3(1-\cos\theta) & \text{実験室系}\\ -2p^{*2}(1-\cos\theta^*) & \text{重心系}\end{cases}\tag{A.4b}$$

$$u=(p_1-p_4)^2=(p_2-p_3)^2\begin{cases}=m_2{}^2+m_3{}^2-2m_2E_3 & \text{実験室系}\\ \simeq-2p^{*2}(1+\cos\theta^*) & \text{重心系}\end{cases}\tag{A.4c}$$

B ディラック方程式

$$(i\gamma^\mu\partial_\mu-m)\psi=0,\qquad i\partial_\mu\bar{\psi}\gamma^\mu-\bar{\psi}m=0\tag{B.1}$$

B.1 平面波解 (パウリ-ディラック表示)

$$\begin{aligned}&(\not{p}-m)u_r(p)=0,\qquad (\not{p}+m)v_r(p)=0\\ &\bar{u}_r(p)(\not{p}-m)=0,\qquad \bar{v}_r(p)(\not{p}+m)=0\\ &\not{p}\equiv p_\mu\gamma^\mu\end{aligned}\tag{B.2}$$

$$\begin{aligned}&u^\dagger{}_r(p)u_s(p)=2E\delta_{rs}\\ &v^\dagger{}_r(p)v_s(p)=2E\delta_{rs}\\ &\bar{u}_r(p)u_s(p)=-\bar{v}_r(p)v_s(p)=2m\delta_{rs}\\ &\bar{u}_r(p)v_s(p)=\bar{v}_r(p)u_s(p)=0\end{aligned}\tag{B.3}$$

$$\sum_{r=\pm1/2}u_r(p)\bar{u}_r(p)=\not{p}+m,\quad \sum_{r=\pm1/2}v_r(p)\bar{v}_r(p)=\not{p}-m\tag{B.4}$$

B.2 γ 行 列

$$\begin{aligned}&\gamma^\mu\gamma^\nu+\gamma^\nu\gamma^\mu=2g^{\mu\nu}\\ &\gamma^5=\gamma_5=i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3=-\frac{i}{4!}\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^\sigma\\ &(\gamma^5)^2=1,\qquad \gamma^5\gamma^\mu+\gamma^\mu\gamma^5=0\\ &\gamma^{\mu\dagger}=\gamma^0\gamma^\mu\gamma^0\\ &\sigma^{\mu\nu}=\frac{i}{2}[\gamma^\mu,\gamma^\nu]\\ &\gamma^5\gamma_\sigma=-(i/3!)\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho\\ &\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho=g^{\mu\nu}\gamma^\rho-g^{\mu\rho}\gamma^\nu+g^{\nu\rho}\gamma^\mu-i\gamma^5\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\gamma_\sigma\end{aligned}\tag{B.5}$$

a. 荷電共役変換 C

$$\begin{aligned}&C\gamma^\mu C^{-1}=-\gamma^{\mu T}\\ &C\gamma^5C^{-1}=\gamma^{5T}\\ &C\gamma^5\gamma^\mu C^{-1}=(\gamma^5\gamma^\mu)^T\\ &C^T=C^\dagger=-C,\quad CC^\dagger=C^\dagger C=I,\quad C^2=-I\end{aligned}\tag{B.6}$$

b.　パウリ-ディラック表示

$$\boldsymbol{\alpha}=\begin{bmatrix}0 & \boldsymbol{\sigma}\\ \boldsymbol{\sigma} & 0\end{bmatrix},\quad \beta=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}=\gamma^0,\quad \boldsymbol{\gamma}=\beta\boldsymbol{\alpha}=\begin{bmatrix}0 & \boldsymbol{\sigma}\\ -\boldsymbol{\sigma} & 0\end{bmatrix}$$

$$\gamma^5=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix},\qquad C=i\gamma^2\gamma^0=\begin{bmatrix}0 & -i\sigma_2\\ -i\sigma_2 & 0\end{bmatrix} \tag{B. 7}$$

c.　ワイル（カイラル）表示

$$\boldsymbol{\alpha}=\begin{bmatrix}-\boldsymbol{\sigma} & 0\\ 0 & \boldsymbol{\sigma}\end{bmatrix},\quad \beta=\gamma^0=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{\gamma}=\begin{bmatrix}0 & \boldsymbol{\sigma}\\ -\boldsymbol{\sigma} & 0\end{bmatrix}$$

$$\gamma^5=\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix},\quad C=\begin{bmatrix}i\sigma_2 & 0\\ 0 & -i\sigma_2\end{bmatrix} \tag{B. 8}$$

パウリ-ディラック表示での ψ を ψ_D，ワイル表示での ψ を ψ_W とすると，ψ_D と ψ_W は

$$\psi_D=S\psi_W,\quad \gamma_D=S\gamma_W S^{-1},\quad S=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1 & 1\\ -1 & 1\end{bmatrix} \tag{B. 9}$$

で結ばれている．

d.　トレース計算

$$\begin{aligned}
&\gamma_\mu\gamma^\mu=4\\
&\gamma_\mu \not{A}\gamma^\mu=-2\not{A}\\
&\gamma_\mu \not{A}\not{B}\gamma^\mu=4(AB)\\
&\gamma_\mu \not{A}\not{B}\not{C}\gamma^\mu=-2\not{C}\not{B}\not{A}
\end{aligned} \tag{B. 10}$$

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Tr}[1] &&=4\\
&\mathrm{Tr}[\gamma^\mu\gamma^\nu] &&=4g^{\mu\nu}\\
&\mathrm{Tr}[\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^\sigma] &&=4[g^{\mu\nu}g^{\rho\sigma}+g^{\mu\sigma}g^{\nu\rho}-g^{\mu\rho}g^{\nu\sigma}]\\
&\mathrm{Tr}(\gamma^5\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^\sigma)&&=-4i\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\\
&\mathrm{Tr}[\gamma^{\mu_1}\gamma^{\mu_2}\cdots\gamma^{\mu_{2n+1}}]&&=0\\
&\mathrm{Tr}[\gamma^5]=\mathrm{Tr}[\gamma^5\gamma^\mu]=\mathrm{Tr}[\gamma^5\gamma^\mu\gamma^\nu]=\mathrm{Tr}[\gamma^5\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho]=0
\end{aligned} \tag{B. 11}$$

B. 3　レヴィチヴィタの反対称テンソル

$$\varepsilon^{ijk}=\varepsilon_{ijk}=\begin{cases}+1;\ ijk=123\ \text{の偶置換}\\ -1;\ ijk=123\ \text{の奇置換}\\ \ \ 0;\ \text{その他}\end{cases}$$

$$\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}=-\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}=\begin{cases}+1;\ \mu\nu\rho\sigma=0123\ \text{の偶置換}\\ -1;\ \mu\nu\rho\sigma=0123\ \text{の奇置換}\\ \ \ 0;\ \text{その他}\end{cases}$$

$$\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}=-\det(g^{\lambda\lambda'}),\quad \lambda=\mu\nu\rho\sigma,\quad \lambda'=\alpha\beta\gamma\delta$$

$$\varepsilon^{\alpha\nu\rho\sigma}\varepsilon_\alpha{}^{\beta\gamma\delta}=-\det(g^{\lambda\lambda'}),\quad \lambda=\nu\rho\sigma,\quad \lambda'=\beta\gamma\delta$$

$$\varepsilon^{\alpha\beta\rho\sigma}\varepsilon_{\alpha\beta}{}^{\gamma\delta}=-2(g^{\rho\gamma}g^{\sigma\delta}-g^{\rho\delta}g^{\sigma\gamma})$$
$$\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\sigma}\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}{}^{\delta}=-6g^{\sigma\delta}$$
$$\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}=-24 \tag{B. 12}$$

B.4 カイラル固有状態

ワイル表示で

$$\psi=\begin{bmatrix}\chi\\ \phi\end{bmatrix},\quad \psi_L=\frac{1-\gamma^5}{2}=\begin{bmatrix}\chi\\ 0\end{bmatrix},\quad \psi_R=\frac{1+\gamma^5}{2}=\begin{bmatrix}0\\ \phi\end{bmatrix} \tag{B. 13}$$

と書き，ディラック方程式 (B.1) を χ, ϕ の方程式として書き直すと

$$i(\partial_0+\boldsymbol{\sigma}\cdot\nabla)\phi=m\chi \tag{B. 14a}$$
$$i(\partial_0-\boldsymbol{\sigma}\cdot\nabla)\chi=m\phi \tag{B. 14b}$$

平面波解に対しては

$$(E-\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{p})\phi=m\chi \tag{B. 15a}$$
$$(E+\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{p})\chi=m\phi \tag{B. 15b}$$

$m=0$ であれば，χ と ϕ は分離する（ワイル解）．このとき，

χ は $E>0$ のときはヘリシティ $h=-$，$E<0$ のときは $h=+$

ϕ は $E>0$ のときはヘリシティ $h=+$，$E<0$ のときは $h=-$

$m\neq 0$ のとき，χ と ϕ をヘリシティ固有状態

$$\chi_+=\begin{bmatrix}\cos(\theta/2)\exp(-i\phi/2)\\ \sin(\theta/2)\exp(i\phi/2)\end{bmatrix},\qquad \chi_-=\begin{bmatrix}-\sin(\theta/2)\exp(-i\phi/2)\\ \cos(\theta/2)\exp(i\phi/2)\end{bmatrix}$$

で展開し，(B. 15) に入れて解けば，

$$\chi=\pm N\sqrt{\frac{E+p}{2E}}\left[\chi_-\pm\frac{m}{E+p}\chi_+\right] \tag{B. 16a}$$
$$\phi=\quad N\sqrt{\frac{E+p}{2E}}\left[\chi_+\pm\frac{m}{E+p}\chi_-\right] \tag{B. 16b}$$

N は規格化因子である．上式は E が負でも成立する．$E<0$ のとき χ は

$$\chi(E<0)=-N\sqrt{\frac{|E|+p}{2|E|}}\left[\chi_+\mp\frac{m}{|E|+p}\chi_-\right] \tag{B. 16c}$$

と書き直せるので，ヘリシティの優勢な成分が逆転することがわかる．

これから，$\psi_L\sim\chi$, $\psi_R\sim\phi$ は，ワイル解に $O(m/E)$ だけ逆ヘリシティ成分を混入した状態であることがわかる．

マヨラナ粒子

$$N_1(x)=D\begin{bmatrix}\eta(x)\\ -i\sigma_2\eta(x)^*\end{bmatrix},\qquad N_2(x)=D\begin{bmatrix}i\sigma_2\xi(x)^*\\ \xi(x)\end{bmatrix} \tag{B. 17}$$

は $N^c=N$ を満たす．これがディラック方程式を満たすという条件をワイル表示で書くと，ξ と η に対する方程式が得られる．

$$(\partial_0+\boldsymbol{\sigma}\cdot\nabla)\xi-m\sigma_2\xi^*=0 \tag{B.18a}$$

$$(\partial_0-\boldsymbol{\sigma}\cdot\nabla)\eta+m\sigma_2\eta^*=0 \tag{B.18b}$$

この式を見ればわかるように，ξ, η はそれぞれ独立でかつ異なる方程式を満たす．(B.14) 式と比較すれば，$m\to 0$ の極限で，ξ, η はそれぞれワイル解 ϕ, χ に一致することがわかる．$m\neq 0$ の場合でも，$m\ll E, p$ ならばワイル解からのズレは小さいから，ξ, η は，それぞれ右巻き，左巻き成分が優勢である．そこで，ξ, η をそれぞれ右巻き，左巻きのマヨラナ粒子と呼ぶ．ξ と η はそれぞれ独立な方程式を満たすので，一般的には，ξ のもつ質量 m_R と η のもつ質量 m_L は等しくない．

B.5　行列要素のスピン和

$$\begin{aligned}
&K^{\mu\nu}(p_i, p_f)\\
&\quad\equiv\sum_{r,s}\bar{u}_s(p_f)\gamma^\mu(a-b\gamma^5)u_r(p_i)(\bar{u}_s(p_f)\gamma^\nu(a-b\gamma^5)u_r(p_i))^*\\
&\quad=\mathrm{Tr}[\gamma^\mu(a-b\gamma^5)(\not{p}_i-m_i)\gamma^\nu(a^*-b^*\gamma^5)(\not{p}_f-m_f)]\\
&\quad=4[(|a|^2+|b|^2)\{p_i^\mu p_f^\nu+p_i^\nu p_f^\mu-g^{\mu\nu}(p_ip_f)\}+(|a|^2-|b|^2)g^{\mu\nu}m_im_f\\
&\qquad+2i\mathrm{Re}(ab^*)\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}p_{i\rho}p_{f\sigma}]
\end{aligned} \tag{B.19}$$

反粒子の場合は，$m\to -m$ とする．

良く使われる例：$e(p_1)+\mu(p_2)\to e(p_3)+\mu(p_4)$

(1)　VV 散乱；$a=1,\ b=0,\ m_i=m_f$

$$\begin{aligned}
K_V^{\mu\nu}(p_i, p_f)&=4[\{p_f^\mu p_i^\nu+p_f^\nu p_i^\mu-(p_f\cdot p_i)g^{\mu\nu}\}+m^2g^{\mu\nu}]\\
&=4[p_f^\mu p_i^\nu+p_f^\nu p_i^\mu+(q^2/2)g^{\mu\nu}]
\end{aligned} \tag{B.20}$$

$$q=p_i-p_f$$

$$\begin{aligned}
&K_V^{\mu\nu}(p_1, p_3)K_{V\mu\nu}(p_2, p_4)\\
&\quad=16[2(p_1p_2)(p_3p_4)+2(p_1p_4)(p_2p_3)+q^2\{(p_1p_3)+(p_2p_4)\}+q^4]\\
&\quad=8[(s-m^2-M^2)^2+(u-m^2-M^2)^2+2t(m^2+M^2)]\quad m_1=m_3=m,\ m_2=m_4=M\\
&\quad=16[(s-m^2-M^2)(m^2+M^2-u)+t(m^2+M^2)+t^2/2]\\
&\quad\simeq 8[s^2+u^2]\qquad s\gg m,\ M\ \text{のとき}
\end{aligned} \tag{B.21}$$

(2)　LL, LR, RL, RR 散乱

$L: a=b=1/2,\qquad R: a=-b=1/2$ のとき，

$$K_L^{\mu\nu}(p_i, p_f)=2[\{p_i^\mu p_f^\nu+p_i^\nu p_f^\mu-g^{\mu\nu}(p_ip_f)\}+i\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}p_{i\rho}p_{f\sigma}] \tag{B.22a}$$

$$K_R^{\mu\nu}(p_i, p_f)=2[\{p_i^\mu p_f^\nu+p_i^\nu p_f^\mu-g^{\mu\nu}(p_ip_f)\}-i\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}p_{i\rho}p_{f\sigma}] \tag{B.22b}$$

$$\begin{aligned}
K_L^{\mu\nu}(p_1, p_3)K_{L\mu\nu}(p_2, p_4)&=K_R^{\mu\nu}(p_1, p_3)K_{R\mu\nu}(p_2, p_4)\\
&=16(p_1p_2)(p_3p_4)=4(s-m_1^2-m_2^2)(s-m_3^2-m_4^2)\\
&\simeq 4s^2\quad(s\gg m_i^2)
\end{aligned} \tag{B.23a}$$

$$\begin{aligned}
K_L^{\mu\nu}(p_1, p_3)K_{R\mu\nu}(p_2, p_4)&=K_R^{\mu\nu}(p_1, p_3)K_{L\mu\nu}(p_2, p_4)\\
&=16(p_1p_4)(p_2p_3)=4(u-m_1^2-m_4^2)(u-m_2^2-m_3^2)
\end{aligned} \tag{B.23b}$$

$$\simeq 4u^2 \quad (s \gg m_i^2)$$

B.6 フォトンの偏極和

フォトンのもつ4元運動量を q^μ，偏極ベクトルを $\varepsilon^\mu(\lambda)$ とすると，

$$q_\mu \varepsilon^\mu(\lambda) = 0 \tag{B.24}$$

実のフォトンは横偏極のみをもつが，仮想フォトン ($q^2 \neq 0$) は縦偏極ももつ．$q^2 > 0$ のとき静止系で偏極ベクトルはそれぞれ

$$\begin{aligned} \varepsilon^\mu(\pm) &= (0; \mp 1/\sqrt{2}, -i/\sqrt{2}, 0) \\ \varepsilon^\mu(0) &= (0; 0, 0, 1) \end{aligned} \tag{B.25}$$

共変的場の理論の扱いのため，スカラー偏極ベクトルを定義する．

$q^2 = Q^2 \geqq 0$ のとき

$$\varepsilon^\mu(s) = (1; 0, 0, 0) \tag{B.26a}$$

$q^\mu = (\omega; 0, 0, |\boldsymbol{q}|)$ の系では，

$$\varepsilon^\mu(0) = (|\boldsymbol{q}|/M; 0, 0, \omega/M), \qquad \varepsilon^\mu(s) = (\omega/M; 0, 0, |\boldsymbol{q}|/M) = q^\mu/\sqrt{q^2} \tag{B.26b}$$

これらの偏極ベクトルは規格直交条件と

$$\varepsilon(\lambda) \cdot \varepsilon(\lambda')^* = \varepsilon_\mu(\lambda) \varepsilon^\mu(\lambda')^* = g^{\lambda\lambda'} \tag{B.27}$$

と完全性の条件を満たす．

$$\sum_{\lambda=\text{all}} \varepsilon^\mu(\lambda) \varepsilon^\nu(\lambda)^* \equiv -\sum g^{\lambda\lambda} \varepsilon^\mu(\lambda) \varepsilon^\nu(\lambda)^* = -g^{\mu\nu} \tag{B.28a}$$

$$\sum_{\lambda=\pm} \varepsilon^\mu(\lambda) \varepsilon^\nu(\lambda)^* = \delta_{ij} - \frac{q_i q_j}{|\boldsymbol{q}|^2} \quad (\mu, \nu = i, j), \quad 0 (\mu, \nu = 0) \tag{B.28b}$$

$$\sum_{\lambda=\pm,0} \varepsilon^\mu(\lambda) \varepsilon^\nu(\lambda)^* = -\left(g^{\mu\nu} - \frac{q^\mu q^\nu}{q^2} \right) \tag{B.28c}$$

$q^2 = -Q^2 < 0$ のときは，$q^\mu = (q^0; \boldsymbol{q})$ とおいて，

$$\varepsilon^\mu(0) = (|\boldsymbol{q}|; 0, 0, q^0)/\sqrt{-q^2} = (1; 0, 0, 0) \tag{B.29a}$$

$$\varepsilon^\mu(s) = (q^0; 0, 0, |\boldsymbol{q}|)//\sqrt{-q^2} = (0; 0, 0, 1) \tag{B.29b}$$

第2式はブライト系 ($q^0 = 0$ の系) で成立する．$q^2 > 0$ のときに比べて時間空間成分が入れ替わっていることに伴い，規格化と完全性は一部次のように変更される．

$$\varepsilon(\lambda) \cdot \varepsilon(\lambda')^* = \varepsilon_\mu(\lambda) \varepsilon^\mu(\lambda')^* = (-1)^{\lambda+1} g^{\lambda\lambda'} \tag{B.30a}$$

$$\sum_{\lambda=\pm,0} (-1)^{\lambda+1} \varepsilon^\mu(\lambda) \varepsilon^\nu(\lambda)^* = -\left(g^{\mu\nu} - \frac{q^\mu q^\nu}{q^2} \right) \tag{B.30b}$$

$$\sum_{\lambda=\text{all}} (-1)^{\lambda+1} \varepsilon^\mu(\lambda) \varepsilon^\nu(\lambda)^* = -g^{\mu\nu} \tag{B.30c}$$

C 断 面 積

C.1 S 行列と状態密度

体積 V の中に粒子が $2E$ 個あるように状態密度を規格化する．このとき，$E \sim E$

$+\mathrm{d}E$ の中にある粒子の状態密度は，

$$\mathrm{d}N=\frac{V}{(2\pi)^3}\frac{\mathrm{d}^3p}{2E} \tag{C.1}$$

$$\langle p|q\rangle=2E(2\pi)^3\delta(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{q}) \tag{C.2}$$

S 行列と不変散乱行列 T，不変行列要素 $\mathcal{M}$ を次式で定義する．

$$S=1-iT$$

$$S_{fi}=\delta_{fi}-i(2\pi)^4\delta^4(p_1+p_2-\sum_f p_f)\mathcal{M}_{fi} \tag{C.3}$$

断面積は，

$$\mathrm{d}\sigma=|\mathcal{M}_{fi}|^2\frac{\mathrm{d}LIPS}{F} \tag{C.4}$$

$$F=4E_1E_2v_{12}=4[(p_1\cdot p_2)^2-m_1{}^2m_2{}^2]^{1/2}=2s\lambda(1,x_1,x_2)$$

$$s=(p_1+p_2)^2,\qquad x_i=m_i^2/s$$

$$\lambda(x,y,z)=(x^2+y^2+z^2-2xy-2yz-2zx)^{1/2} \tag{C.5}$$

$$\mathrm{d}LIPS=(2\pi)^4\delta^4(p_1+p_2-\Sigma p_f)\frac{1}{m!}\prod_f\frac{\mathrm{d}^3p_f}{(2\pi)^3 2E_f} \tag{C.6}$$

で与えられる．F は入射フラックス，v_{12} は相対速度，$m!$ は同一粒子が存在する場合の補正因子である．崩壊率は，親の粒子の指標を 2 とするとき，$p_1=0$, $F=2m_2$ とおいて得られる．

$$\mathrm{d}\Gamma=|\mathcal{M}_{fi}|^2\frac{\mathrm{d}LIPS}{2m_2} \tag{C.7}$$

C.2　終状態が 2 体系の断面積

a.　重心系の断面積

重心系での全エネルギーを W と書くと

$$v_{12}=\left|\frac{p_1}{E_1}-\frac{p_2}{E_2}\right|=\frac{p_iW}{E_1E_2},\qquad W=E_1+E_2=\sqrt{s} \tag{C.8}$$

$$\therefore\quad F=4E_1E_2v_{12}=4p_iW \tag{C.9}$$

ただし，p_i は始状態の運動量を示す．

$$\mathrm{d}LIPS_{CM}=\frac{1}{16\pi^2}\delta(W-E_3-E_4)\delta^3(p_3+p_4)\frac{\mathrm{d}^3p_3\mathrm{d}^3p_4}{E_3E_4} \tag{C.10}$$

$\int\mathrm{d}^3p_4$ によって，運動量の積分は 1 を与えるが，同時にエネルギーの中の運動量をも変える．$\int\mathrm{d}^3p_3$ を実行するためには，δ 関数の中の p_3 を含む関数を G として，重心系の終状態運動量 p_f で表すと

$$G=E_3+E_4=\sqrt{p_f{}^2+m_3{}^2}+\sqrt{p_f{}^2+m_4{}^2} \tag{C.11}$$

$$\frac{\partial G}{\partial p_f}=\frac{p_f}{E_3}+\frac{p_f}{E_4}=\frac{p_fW}{E_3E_4}$$

$$\therefore \quad \frac{\mathrm{d}LIPS_{CM}}{F}=\frac{1}{4p_iW}\left[\frac{\partial G}{\partial p_f}\right]^{-1}\frac{p_f{}^2\mathrm{d}\Omega_{CM}}{16\pi^2E_3E_4}=\frac{1}{64\pi^2s}\left(\frac{p_f}{p_i}\right)\mathrm{d}\Omega_{CM}$$

$$\therefore \quad \frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega_{CM}}=\left(\frac{p_f}{p_i}\right)\frac{1}{64\pi^2s}|\mathcal{M}_{fi}|^2 \tag{C. 12}$$

b. 実験室系の断面積

簡単のため，$m_1=m_3=0$, $m_2=m_4=M$ の場合に限る．

$$F=4E_1E_2v_{12}=4E_1M(p_1/E_1)=4p_1M \tag{C. 13}$$

位相体積は，

$$\mathrm{d}LIPS_{LAB}=(2\pi)^4\delta(E_1+M-E_3-E_4)\delta^3(p_1-p_3-p_4)\times\frac{\mathrm{d}^3p_3\mathrm{d}^3p_4}{(2\pi)^6 4E_3E_4} \tag{C. 14}$$

$\int\mathrm{d}^3p_4$ は 1 を与えるが，同時にエネルギー E_4 の中の運動量をも変える．$\int\mathrm{d}^3p_3$ を実行するためには，δ 関数の中の p_3 を含む関数を G として，

$$G\equiv E_3+E_4=p_3+\sqrt{(\boldsymbol{p}_1-\boldsymbol{p}_3)^2+M^2}$$
$$=p_3+\sqrt{p_1{}^2+p_3{}^2-2p_1p_3\cos\theta+M^2}$$
$$\therefore \quad \frac{\partial G}{\partial p_3}=1+\frac{p_3-p_1\cos\theta}{E_4}=\frac{1}{E_4}(E_4+p_3-p_1\cos\theta)$$
$$=(E_1+M-p_1\cos\theta)/E_4=(M+p_1(1-\cos\theta))/E_4$$

ここで，$q=p_1-p_3=p_4-p_2$ を導入する．

$$p_4{}^2=(p_4-p_2+p_2)^2=(q+p_2)^2=q^2+2(p_2q)+p_2{}^2$$
$$\therefore \quad -q^2=2p_2q=2M(E_1-E_3)=2M(p_1-p_3)$$
$$=-(p_1-p_3)^2=2p_1p_3(1-\cos\theta)$$
$$\therefore \quad p_1(1-\cos\theta)=\frac{M}{p_3}(p_1-p_3) \tag{C. 15}$$

これを $\dfrac{\partial G}{\partial p_3}$ の式に入れて，

$$\frac{\partial G}{\partial p_3}=\frac{p_1M}{p_3E_4} \tag{C. 16}$$

$$\frac{\mathrm{d}LIPS_{LAB}}{F}=\frac{1}{4p_1M}\left[\frac{\partial G}{\partial p_f}\right]^{-1}\frac{p_3{}^2\mathrm{d}\Omega_{LAB}}{16\pi^2E_3E_4}=\frac{p_3{}^2\mathrm{d}\Omega_{LAB}}{64\pi^2(Mp_1)^2} \tag{C. 17}$$

$$\therefore \quad \frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega_{LAB}}=\left(\frac{p_3}{p_1}\right)^2\frac{1}{64\pi^2M^2}|\mathcal{M}_{fi}|^2 \tag{C. 18}$$

c. 不変断面積

しばしば役にたつ表記法として，立体角の代わりに不変量 t を使うやり方がある．重心系で評価すると，

$$t=q^2=m_1{}^2+m_3{}^2-2(E_1E_3-p_1p_3\cos\theta)$$

$$p_1=\frac{\sqrt{s}}{2}\lambda\left(1,\frac{m_1{}^2}{s},\frac{m_2{}^2}{s}\right)\simeq\frac{s-M^2}{2\sqrt{s}} \tag{C. 19a}$$

$$\therefore \quad \mathrm{d}t = 2p_1p_3 d\cos\theta = \frac{p_1p_3}{\pi}\mathrm{d}\Omega_{CM} \tag{C. 19b}$$

$$\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}t} = \frac{\pi}{p_1p_3}\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega_{CM}} = \frac{|\mathcal{M}_{fi}|^2}{16\pi\lambda(s, m_1{}^2, m_2{}^2)} \simeq \frac{|\mathcal{M}_{fi}|^2}{16\pi(s-M^2)^2} \tag{C. 20}$$

(C.19), (C.20) の最後の式は，$m_1 \simeq 0$, $m_2 = M$ のとき成立する．

C. 3　パートン（スケーリング）変数

$$y \equiv \frac{(p_2q)}{(p_1p_2)} \simeq \frac{s+u}{s} \simeq \begin{cases} \dfrac{E_1-E_3}{E_1} \equiv \dfrac{\nu}{E_1} & \text{（実験室系）} \\ \dfrac{1-\cos\theta}{2} & \text{（重心系）} \end{cases} \tag{C. 21a}$$

ただし，$q = p_1 - p_3$

$$x \equiv \frac{-q^2}{2(p_2q)} = \frac{Q^2}{2M\nu} \simeq \frac{E_1E_3(1-\cos\theta)}{M(E_1-E_3)} \simeq \frac{Q^2}{sy} \tag{C. 21b}$$

$\simeq$ はスケーリング極限（$E_i \gg m_i$, $Q^2, 2M\nu \gg (1\,\mathrm{GeV})^2$）の近似式である．

$$\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}y} \simeq 4\pi\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega}\bigg|_{CM} = E_1\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}E_3}\bigg|_{LAB} \tag{C. 22}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2\sigma}{\mathrm{d}x\mathrm{d}y} \simeq 2\pi M\frac{y}{1-y}\frac{\mathrm{d}^2\sigma}{\mathrm{d}\Omega\mathrm{d}E_3}\bigg|_{LAB} \tag{C. 23}$$

C. 4　役に立つ関係式

$$\begin{aligned} &A+B+C \\ &\equiv (2\pi)^4\delta^4(P-p_3-p_4)\frac{\mathrm{d}^3p_3\mathrm{d}^3p_4}{(2\pi)^6 2E_3 2E_4}[a + b_\mu p_3{}^\mu + c_{\mu\nu}p_3{}^\mu p_4{}^\nu] \\ &= \frac{\lambda(1, x, y)}{8\pi}\bigg[a + b_\mu P^\mu\frac{(1+x-y)}{2} \\ &\quad + c_{\mu\nu}\frac{1}{2}\Big\{(1-x-y)P^\mu P^\nu - \frac{\lambda^2(1, x, y)}{6}(4P^\mu P^\nu - P^2g^{\mu\nu})\Big\}\bigg] \end{aligned} \tag{C. 24}$$

ただし，

$$x = \frac{m_3{}^2}{P^2}, \qquad y = \frac{m_4{}^2}{P^2}$$

特に，$m_3 = m_4 = 0$ の場合は

$$A = \frac{a}{8\pi}, \quad B = \frac{b_\mu P^\mu}{16\pi}, \quad C = \frac{c_{\mu\nu}}{96\pi}(2P^\mu P^\nu + P^2g^{\mu\nu}) \tag{C. 25}$$

C. 5　コンプトン散乱

$$\gamma^*(k) + e(p) \longrightarrow \gamma(k') + e(p')$$

仮想フォトン γ^* のコンプトン散乱公式を与えておく．フォトンは，$k^2 = -Q^2$ の不変質量をもつ仮想フォトンとする．

$$\mathcal{M}_{fi}=e^2\bar{u}(p')\left[\not{\varepsilon}'^*\frac{\not{k}+\not{p}+m}{s-m^2}\not{\varepsilon}+\not{\varepsilon}\frac{\not{p}-\not{k}'+m}{u-m^2}\not{\varepsilon}'^*\right]u(p) \tag{C.26}$$

ここで $\not{\varepsilon}=\gamma^\nu\varepsilon_\nu$ である．これから $|\mathcal{M}_{fi}|^2$ のトレース計算を行い，高エネルギー近似をとって，質量 m を無視すると

$$|\overline{\mathcal{M}}(\gamma^* e\to\gamma e)|^2=2e^4\left(-\frac{u}{s}-\frac{s}{u}+\frac{2Q^2t}{su}\right) \tag{C.27}$$

断面積は

$$\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}t}=\frac{|\overline{\mathcal{M}}_{fi}|^2}{16\pi(s-m^2)^2}\simeq\frac{2\pi\alpha^2}{s^2}\left(-\frac{u}{s}-\frac{s}{u}+\frac{2Q^2t}{su}\right) \tag{C.28}$$

C.6　分割関数の計算法[1)]

B を仮想粒子として，A → B の分割関数 P_{BA} を求める．ワイゼッカー-ウィリアムス流に，A+D → C+F という過程を A → B+C, B+D → F と分けて考え，粒子 A が粒子 B というビームフラックスを提供すると見なす (図 C.1).

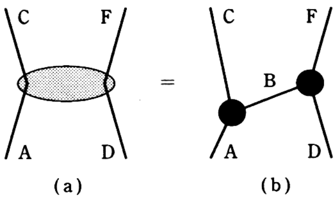


図 C.1　P 関数を求めるための A+D → C+F を A → B+C, B+D → F と分解するの図

$$\mathrm{d}\sigma(\mathrm{A+D\to C+F})=\mathrm{d}P(z,Q^2)\mathrm{d}z\mathrm{d}\sigma(\mathrm{B+D\to F})$$
$$\equiv\frac{\alpha_s}{2\pi}P_{\mathrm{BA}}(z)\mathrm{d}z\,\mathrm{d}\ln(Q^2)\mathrm{d}\sigma(\mathrm{B+D\to F}) \tag{C.29}$$

とおくと，$\mathrm{d}P(z,Q^2)$ が望みのフラックスを与えるので，P_{BA} が定義できる．Q^2 は，A → B+C の中の仮想粒子の不変質量の 2 乗である．以下の計算では，運動学変数は運動量無限大の系で考察する．質量を無視するが，粒子は常に質量殻上にあるとし，仮想状態への遷移ではエネルギーが保存しないと考えると，直観的に対応が付けやすい時間順序を考える摂動論方式が便利である．この場合

$$\mathcal{M}(\mathrm{AD\to CF})=\frac{\mathcal{M}(\mathrm{A\to BC})\mathcal{M}(\mathrm{BD\to F})}{2E_{\mathrm{B}}(E_{\mathrm{A}}-E_{\mathrm{B}}-E_{\mathrm{C}})}=\frac{gV(\mathrm{A\to BC})\mathcal{M}(\mathrm{BD\to F})}{2E_{\mathrm{B}}(E_{\mathrm{A}}-E_{\mathrm{B}}-E_{\mathrm{C}})} \tag{C.30}$$

である．ここに分母の $2E_{\mathrm{B}}$ は状態和の規格化因子として，$E_{\mathrm{A}}-E_{\mathrm{B}}-E_{\mathrm{C}}$ は E_i-E_n (n=中間状態) からでてくる量である．

$$\mathrm{d}\sigma(\mathrm{AD\to CF})=\frac{1}{F_{\mathrm{AD}}}|\mathcal{M}(\mathrm{AD\to CF})|^2(2\pi)^4\delta^4(\mathrm{A+D-C-F})\frac{\mathrm{d}^3p_{\mathrm{C}}\mathrm{d}^3p_{\mathrm{F}}}{(2\pi)^6 4E_{\mathrm{C}}E_{\mathrm{F}}}$$

$$= \frac{F_{BD}}{F_{AD}} \frac{g^2 |V(A \to BC)|^2}{[2E_B(E_A - E_B - E_C)]^2} \frac{d^3 p_C}{(2\pi)^3 2E_C}$$
$$\times \frac{|\mathcal{M}(BD \to F)|^2}{F_{BD}} (2\pi)^4 \delta^4 (B + D \to F) \frac{d^3 p_F}{(2\pi)^3 2E_F} \qquad (C.31)$$

$F_{AB}(=4[(p_A p_B)^2 - p_A{}^2 p_B{}^2]^{1/2})$ は粒子 A と粒子 B の間のフラックス因子である．運動量無限大の系では，各粒子の質量を無視してエネルギー運動量を，$p^\mu = (E; p_T, p_{/\!/})$ のように縦運動量と横運動量で表し次のようにとる．

$$p_A = (p; 0, p)$$
$$p_B = \left(zp + \frac{p_T{}^2}{2zp}; p_T, zp\right)$$
$$p_C = \left((1-z)p + \frac{p_T{}^2}{2(1-z)p}; -p_T, (1-z)p\right) \qquad (C.32)$$

この変数を使うと

$$[2E_B(E_A - E_B - E_C)]^2 \simeq \frac{p_T{}^4}{(1-z)^2} \qquad (C.33a)$$
$$\frac{d^3 p_C}{(2\pi)^3 2E_C} \simeq \frac{dz\, dp_T{}^2}{16\pi^2 (1-z)} \qquad (C.33b)$$
$$\frac{F_{BD}}{F_{AD}} \fallingdotseq \frac{(p_B p_D)}{(p_A p_D)} = z \qquad (C.33c)$$

であるので，(C.31) に入れ，スピンについて終状態の和と始状態の平均をとると ($\overline{\Sigma}$ と書く)，

$$d\sigma(A + D \to C + F) = \frac{\alpha_s}{2\pi} \frac{z(1-z)}{2} \overline{\sum_{\text{spin}}} \frac{|V(A \to BC)|^2}{p_T{}^2} dz \frac{dp_T{}^2}{p_T{}^2} d\sigma(BD \to F) \quad (C.34)$$

$d\ln(p_T{}^2) \simeq d\ln(Q^2)$ であるので (C.29) と比べて，

$$P_{BA}(z) = \frac{z(1-z)}{2} \overline{\sum_{\text{spin}}} \frac{V(A \to BC)|^2}{p_T{}^2} \qquad (z < 1) \qquad (C.35)$$

グルーオンについては，横偏極の寄与のみ足し上げるものとする．

QED の計算例：　$\alpha_s \to \alpha$ とし

$$\overline{\Sigma} |V(A \to BC)|^2 = (1/2) \Sigma |\bar{u}(p_C) \gamma^\mu u(p_A) \varepsilon_\mu (p_B)|^2$$
$$= 4\left[(\boldsymbol{p}_A \cdot \boldsymbol{p}_C) - \frac{(\boldsymbol{p}_A \cdot \boldsymbol{p}_B)(\boldsymbol{p}_C \cdot \boldsymbol{p}_B)}{|\boldsymbol{p}_B|^2} - \frac{(p_A - p_C)^2}{2}\right] \qquad (C.36)$$

に，(C.32) を入れて計算してやると，

$$P_{BA}(z) = \frac{1 + (1-z)^2}{z} \qquad (C.37)$$

となる．これは，カラー因子 (始状態平均 (1/3)×終状態グルーオン和 8×(1/2)($\alpha^2 \to \alpha_s{}^2/2$)=4/3) を考慮すれば，本文中のグルーオンの分割関数と同一である．ここで，Q^2 の上下限を計算するため，(C.32) で質量項を残す．p_A のエネルギー項を，$p \to p + m_e{}^2/2p$, p_c では $p_T{}^2 \to p_T{}^2 + m_e{}^2$ とすると，

$$Q^2 = -(p_A - p_C)^2 \simeq p_T{}^2/(1-z) + z^2 m_e{}^2/(1-z)$$

となるから，$p_T=(1-z)p\sin\theta\sim(1-z)p\theta$ を使えば，

$$Q^2{}_{\min}=z^2m_e{}^2/(1-z), \qquad Q^2{}_{\max}=(1-z)p^2\theta_{\max}{}^2$$

が得られる．$\mathrm{d}p_T{}^2/p_T{}^2=\mathrm{d}Q^2/Q^2$ であるから，(C.34) を積分して ln の中の $p(=E)$，m_e 以外は無視すると，

$$\sigma(eA\to e'A')=\frac{\alpha}{\pi}\int\frac{1+(1-z)^2}{z}\ln\left(\frac{E}{m_e}\right)\sigma(\gamma A\to A';z)\mathrm{d}z \tag{C. 38}$$

これはワイゼッカー-ウィリアムスの式として知られる[2]．

C.7 崩　壊　率

a．π 崩　壊

$$\pi(k)\longrightarrow\mu(p)+\nu(q)$$

遷移振幅は

$$T_{fi}=(2\pi)^4\delta^4(k-p-q)(G_F'V_{ud}/\sqrt{2})\langle 0|\bar{u}\gamma^\mu(1-\gamma^5)\mathrm{d}|k\rangle$$
$$\times\langle p,q|\bar{\mu}\gamma_\mu(1-\gamma^5)\nu_\mu|0\rangle \tag{C. 39a}$$

$$\frac{G_F'}{\sqrt{2}}=\frac{g_W{}^2/8}{m_W{}^2-k^2}=\frac{G_F/\sqrt{2}m_W{}^2}{m_W{}^2-k^2}\simeq\frac{G_F}{\sqrt{2}} \tag{C. 39b}$$

となる．ただし，u, d は u, d クォークの場の演算子である．ハドロン部分は強い相互作用の補正が入るので，第 1 原理からの計算は簡単にはできない．π は負のパリティをもつので，ローレンツ不変性より

$$\langle 0|\bar{u}\gamma^\mu\mathrm{d}|k\rangle=0, \qquad \langle 0|\bar{u}\gamma^\mu\gamma^5\mathrm{d}|k\rangle=ik^\mu f_\pi \tag{C. 40}$$

f_π を π の崩壊定数という．エネルギー運動量の保存則とディラック方程式から

$$k_\lambda\langle p,q|\bar{\mu}\gamma^\lambda(1-\gamma^5)\nu|0\rangle=(p+q)_\lambda\bar{u}(p)\gamma^\lambda(1-\gamma^5)v(q)$$
$$=m_\mu\bar{u}(p)(1-\gamma^5)v(q) \tag{C. 41}$$

したがって遷移行列は

$$T_{fi}=(2\pi)^4\delta^4(k-p-q)(G_F'V_{ud}/\sqrt{2})if_\pi m_\mu\bar{u}(p)(1-\gamma^5)v(q) \tag{C. 39c}$$

なので，崩壊率は容易に計算できて

$$\Gamma(\pi\to\mu\nu)=(G_F'V_{ud}f_\pi)^2\frac{m_\mu{}^2}{8\pi}\frac{(m_\pi{}^2-m_\mu{}^2)^2}{m_\pi{}^3} \tag{C. 42}$$

崩壊率の観測値より崩壊定数が

$$f_\pi=131.74\pm0.15\ \mathrm{MeV}=0.94m_\pi \tag{C. 43}$$

と決められる．

b．μ 崩　壊

$$\mu^-(p_1)\longrightarrow e^-(p_4)+\bar{\nu}_e(p_2)+\nu_\mu(p_3)$$

遷移振幅は

$$T_{fi}=(2\pi)^4\delta^4(p_1-p_2-p_3-p_4)(G_F/\sqrt{2})[\bar{u}(p_3)\gamma^\mu(1-\gamma^5)u(p_1)]$$
$$\times\bar{u}(p_4)\gamma_\mu(1-\gamma^5)v(p_2) \tag{C. 44}$$

偏極していない μ の場合はスピンの和と平均をとって，

$$\mathrm{d}\Gamma=(1/2m_\mu)|\overline{\mathcal{M}}|^2\mathrm{d}LIPS \tag{C. 45a}$$

$$|\mathcal{M}|^2=(G_F/\sqrt{2})^2(16/2)K_L{}^{\mu\nu}(p_1, p_3)K_{L\mu\nu}(p_2, p_4) \tag{C. 45b}$$

ただし，

$$K_L{}^{\mu\nu}(p_1, p_3)=(1/4)\Sigma\bar{u}(p_3)\gamma^\mu(1-\gamma^5)u(p_1)\{\bar{u}(p_3)\gamma^\nu(1-\gamma^5)u(p_1)\}^*$$
$$=2[\{p_1{}^\mu p_3{}^\nu+p_1{}^\nu p_3{}^\mu-g^{\mu\nu}(p_1p_3)\}+i\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}p_{1\rho}p_{3\sigma}]$$
$$K_L{}^{\mu\nu}(p_1, p_3)K_{L\mu\nu}(p_2, p_4)=16(p_1p_2)(p_3p_4)$$

である (付録 (B.19), (B.23) 参照).

$$\therefore\quad \mathrm{d}\Gamma=\frac{64G_F{}^2(p_1p_2)(p_3p_4)}{2m_\mu(2\pi)^5}\frac{\mathrm{d}^3p_2\mathrm{d}^3p_3\mathrm{d}^3p_4}{8E_2E_3E_4}\delta^4(p_1-p_2-p_3-p_4) \tag{C. 46a}$$

付録 (C.24) より，粒子 2 と粒子 3 の質量が 0 であるとき

$$S^{\mu\nu}\equiv\int p_2{}^\mu p_3{}^\nu\frac{\mathrm{d}^3p_2\mathrm{d}^3p_3}{4E_2E_3}\delta^4(p_1-p_2-p_3-p_4)=\frac{\pi}{24}[g^{\mu\nu}\Delta^2+2\Delta^\mu\Delta^\nu]$$
$$\Delta^\mu=p_1{}^\mu-p_4{}^\mu=p_2{}^\mu+p_3{}^\mu,\qquad \Delta^2=\Delta_\mu\Delta^\mu \tag{C. 47}$$

であるので，

$$\mathrm{d}\Gamma=\frac{G_F{}^2(p_{1\mu}S^{\mu\nu}p_{4\nu})}{2m_\mu\pi^5}\frac{\mathrm{d}^3p_4}{E_4} \tag{C. 46b}$$

電子の質量を無視すれば

$$\frac{\mathrm{d}\Gamma}{\mathrm{d}x}=\frac{G_F{}^2m_\mu{}^5}{96\pi^3}x^2(3-2x),\quad x=\frac{2E_4}{m_\mu},\quad 0\leqq x\leqq 1 \tag{C. 48}$$

$$\Gamma=\frac{G_F{}^2m_\mu{}^5}{192\pi^3} \tag{C. 49a}$$

を得る．また電子の質量を無視しない場合は

$$\Gamma=\frac{G_F{}^2m_\mu{}^5}{192\pi^3}f\left(\frac{m_e{}^2}{m_\mu{}^2}\right) \tag{C. 49b}$$

$$f(y)=1-8y+8y^3-y^4-12y^2\ln y \tag{C. 49c}$$

となる．

c．K の 3 体崩壊

$$K^+(p_1)\longrightarrow \pi^0(p_3)+\mu^+(p_2)+\nu(p_4)$$

$$T_{fi}=\frac{G_F{}'}{\sqrt{2}}V_{us}\langle p_3|\bar{s}\gamma^\mu(1-\gamma^5)u|p_1\rangle\langle p_2, p_4|\bar{\nu}\gamma_\mu(1-\gamma^5)\mu|0\rangle$$
$$=(G_s/\sqrt{2})S^\mu l_\mu \tag{C. 50}$$

$$S^\mu=\langle p_3|\bar{s}\gamma^\mu(1-\gamma^5)u|p_1\rangle$$
$$=f_+(q^2)(p_1{}^\mu+p_3{}^\mu)+f_-(q^2)(p_1{}^\mu-p_3{}^\mu) \tag{C. 51a}$$

$$l_\mu=\bar{u}(p_4)\gamma_\mu(1-\gamma^5)v(p_2) \tag{C. 51b}$$

$$G_s=G_F{}'V_{us} \tag{C. 51c}$$

K と π はともにパリティが負なので，軸性ベクトル部分は寄与しない．$f_\pm$ は $q^2=(p_1-p_3)^2$ の関数であり，T 不変が成立していれば実数である．

$$p_1-p_3=p_2+p_4,\qquad p_1+p_3=2p_1-(p_2+p_4)$$

であり，レプトンカレントに掛けるとレプトン運動量の部分はレプトン質量に比例する．したがってレプトンが電子の場合は f_- の項は無視してよい．CVC 仮説により，保存するアイソスピンカレントの存在が導かれたように，ここでもベクトルカレントは保存すると考えるとアイソスピンの拡張である $SU(3)$ 対称が適用できて，$f_+(0)$ は $1/\sqrt{2}$ になる．ただし，$SU(3)$ 対称性は厳密でないので実際はわずかにずれて，$1\to 0.982\pm 0.008$[3] となる．実験データの解析は，

$$f_\pm(q^2)=f_\pm(0)(1+\lambda_\pm(q^2/m_\pi{}^2)) \tag{C. 52}$$

とパラメター化して行う．$K_{\mu 3}$ では $f_\pm$ が両方決められるが，K_{e3} では，f_+ のみが決まる．K_{e3} の電子または π のエネルギースペクトルは，$m_l=0$ とおいて

$$\frac{\mathrm{d}\Gamma}{\mathrm{d}E_l}=\frac{G_S{}^2}{2\pi^3}|f_+|^2 m_K E_l{}^2\frac{(E_{\max}-E_l)^2}{(m_K-2E_l)} \tag{C. 53a}$$

$$E_{\max}=\frac{m_K{}^2-m_\pi{}^2}{2m_K} \tag{C. 53b}$$

$$\frac{\mathrm{d}\Gamma}{\mathrm{d}E_\pi}=\frac{G_S{}^2}{12\pi^3}|f_+|^2 m_K k_\pi{}^3 \tag{C. 54}$$

となる．ただし，(C.53 a) を求めるときは，f_+ の q^2 依存性を無視して定数とした．全崩壊率は

$$\Gamma=\frac{G_F{}'^2|V_{us}|^2 f_+{}^2 m_K{}^5}{768\pi^3}f\left(\frac{m_\pi{}^2}{m_K{}^2}\right) \tag{C. 55}$$

$f(y)$ は (C.49 c) で与えた関数である．

参考文献

1) Yu.L. Dokshitzer : *Sov. Phys. JETP*, **46** (1977) 641
V.N. Gribov and L.N. Lipatov : *Sov. J. Nucl. Phys.*, **15** (1972) 438 and 675
G. Altarelli and G. Parisi : *Nucl. Phys.*, **B126** (1977) 298
2) M.S. Chen and P. Zerwas : *Phys. Rev.*, **D12** (1975) 187
S. Brodsky, T. Kinoshita and H. Terazawa : *Phys. Rev.*, **D4** (1971) 1532
3) H. Leutwyler and M. Roos : *Z. Phys.*, **C25** (1984) 91

D　回転と角運動量

D. 1　角運動量演算

単位ベクトル $\boldsymbol{n}(\theta,\phi)$ を中心として角度 α だけ回転する演算子 R は

$$R=\exp(-i\alpha(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{J})) \tag{D. 1}$$

角運動量演算子 J_i ($i=1,2,3$ または x,y,z) は

$$[J_i,J_j]=i\varepsilon_{ijk}J_k \tag{D. 2}$$

$J^2=J_1^2+J_2^2+J_3^2$ はすべての J_i と交換し固有値 $j(j+1)(j=0, 1/2, 1, 3/2, \cdots)$ をもつので，角運動量の固有ベクトルは，j と J_z の固有値 m を指定すれば決まる．$J_\pm=J_x \pm iJ_y$ とすると

$$
\begin{aligned}
&J^2|j, m\rangle=j(j+1)|j, m\rangle \\
&J_z|j, m\rangle=m|j, m\rangle \\
&J_+|j, m\rangle=\sqrt{j(j+1)-m(m+1)}|j, m+1\rangle \\
&J_-|j, m\rangle=\sqrt{j(j+1)-m(m-1)}|j, m-1\rangle
\end{aligned}
\tag{D. 3}
$$

軌道角運動量の場合：$J_i=L_i$

$$L_i=x_jp_k-x_kp_j=-i(x_j\partial_k-x_k\partial_j) \tag{D. 4}$$

L^2 の固有値は $L(L+1)$, $L=0, 1, 2, 3\cdots$ で固有関数は，$-L\leqq m\leqq L$ として

$$
\begin{aligned}
&Y_{L,m}(\theta, \phi)=(-1)^{(m+|m|)/2}\left[\frac{(2L+1)(L-|m|)!}{4\pi \quad (L+|m|)!}\right]^{1/2}P_L{}^{|m|}(\cos\theta)\mathrm{e}^{im\phi} \\
&P_L{}^{|m|}(z)=(1-z^2)^{|m|/2}\frac{1}{2^L L!}\frac{\mathrm{d}^{L+|m|}}{\mathrm{d}z^{L+|m|}}(z^2-1)^L \\
&Y_{L,-m}(\theta, \phi)=(-1)^m[Y_{L,m}(\theta, \phi)]^*
\end{aligned}
\tag{D. 5}
$$

スピン角運動量の場合 $J_i=S_i$ と書く．$S=1/2$ の場合はパウリ行列

$$\sigma_x=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix},\quad \sigma_y=\begin{bmatrix}0 & -i\\ i & 0\end{bmatrix},\quad \sigma_z=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix} \tag{D. 6}$$

を用いて，$S_i=\sigma_i/2$ と表される．固有関数は

$$\chi_{+1/2}=\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix},\quad \chi_{-1/2}=\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix} \tag{D. 7}$$

$S=1$ の場合は，固有値 $\pm1, 0$ の固有関数を $e_{\pm1}, e_0$ として

$$e_{+1}=\begin{bmatrix}1\\ 0\\ 0\end{bmatrix},\quad e_0=\begin{bmatrix}0\\ 1\\ 0\end{bmatrix},\quad e_{-1}=\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 1\end{bmatrix} \tag{D. 8}$$

とすれば，(D.3) を使って直ちに

$$S_+=\begin{bmatrix}0 & \sqrt{2} & 0\\ 0 & 0 & \sqrt{2}\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix},\quad S_-=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ \sqrt{2} & 0 & 0\\ 0 & \sqrt{2} & 0\end{bmatrix} \tag{D. 9a}$$

と求められるから，

$$S_x=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{bmatrix},\quad S_y=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}0 & -i & 0\\ i & 0 & -i\\ 0 & i & 0\end{bmatrix},\quad S_z=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{bmatrix} \tag{D. 9b}$$

D. 2　角運動量の合成

角運動量 $\boldsymbol{J}_1$ と $\boldsymbol{J}_2$ を合成して，$\boldsymbol{J}$ をつくると

$$J = J_1 + J_2$$

であるので，J の固有値 J, M は，

$$|j_1 - j_2| \leqq J \leqq j_1 + j_2, \qquad M = m_1 + m_2 \tag{D.10}$$

で与えられ，固有ベクトル $|J, M\rangle$ は，クレブシュ-ゴルダン係数を使って，

$$|J, M\rangle = \Sigma C^{JM}_{j_1 m_1 \cdot j_2 m_2} |j_1, m_1\rangle |j_2, m_2\rangle \tag{D.11}$$

で与えられる．クレブシュ-ゴルダン係数は一般形が与えられている[1)]．j_2 が 1/2，1 の場合を表 D.1，D.2 に示す．

表 D.1　$C^{JM}_{j_1, M-m; 1/2, m}$

$J \backslash m$	$m = 1/2$	$m = -1/2$
$j_1 + 1/2$	$\left[\dfrac{j_1 + M + 1/2}{2j_1 + 1}\right]^{1/2}$	$\left[\dfrac{j_1 - M + 1/2}{2j_1 + 1}\right]^{1/2}$
$j_1 - 1/2$	$-\left[\dfrac{j_1 - M + 1/2}{2j_1 + 1}\right]^{1/2}$	$\left[\dfrac{j_1 + M + 1/2}{2j_1 + 1}\right]^{1/2}$

表 D.2　$C^{JM}_{j_1, M-m; 1, m}$

$J \backslash m$	$m = 1$	$m = 0$	$m = -1$
$j_1 + 1$	$\left[\dfrac{(j_1 + M)(j_1 + M + 1)}{(2j_1 + 1)(2j_1 + 2)}\right]^{1/2}$	$\left[\dfrac{(j_1 - M + 1)(j_1 + M + 1)}{(2j_1 + 1)(j_1 + 1)}\right]^{1/2}$	$\left[\dfrac{(j_1 - M)(j_1 - M + 1)}{(2j_1 + 1)(2j_1 + 2)}\right]^{1/2}$
j_1	$-\left[\dfrac{(j_1 + M)(j_1 - M + 1)}{2j_1(j_1 + 1)}\right]^{1/2}$	$\dfrac{M}{[j_1(j_1 + 1)]^{1/2}}$	$\left[\dfrac{(j_1 - M)(j_1 + M + 1)}{2j_1(j_1 + 1)}\right]^{1/2}$
$j_1 - 1$	$\left[\dfrac{(j_1 - M)(j_1 - M + 1)}{2j_1(2j_1 + 1)}\right]^{1/2}$	$-\left[\dfrac{(j_1 - M)(j_1 + M)}{j_1(2j_1 + 1)}\right]^{1/2}$	$\left[\dfrac{(j_1 + M + 1)(j_1 + M)}{2j_1(2j_1 + 1)}\right]^{1/2}$

D.3. 回 転 行 列

a. $j = 1/2, 1$ のとき

$|j, m\rangle$ を z 軸周りに回転しても位相がかかるだけであるが，y 軸の周りに回転したものは，m の違う状態が混じる．$|j, m\rangle$ は角運動量の大きさが変わらなければ完全系をつくるので，その線形結合で展開できる．

$$\therefore \quad e^{-i\theta J_y} |j, m\rangle = \sum_n d^j_{n,m}(\theta) |j, n\rangle \tag{D.12}$$

この $d^j_{n,m}(\theta)$ を回転行列という．明らかに

$$d^j_{n,m}(\theta) = \langle j, n| e^{-i\theta J_y} |j, m\rangle \tag{D.13}$$

d 関数の満たす性質は，

$$\begin{aligned} d^j_{n,m}(\theta) &= d^j_{-m,-n}(\theta) = (-1)^{n-m} d^j_{m,n}(\theta) \\ d^j_{n,m}(\theta) &= (-1)^{j+n} d^j_{n,-m}(\pi - \theta) \\ d^j_{n,m}(\pi) &= (-1)^{j+n} \delta_{n,-m} \\ d^j_{n,m}(-\pi) &= (-1)^{n-j} \delta_{n,-m} \end{aligned} \tag{D.14}$$

$d^j_{n,m}(\theta)$ の規格条件は

$$\int d\cos\theta d^{j_1}_{n,m}(\theta) d^{j_2}_{n,m}(\theta)=\frac{2}{2j_1+1}\delta_{j_1,j_2} \tag{D. 15}$$

回転行列は一般式が Wigner によって与えられているが[1]，$j=1/2,\ 1$ の場合は (D.13) に直接 (D.6) や (D.9 b) を代入して求めることができる．

$$\begin{bmatrix} d^{1/2}_{1/2,1/2} & d^{1/2}_{1/2,-1/2} \\ d^{1/2}_{-1/2,1/2} & d^{1/2}_{-1/2,-1/2} \end{bmatrix}=e^{-i(\theta/2)\sigma_y}=\sum_n \frac{1}{n!}\left(-i\frac{\theta}{2}\sigma_y\right)^n=\cos\frac{\theta}{2}-\sin\frac{\theta}{2}(i\sigma_y)$$

$$=\begin{bmatrix} \cos\frac{\theta}{2}, & -\sin\frac{\theta}{2} \\ \sin\frac{\theta}{2}, & \cos\frac{\theta}{2} \end{bmatrix} \tag{D. 16}$$

同様にして，$J=1$ の場合も

$$\begin{bmatrix} d^1_{1,1} & d^1_{1,0} & d^1_{1,-1} \\ d^1_{0,1} & d^1_{0,0} & d^1_{0,-1} \\ d^1_{-1,1} & d^1_{-1,0} & d^1_{-1,-1} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \frac{1+\cos\theta}{2}, & -\frac{\sin\theta}{\sqrt{2}}, & \frac{1-\cos\theta}{2} \\ \frac{\sin\theta}{\sqrt{2}}, & \cos\theta, & -\frac{\sin\theta}{\sqrt{2}} \\ \frac{1-\cos\theta}{2}, & \frac{\sin\theta}{\sqrt{2}}, & \frac{1+\cos\theta}{2} \end{bmatrix} \tag{D. 17}$$

もう少し一般的な例をいくつか次にあげておく[2]．

b．$j=L=$整数のとき

$$d^L_{m,0}(\theta)=(-1)^m d^L_{0,m}(\theta)=[4\pi/(2L+1)]^{1/2}e^{-im\phi}Y_{L,m}(\theta,\phi)$$

例えば

$$\begin{aligned} d^L_{0,0}(\theta)&=P_L(\theta) \\ d^L_{1,0}(\theta)&=-[L(L+1)]^{-1/2}\sin\theta P'_L(\theta) \\ d^L_{2,0}(\theta)&=[(L-1)L(L+1)(L+2)]^{-1/2}[2P'_{L-1}(\theta)-L(L-1)P_L(\theta)] \end{aligned} \tag{D. 18}$$

c．$j=L+1/2$（半整数）のとき

$P'_L=dP_L/d\cos\theta$ として

$$\begin{aligned} d^j_{1/2,1/2}(\theta)&=(L+1)^{-1}\cos\frac{\theta}{2}(P'_{j+1/2}-P'_{j-1/2}) \\ d^j_{-1/2,1/2}(\theta)&=(L+1)^{-1}\sin\frac{\theta}{2}(P'_{j+1/2}+P'_{j-1/2}) \\ d^j_{1/2,3/2}(\theta)&=(L+1)^{-1}\sin\frac{\theta}{2}\left(\sqrt{\frac{j-1/2}{j+3/2}}P'_{j+1/2}+\sqrt{\frac{j+3/2}{j-1/2}}P'_{j-1/2}\right) \\ d^j_{-1/2,3/2}(\theta)&=(L+1)^{-1}\sin\frac{\theta}{2}\left(-\sqrt{\frac{j-1/2}{j+3/2}}P'_{j+1/2}+\sqrt{\frac{j+3/2}{j-1/2}}P'_{j-1/2}\right) \end{aligned} \tag{D. 19}$$

参考文献

1) M.E. Rose : Elementary Theory of Angular Momentum, New York : Wiley (1957)
2) M. Jacob and G.C. Wick : *Anals of Phys.*, **7** (1959) 404

E　C, P, T 変換性

場が各種変換でどのように変換するかをまとめておく．以下 $|q, p, \sigma\rangle$ は，粒子 (q) または反粒子 $(\bar{q})$ の空間運動量 p，スピン状態 σ を表す状態量とする．P には P 変換の位相 η_P が，C, T には η_C, η_T が一般にはかかるが，簡単のためすべて位相因子を省略した．

P：

$$(x, t) \to (-x, t) \tag{E. 1}$$

$$P|q, p, \sigma\rangle = |q, -p, \sigma\rangle \tag{E. 2}$$

スカラー　$\phi(x, t) \to \phi(-x, t)$

擬スカラー　$P(x, t) \to -P(-x, t)$

ベクトル　$V^\mu(x, t) \to V_\mu(-x, t)$

軸性ベクトル　$A^\mu(x, t) \to -A_\mu(-x, t)$

電磁場　$F^{\mu\nu}(x, t) \to F_{\mu\nu}(-x, t)$

ディラックスピノール　$\psi(x, t) \to \gamma^0\psi(-x, t),\ \ \bar{\psi}(x, t) \to \bar{\psi}(-x, t)\gamma^0$

ディラック双1次形

$$\begin{array}{lll} S & \bar{\psi}_1\psi_2 & \to \bar{\psi}_1\psi_2 \\ P & i\bar{\psi}_1\gamma^5\psi_2 & \to -i\bar{\psi}_1\gamma^5\psi_2 \\ V & \bar{\psi}_1\gamma^\mu\psi_2 & \to \bar{\psi}_1\gamma_\mu\psi_2 \\ A & \bar{\psi}_1\gamma^5\gamma^\mu\psi_2 & \to -\bar{\psi}_1\gamma^5\gamma_\mu\psi_2 \\ T & \bar{\psi}_1\sigma^{\mu\nu}\psi_2 & \to \bar{\psi}_1\sigma_{\mu\nu}\psi_2 \end{array} \tag{E. 3}$$

P に i をつけるのは，$\psi_1 = \psi_2$ の時にエルミートとするためである．

C：

$$C|q, p, \sigma\rangle = |\bar{q}, p, \sigma\rangle \tag{E. 4}$$

スカラー　$\phi(x, t) \to \phi^\dagger(x, t)$

擬スカラー　$P(x, t) \to P^\dagger(x, t)$

ベクトル　$V^\mu(x, t) \to -V^{\dagger\mu}(x, t)$

軸性ベクトル　$A^\mu(x, t) \to A^{\dagger\mu}(x, t)$

電磁場　$F^{\mu\nu}(x, t) \to -F^{\mu\nu}(x, t)$

ディラックスピノール　$\psi(x,t)\to C\overline{\psi}^{T}(x,t)=i\gamma^2\gamma^0\overline{\psi}^{T},$

$$\overline{\psi}(x,t)\to -\psi^{T}(x,t)C^{-1}$$

$$C^{-1}\gamma^{\mu}C=-\gamma^{\mu T},\ C=-C^{\dagger}=-C^{-1}=-C^{T}=C^{*}$$

ディラック双1次形

S	$\overline{\psi}_1\psi_2$	$\to \overline{\psi}_2\psi_1$
P	$i\overline{\psi}_1\gamma^5\psi_2$	$\to i\overline{\psi}_2\gamma^5\psi_1$
V	$\overline{\psi}_1\gamma^{\mu}\psi_2$	$\to -\overline{\psi}_2\gamma^{\mu}\psi_1$
A	$\overline{\psi}_1\gamma^5\gamma^{\mu}\psi_2$	$\to \overline{\psi}_2\gamma^5\gamma^{\mu}\psi_1$
T	$\overline{\psi}_1\sigma^{\mu\nu}\psi_2$	$\to -\psi_2\sigma^{\mu\nu}\psi_1$ (E. 5)

T：

$$(x,t)\to(x,-t) \tag{E. 6}$$

$$(c-数)\to(c-数)^{*} \tag{E. 7}$$

$$\langle \mathrm{out}|H|\mathrm{in}\rangle\to\langle T\mathrm{in}|H|T\mathrm{out}\rangle \tag{E. 8}$$

$$T|q,\ p,\ \sigma\rangle=\langle q,\ -p,\ -\sigma| \tag{E. 9}$$

スカラー　$\phi(x,t)\to\phi(x,-t)$

擬スカラー　$P(x,t)\to -P(x,-t)$

ベクトル　$V^{\mu}(x,t)\to V_{\mu}(x,-t)$

軸性ベクトル　$A^{\mu}(x,t)\to A_{\mu}(x,-t)$

電磁場　$F^{\mu\nu}(x,t)\to -F_{\mu\nu}(x,-t)$

ディラックスピノール　$\psi(x,t)\to B\psi(x,-t)=\gamma^3\gamma^1\psi(x,-t)$

$$=\gamma^5 C\psi(x,-t)$$

$$\overline{\psi}(x,t)\to\overline{\psi}B^{-1}=\overline{\psi}\gamma^1\gamma^3$$

$$B^{-1}\gamma^{\mu *}B=\gamma_{\mu},\ B^{\dagger}=B^{-1}=-B^{T}$$

ディラック双1次形

S	$\overline{\psi}_1\psi_2$	$\to \overline{\psi}_1\psi_2$
P	$i\overline{\psi}_1\gamma^5\psi_2$	$\to -i\overline{\psi}_1\gamma^5\psi_2$
V	$\overline{\psi}_1\gamma^{\mu}\psi_2$	$\to \overline{\psi}_1\gamma_{\mu}\psi_2$
A	$\overline{\psi}_1\gamma^5\gamma^{\mu}\psi_2$	$\to \overline{\psi}_1\gamma^5\gamma_{\mu}\psi_2$
T	$\overline{\psi}_1\sigma^{\mu\nu}\psi_2$	$\to -\overline{\psi}_1\sigma_{\mu\nu}\psi_2$ (E. 10)

CP：

$$(x,t)\to(-x,t) \tag{E. 11}$$

$$CP|q,\ p,\ \sigma\rangle=|\overline{q},\ -p,\ \sigma\rangle \tag{E. 12}$$

スカラー　$\phi(x,t)\to\phi^{\dagger}(-x,t)$

擬スカラー　$P(x,t)\to -P^{\dagger}(-x,t)$

ベクトル $V^{\mu}(x, t) \to -V_{\mu}{}^{\dagger}(-x, t)$

軸性ベクトル $A^{\mu}(x, t) \to -A_{\mu}{}^{\dagger}(-x, t)$

電磁場 $F^{\mu\nu}(x, t) \to -F_{\mu\nu}(-x, t)$

ディラックスピノール $\psi(x, t) \to \pm i\gamma^2 \bar{\psi}^T(-x, t)$,

$\bar{\psi}(x, t) \to \mp \psi^T(-x, t) i\gamma^2$

ディラック双1次形

$$
\begin{array}{lll}
S & \bar{\psi}_1\psi_2 & \to \bar{\psi}_2\psi_1 \\
P & i\bar{\psi}_1\gamma^5\psi_2 & \to -i\bar{\psi}_2\gamma^5\psi_1 \\
V & \bar{\psi}_1\gamma^{\mu}\psi_2 & \to -\bar{\psi}_2\gamma_{\mu}\psi_1 \\
A & \bar{\psi}_1\gamma^5\gamma^{\mu}\psi_2 & \to -\bar{\psi}_2\gamma^5\gamma_{\mu}\psi_1 \\
T & \bar{\psi}_1\sigma^{\mu\nu}\psi_2 & \to -\bar{\psi}_2\sigma_{\mu\nu}\psi_1
\end{array} \tag{E. 13}
$$

演算を二つ以上組み合わせると，ディラックスピノールの変換式は一般に順序により最終結果の位相が異なる．しかし，双1次形式については $\eta^*\eta=1$ であるので順序によらない．

***CPT*：**

C, P, T の変換をすべて組み合わせると CPT 変換となる．この場合すべての座標を反転させる $[(x, t) \to (-x, -t)]$．T 変換を含むのでやはりアンチユニタリーであり，遷移要素などは複素共役をとる．CPT 変換演算子を Θ と書き演算の要素をまとめると

$$(x, t) \xrightarrow{CPT} (-x, -t) \tag{E. 14}$$

$$c\text{-数} \longrightarrow (c\text{-数})^* \tag{E. 15}$$

$$\langle \mathrm{out}|H|\mathrm{in}\rangle \longrightarrow \langle \Theta\mathrm{in}|H|\Theta\mathrm{out}\rangle \tag{E. 16}$$

$$\Theta|q,\ p,\ \sigma\rangle \longrightarrow \langle \bar{q},\ p,\ -\sigma| \tag{E. 17}$$

スカラー $\phi(x, t) \to \phi^{\dagger}(-x, -t)$

擬スカラー $P(x, t) \to P^{\dagger}(-x, -t)$

ベクトル $V^{\mu}(x, t) \to -V^{\dagger\mu}(-x, -t)$

軸性ベクトル $A^{\mu}(x, t) \to -A^{\dagger\mu}(-x, -t)$

電磁場 $F^{\mu\nu}(x, t) \to F^{\mu\nu}(-x, -t)$

ディラックスピノール $\psi(x, t) \to D\bar{\psi}^T(-x, -t) = \pm\gamma^0\gamma^5\bar{\psi}^T$,

$\bar{\psi}^T(x, t) \to -\psi^T(-x, -t)D^{-1}$

$D^{-1}\gamma^{\mu}D = \gamma_{\mu},\quad D^{\dagger} = D^{-1} = -D^T$

ディラック双1次形

$$S \qquad \bar{\psi}_1\psi_2 \qquad \to \bar{\psi}_2\psi_1$$

$$
\begin{array}{lll}
P & i\bar{\psi}_1\gamma^5\psi_2 & \to i\bar{\psi}_2\gamma^5\psi_1 \\
V & \bar{\psi}_1\gamma^\mu\psi_2 & \to -\bar{\psi}_2\gamma^\mu\psi_1 \\
A & \bar{\psi}_1\gamma^5\gamma^\mu\psi_2 & \to -\bar{\psi}_2\gamma^5\gamma^\mu\psi_1 \\
T & \bar{\psi}_1\sigma^{\mu\nu}\psi_2 & \to \bar{\psi}_2\sigma^{\mu\nu}\psi_1
\end{array}
\qquad \text{(E.18)}
$$

F　$SU(N)$ の数学的準備

F.1　群の定義

群 $G=\{A, B, C, \cdots\}$ とは次の条件を満たす元 $A, B, \cdots$ の集合である.

(1)　群の二つの元 A, B に対し積 AB が存在し，これもまた群に属すること.

(2)　結合則：$(AB)C=A(BC)$ が成立する.

(3)　単位元 1 が存在し，すべての元 A に対し，$1A=A1=A$.

(4)　すべての元 A に対し，逆元 A^{-1} が存在し，$A^{-1}A=AA^{-1}=1$.

特に，$AB=BA$ が成立するものを可換群（アーベル群）と呼ぶ．並進演算や 2 次元平面での回転が該当する．$AB\neq BA$ のとき，非可換群（非アーベル群）という．3 次元の回転や $SU(N)$, $N\geqq 2$ などがある．群が連続パラメターの解析関数であるとき，リー (Lie) 群という．特にわれわれが興味あるのは，コンパクト・リー群である．コンパクト (compact) とは簡単にいえば，パラメターの変数領域が空間の有限体積内に閉じるものをいう．例えば 2 次元空間の回転は，$0\leqq\theta<2\pi$ でありコンパクトである．ローレンツ群は非コンパクト群の例である．

群の表現：群の任意の元 A に対応して行列 $U(A)$ もしくは演算子が存在し

$$U(A)U(B)=U(AB)$$
$$U(A^{-1})=U^{-1}(A)$$
$$U(1)=1 \ (\text{単位行列})$$

であるとき，この行列の集合を群 G の表現と呼ぶ．この行列の演算するベクトル空間を表現空間，次元 (n) を表現の次元という．

例 1：回転群　$O(N)$

実数 x_i $(i=1\sim N)$ を座標にもつ N 次元空間において，$L=\sum_{i=1}^{N}x_i{}^2$ を不変にするすべての変換.

例 2：ユニタリー群　$SU(N)$

複素数 u_i を座標にもつ N 次元複素空間において，$s=\sum_{i=1}^{N}|u_i|^2$ を不変にするすべての変換を，N 次元のユニタリー変換群という．その中でも変換の行列式 $\det U$ を 1 にするものを特殊 (special) ユニタリー群 $SU(N)$ という.

$$U^\dagger U=UU^\dagger=1, \qquad \det U=1 \qquad \text{(F.1)}$$

条件 (F.1) を満たす独立な行列は，N^2-1 個存在するので，U を

$$U=\exp(-i\theta^i F_i) \qquad (i=1\sim N^2-1\text{ の和}) \tag{F.2}$$

の形に書くと，F_i はエルミート行列であり，$\det U=1$ の条件は，

$$\mathrm{Tr}(F_i)=0 \tag{F.3}$$

ここに，θ^a は N^2-1 個の独立な連続実変数である．この F_i を $SU(N)$ 群の生成演算子 (generator) という．F_i は

$$[F_i, F_j]=if_{ijk}F_k \tag{F.4}$$

という関係を満たす．ここに k については和をとるものとする．このような F の集合がリー代数を形成する．群の性質は生成演算子の交換関係によりほぼ完全に規定される．f_{ijk} は構造定数と呼ばれる．f_{ijk} の決め方はユニークではない．なぜなら，F_i の線形結合で別の独立な F_i' の組をつくれるからである[*1]．f_{ijk} は，ijk 添字について反対称にできる．

$SU(N)$ の $n\times n$ 次の表現行列 U の演算する n 次元ベクトルを ψ と書くと，ψ は

$$\psi=\begin{bmatrix}\xi^1\\ \xi^2\\ \cdot\\ \cdot\\ \xi^n\end{bmatrix}, \qquad n\geqq N \tag{F.5}$$

$$\psi \longrightarrow \psi'=U\psi$$

$$\xi^{a\prime}=\sum_b^n U_{ab}\xi^b\equiv U^a{}_b\xi^b \tag{F.6}$$

によって変換される．$n=N$ の場合を基本表現，$n=N^2-1$ の場合を随伴表現という．

随伴表現 (adjoint representaion)：$n=N^2-1$ の表現行列は，構造定数を使って表すことができる．

$$[F_a]_{bc}(a, b, c=1\sim N^2-1)=-if_{abc} \tag{F.7}$$

証明：$[A, B]=-[B, A]$ およびヤコビの恒等式

$$[[A, B], C]+[[B, C], A]+[[C, A], B]=0 \tag{F.8}$$

に，$A=F_a$ などを入れて，(F.4) を使えば，

$$f_{bac}=-f_{abc} \tag{F.9a}$$

$$f_{abd}f_{cde}+f_{bcd}f_{ade}+f_{cad}f_{bde}=0 \tag{F.9b}$$

が示せるので，これに (F.7) を入れれば

$$[F_a, F_b]=if_{abc}F_c \tag{F.10}$$

よって，F_a は N^2-1 次元の表現行列である．(証明終)

[*1] 例えば角運動量演算子 J_i の代わりに，線形結合 $J_\pm=J_1\pm iJ_2$ を使えば，

$$[J_+, J_-]=2J_3, \qquad [J_3, J_\pm]=\pm J_\pm$$

が成立する．

ラグランジアン（または運動方程式）が，$SU(N)$ 変換によって変わらないとき，F_k は保存量である．同時に対角化可能な F_k の数 r を，この群のランクという．$SU(N)$ のランクは $N-1$ である．F_k よりつくられ，すべての F_k と交換する行列をカシミヤ (Casimir) 演算子と呼ぶ．表現ベクトル（粒子）は，カシミヤ演算子の固有値および同時対角化可能な F_k の固有値（量子数）により指定分類できる．

ψ の複素共役 ψ^* の表現行列は U^* である．その生成演算子 $(-F_i^*)$ もまた (F.4) の交換関係を満たすから，ψ^* もまた表現ベクトルであり ψ の共役表現という．ψ に粒子を対応させるときは ψ^* は反粒子を表すから，反粒子のもつ量子数は粒子の量子数の符号を変えたものとなる．ここで，共変ベクトル，

$$\psi^\dagger=(\psi^*)^T=(\xi^{1*}, \xi^{2*}, \cdots \xi^{N*})\equiv(\xi_1, \xi_2, \cdots \xi_N) \tag{F.11}$$

を定義すれば

$$\begin{aligned}&\xi_a \to \xi_a'=\xi^{a*\prime}=\Sigma U^a{}_b{}^*\xi^{b*}=\Sigma U_{ab}{}^*\xi_b=\Sigma\xi_b U_{ba}{}^\dagger\equiv(U^\dagger)^b{}_a\xi_b\\&\psi^\dagger \to \psi^{\dagger\prime}=\psi^\dagger U^\dagger\end{aligned} \tag{F.12}$$

表現行列 $U(A)$ が，任意の元 A に対し

$$U(A)=\left[\begin{array}{c|c|c} U_1(A) & 0 & 0 \\ \hline 0 & U_2(A) & 0 \\ \hline 0 & 0 & \ddots \end{array}\right] \tag{F.13}$$

のように書けるとき，この表現は可約 (reducible) であるといい

$$U=U_1\oplus U_2\oplus\cdots\oplus U_k \tag{F.14}$$

のように書く．このような分解ができないとき既約 (irreducible) であるという．

直積表現：元 $A=\{A_j\}$, $B=\{B_k\}$ をもつ二つの表現 $U(A)$, $U(B)$ があり，それぞれ n_A, n_B 次元であるとする．各表現の基底 ξ_j, η_k の積 $\xi_j\eta_k$ は $n_A\times n_B$ 次元の空間を張る．この空間での表現は $U(AB)$ は

$$U(AB)(\xi_j\eta_k)=\xi_j'\eta_k'=(U(A)\xi_j)(U(B)\eta_k) \tag{F.15}$$

で表される．これを直積表現といい

$$U(AB)=U(A)\otimes U(B) \tag{F.16}$$

のように書く．直積表現は一般に可約である．

F.2　$SU(3)$ 群

基本表現：以下，物理的に理解しやすいように，$SU(3)$ の基本表現にクォークを対応させて考えることにする．各クォーク $q^i=(u, d, s)$ を，基本表現に対応させて

$$u=\xi^1=\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix},\qquad d=\xi^2=\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix},\qquad s=\xi^3=\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix} \tag{F.17}$$

と表す．

$SU(3)$ 群の生成演算子 λ_i を決めるために次のように考える．$u \leftrightarrow d$ の $SU(2)$ 変換は，$SU(3)$ 群の一部に含まれるから，$\lambda_i(i=1,2,3)$ を u, d のみに演算するように

$$\lambda_i=\begin{bmatrix} \multicolumn{2}{c}{\tau_i} & 0 \\ & & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{F.18}$$

にとると，$\lambda_i/2$ はアイソスピン演算子である．同様に $u \leftrightarrow s$ の入れ替えも $SU(2)$ 演算であるので，アイソスピンにならって V スピンと名づけ，$\lambda_4, \lambda_5, V_3$ を

$$\lambda_4=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \lambda_5=\begin{bmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad V_3=\begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1/2 \end{bmatrix} \tag{F.19}$$

によって定義する．同様に $d \leftrightarrow s$ を U スピン演算と名づけ，$\lambda_6, \lambda_7, U_3$ を

$$\lambda_6=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \lambda_7=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{bmatrix} \quad U_3=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & -1/2 \end{bmatrix} \tag{F.20}$$

とする．これで 9 個の行列が定義できたが，

$$I_3-V_3+U_3=0 \tag{F.21}$$

であるので，

$$\lambda_8 \equiv \sqrt{3}\,Y=(2/\sqrt{3})(U_3+V_3)=\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \tag{F.22}$$

を定義すれば，独立で同時に対角化可能な行列は I_3 と Y の 2 個であることがわかる．これらの行列は，

$$\left[\frac{\lambda_i}{2}, \frac{\lambda_j}{2}\right]=if_{ijk}\frac{\lambda_k}{2} \tag{F.23}$$

$$\left\{\frac{\lambda_i}{2}, \frac{\lambda_j}{2}\right\}=\frac{1}{3}\delta_{ij}+id_{ijk}\frac{\lambda_k}{2} \tag{F.24}$$

$$\mathrm{Tr}(\lambda_i\lambda_j)=2\delta_{ij} \tag{F.25}$$

を満たす．f_{ijk}, d_{ijk} は，添字について，それぞれ反対称，全対称で，表 F.1 に示されるような値をもつ．

表 F.1 $SU(3)$ の構造定数

$f_{123}=1$
$f_{147}=f_{246}=f_{257}=f_{345}=f_{516}=f_{637}=1/2$
$f_{458}=f_{678}=\sqrt{3}/2$
$d_{118}=d_{228}=d_{338}=-d_{888}=1/\sqrt{3}$
$d_{146}=d_{157}=d_{256}=d_{344}=d_{355}=1/2$
$d_{247}=d_{366}=d_{377}=-1/2$
$d_{448}=d_{558}=d_{668}=d_{778}=-1/(2\sqrt{3})$

術語の定義：$F_a(n)$ を n 次元の表現行列とすれば

$$\mathrm{Tr}[F_a(n)F_b(n)] = T_R(n)\delta_{ab} \tag{F. 26a}$$

$$\sum_{a=1}^{N^2-1} F_a(n)^2 = C_2(n)\mathbf{1} \tag{F. 26b}$$

$SU(N)$ の場合，$n=N$ を F (fundamental)，$n=N^2-1$ を A (adjoint) で表すと

$$T_R(N) \equiv T_R = 1/2, \qquad T_R(N^2-1) = N = C_A \tag{F. 27a}$$

$$C_2(N) \equiv C_F = (N^2-1)/2N, \qquad C_2(N^2-1) \equiv C_A = N \tag{F. 27b}$$

$SU(3)$ の場合，

$$T_R = 1/2, \qquad C_F = 4/3, \qquad C_A = 3 \tag{F. 28}$$

$C_2(n)$ の一般的な求め方は § F. 4 で述べる．

***V*, *U* スピン**：V, U スピンの昇降下降演算子を次のように定義すれば，V, U スピンの演算は I スピンの演算子とまったく同じように扱うことができる．

$$I_\pm = (\lambda_1 \pm i\lambda_2)/2, \quad V_\pm = (\lambda_4 \pm i\lambda_5)/2, \quad U_\pm = (\lambda_6 \pm i\lambda_7)/2$$

$$2I_3 = [I_+, I_-], \quad 2V_3 = [V_+, V_-], \quad 2U_3 = [U_+, U_-] \tag{F. 29a}$$

クォークモデルでは，$q=(u, d, s)$ が，それぞれ量子数

$$I_3(q) = (1/2,\ -1/2,\ 0), \qquad V_3(q) = (1/2,\ 0,\ -1/2)$$

$$U_3(q) = (0,\ 1/2,\ -1/2), \qquad Y(q) = (1/3,\ 1/3,\ -2/3) \tag{F. 29b}$$

をもつ．I_3-Y 平面に u, d, s をおき，原点からのベクトルとして表すと図F.1aのようになる (ウエイト図という)．積表現をつくるとき，u を掛け算するということは，I_3, Y を 1/2, 1/3 だけ増加することに相当するので，I_3-Y 平面では，u ベクトルを加えることに相当する．同様に d, s を掛け算することは，d, s ベクトルを加えることに相当する．

反クォーク $\bar{q}_i=(\bar{u}, \bar{d}, \bar{s})$ は，$I_3=(-1/2,\ 1/2,\ 0)$，$Y=(-1/3,\ -1/3,\ 2/3)$ をもつので，図F.1 (b) のようになる．また，$I_\pm$ は $u \leftrightarrow d$，$-\bar{d} \leftrightarrow \bar{u}$，$V_\pm$ は $u \leftrightarrow s$，$-\bar{s}$

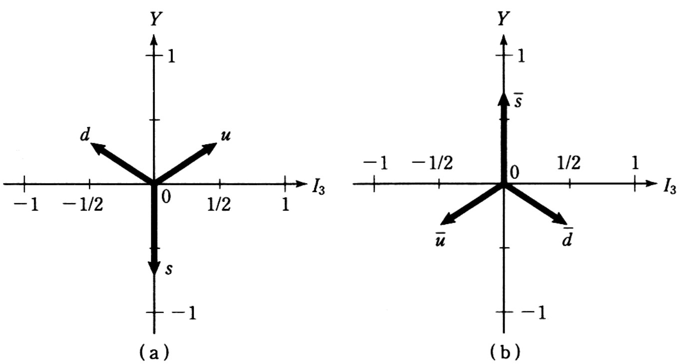


図 F. 1　u, d, s は $(I_3, Y)=(1/2, 1/3)$, $(-1/2, 1/3)$, $(0, -2/3)$ をもつので (a) のようなベクトルとして表せる．(b) は $\bar{u}, \bar{d}, \bar{s}$ のベクトル図である．

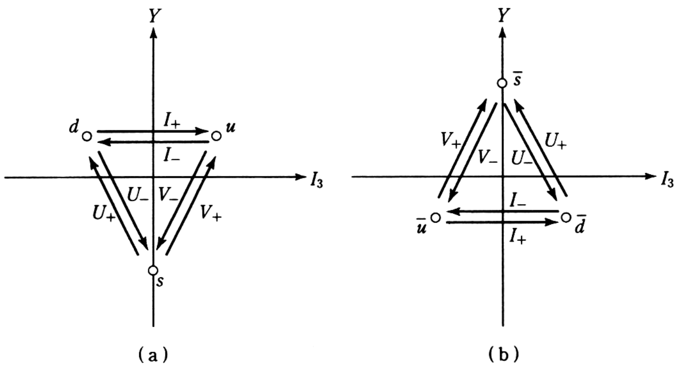


図 F.2　$I_\pm$, $V_\pm$, $U_\pm$ 演算は I_3-Y 平面で表現ベクトルを図のように動かす.

$\leftrightarrow \bar{u}$, $U_\pm$ は $d \leftrightarrow s$, $-\bar{s} \leftrightarrow \bar{d}$ の置き換え（図 F.2）に対応する.

F.3　直積表現の既約化

a.　メソン 8 重項 (octet)

クォークと反クォークの合成系でつくるスピン 0 のメソンを考えてみよう. $SU(3)$ 表現では q と $\bar{q}$ の積表現 $\Phi^i{}_j = q^i \bar{q}_j$ をつくることになる. 変換で,

$$q \to q' = Uq, \qquad \bar{q} \to \bar{q}' = \bar{q} U^\dagger \tag{F.30}$$

であるので, $\bar{q}q = \xi^i \xi_i = \bar{u}u + \bar{d}d + \bar{s}s$ は, $SU(3)$ 変換で不変である.

$$\therefore \quad \eta' \equiv (\bar{u}u + \bar{d}d + \bar{s}s)/\sqrt{3} \tag{F.31}$$

は $SU(3)$ 群の規約表現に属する基底ベクトルであり, 1 重項 (singlet) を構成する. 9 個の積ベクトル $\Phi^i{}_j = \xi^i \xi_j$ から (F.31) を引いた残りの 8 個 $P^i{}_j = \xi^i \xi_j - (1/3)\mathrm{Tr}(\Phi^i{}_j)$ は独立であり, 変換によって互いに混じるのでこれ以上分解できない.

以上の議論から, 3 個の q_i と 3 個の $\bar{q}_j$ の積表現は 1 個と 8 個の 2 組に分けられることが導けた. これを

$$\mathbf{3} \otimes \mathbf{3}^* = \mathbf{1} \oplus \mathbf{8} \tag{F.32}$$

のように表す. これを別の見方から導いてみよう. $\mathbf{3} \otimes \mathbf{3}^*$ の直積表現の基底ベクトルは, $\mathbf{3}$ に属する u, d, s に, $\mathbf{3}^*$ に属する $\bar{u}, \bar{d}, \bar{s}$ を掛け算した九つのベクトルよりなる. いま, $\mathbf{3}$ に $\bar{u}$ を掛けることを考えてみよう. 例えば, I_3-Y 平面上で, $u\bar{d}$ ベクトルは u ベクトルに $\bar{d}$ ベクトルを足して得られ, その位置は, 図 F.3 (a) に示すように, $I_3 = 1$, $Y = 0$ の位置となる. $\mathbf{3}$ に属するすべてのベクトルに $\mathbf{3}^*$ に属するすべてのベクトルを加えたものの頂点をプロットすると, 図 F.3 (b) のようになる. この全体で 9 個の点は六角形を形成し, 外側の点は一重点, 中の点は 3 重点である.

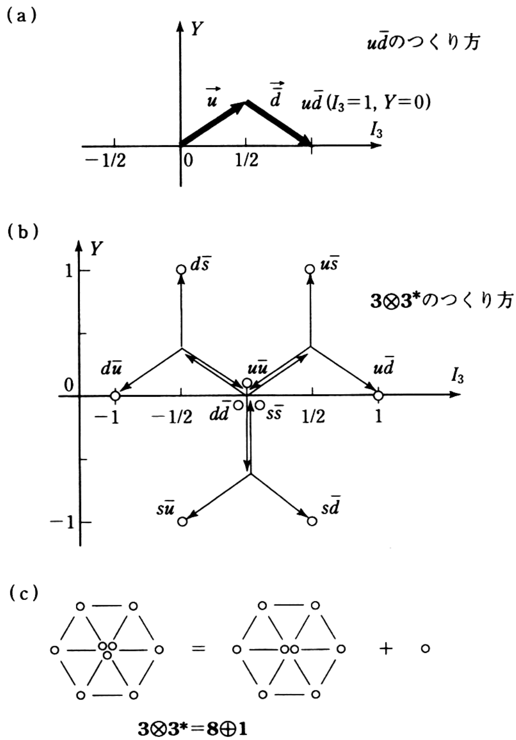


図 F.3 (a) u, $\bar{d}$ は (I_3, Y) として (1/2, 1/3), (1/2, −1/3) をもつので, $u\bar{d}$ は I_3-Y 平面ではベクトル和として得られ, (1, 0) をもつ.
(b) (a) の演算をすべての要素について行えば, $q^i\bar{q}_j$ のすべてが, ベクトル和として得られ, (c) $\mathbf{3}\otimes\mathbf{3}^*=\mathbf{9}=\mathbf{8}\otimes\mathbf{1}$ となる.

3 重点の一つは既約表現の 1 重項(1)に属するから (**F3. c** 参照), 8 重項は, 六角形の辺の各点と中心の 2 重点から構成されることになる.

b. バリオン

バリオンをつくるために, まずクォーク 2 個よりなる 9 個の積ベクトル $T^{ij}=\xi^i\xi^j$ の変換性をみてみよう. これは一般に既約ではない. しかし,

$$T^{ij}=\frac{1}{2}(\xi^i\xi^j-\xi^j\xi^i)+\frac{1}{2}(\xi^i\xi^j+\xi^j\xi^i)=A^{ij}+S^{ij} \qquad \text{(F. 33)}$$

のように, 対称な部分と反対称な部分に分けることができる. 対称性は変換により変わらないから, 9 個の積ベクトル T^{ij} が, 6 個の対称な表現と 3 個の反対称な表現に分解できたことになる. すなわち

$$\mathbf{3}\otimes\mathbf{3}=\mathbf{3}^*\oplus\mathbf{6} \qquad \text{(F. 34)}$$

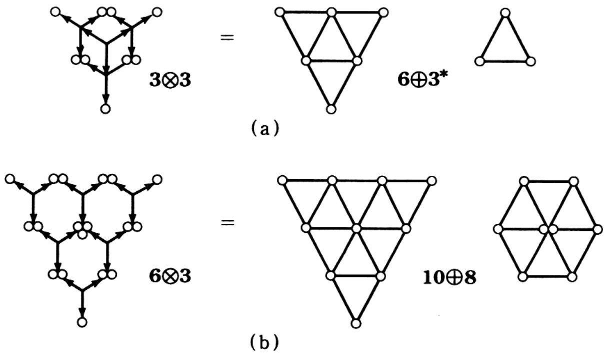


図 F.4　バリオン多重項：(a) $\mathbf{3}\otimes\mathbf{3}=\mathbf{6}\oplus\mathbf{3}^*$，(b) $\mathbf{6}\otimes\mathbf{3}=\mathbf{10}\oplus\mathbf{8}$

ベクトル表示では，図 F.4 (a) のように表される．3 個の A^{ij} が，$\mathbf{3}$ でなく $\mathbf{3}^*$ に属することは，量子数 (I_3, Y) をみれば一目瞭然であるが，数学的には次のように証明する．

$$\eta_i \equiv \varepsilon_{ijk} A^{jk} \tag{F.35}$$

とすると，

$$B = \eta_i \xi^i \tag{F.36}$$

は，$SU(3)$ 変換の不変量である．なぜなら，

$$\begin{aligned} B' &= \eta_i{}' \xi'^i = \varepsilon_{ijk} \xi'^i \xi'^j \xi'^k = \varepsilon_{ijk} U^i{}_l U^j{}_m U^k{}_n \xi^l \xi^m \xi^n \\ &= \varepsilon_{lmn} \det U \xi^l \xi^m \xi^n = \varepsilon_{lmn} \xi^l \xi^m \xi^n = B \end{aligned} \tag{F.37}$$

これから η の変換行列は，$(U^{-1})^T = U^*$ であることがいえるから，η は $\mathbf{3}^*$ に属する．T^{ij} にさらに $\mathbf{3}$ の ξ^k を掛けると，(F.33) の第 1 項との掛け算 $(A^{ij}\xi^k)$ からは，

$$\mathbf{3}^* \otimes \mathbf{3} = \mathbf{1} \oplus \mathbf{8} \tag{F.38}$$

がでてくることはメソンの場合と同様である．ただし，メソンの場合と違い，(F.33) の A^{ij} に ξ^k を掛けて全反対称にしたもの（それは (F.36) の B に等しい）が 1 重項となり，残りの 8 個が 8 重項となる．T^{ij} の第 2 項との積 $(S^{ij}\xi^k)$ からは，18 個のベクトルがつくられるが，このうち 3 個の添字すべてについて全対称のもの 10 個が一つの既約表現をつくり，残りの 8 個が別の既約表現をつくる．すなわち，

$$\mathbf{6} \otimes \mathbf{3} = \mathbf{8} \oplus \mathbf{10} \tag{F.39a}$$

となり，結局

$$\mathbf{3} \otimes \mathbf{3} \otimes \mathbf{3} = \mathbf{1} \oplus \mathbf{8} \oplus \mathbf{8} \oplus \mathbf{10} \tag{F.39b}$$

対称性：　A　MA　MS　S

が導けた．このうち $\mathbf{1}$ は 3 個の添字について全反対称（A＝antisymmetric）であり，

10は全対称（S＝symmetric）である．二つの8は，I_3-Y 平面では同じ位置を占めるが，上記のつくり方からわかるように混合した対称性を示しており，一方は最初の2個の添字について対称（MS＝mixed and symmetric）であり，他方は反対称（MA＝mixed and antisymmetric）と対称性が異なる．

これら既約表現のルート図はF.4 (a), (b) に与えてある．

c．既約表現ルート図の一般的規則

積表現を既約表現の和に分解する一般的な方法はヤング図を使って得られる（後述§F.5参照）．既約表現のルート図については次のような定理がある．

定理1：I_3-Y 平面に既約表現の多角形をプロットすると以下のことが成立する（証明略）．

(1) 多角形は必ず外に向かって凸であり，一般には不等辺六角形をなす（図F.5）．

(2) 一番外側の辺上にある点は1重点である．

(3) 外から2番目の辺上の点は2重点である．以下一つ内側に入るたびに多重度が一つ増す．

(4) 三角形になったところで多重度の増加は止まり，後はどれだけ内側に進んでも多重度は変わらない．特別な場合として，三角形既約表現の多重度はすべて1である．

F.4　テンソル算

一般の積ベクトルまたはテンソル（p 個の上つき添字，q 個の下つき添字をもつものとする）$T^{(p)}{}_{(q)}=T^{ij\cdots}{}_{mn\cdots}$ は，

$$(T^{ij\cdots}{}_{mn\cdots})'=U^i{}_aU^j{}_b\cdots U^{\dagger c}{}_mU^{\dagger d}{}_n\cdots T^{ab\cdots}{}_{cd\cdots} \qquad \text{(F. 40)}$$

のように変換する．$q=0$ のとき p 階の反変テンソル，$p=0$ のとき q 階の共変テンソル，$p, q\neq 0$ のとき混合テンソルという．このテンソルの全体を (p, q) で表すことにする．このテンソルのウエイト図は，上辺の長さが p，下辺の長さが q の六角形となる（図F.5参照）．p または q のいずれか一方が0のときは三角形になる．

$\delta_i{}^j\equiv\delta_j{}^i\equiv\delta_{ij}$ が $p=q=1$ の混合テンソル，ε_{ijk}，ε^{ijk} がそれぞれ3階の共変，反変テンソルであることは容易に証明できるので，これらを掛け算したものはやはりテンソルである．(F.40) で表されるテンソルは，一般には既約表現に属さず可約であるので，$\delta^i{}_j$，ε_{ijk}，ε^{ijk} などとの縮約をつくり，階数を低くすることが可能である．例えば，(p, q) に属するテンソル $T^{ijk\cdots}{}_{abc\cdots}$ から $\delta^a{}_i$ や ε_{abc} を使ってつくる

$$R^{jk\cdots}{}_{bc\cdots}\equiv\delta^a{}_iT^{ijk\cdots}{}_{abc\cdots}=T^{ijk\cdots}{}_{ibc\cdots} \qquad \text{(F. 41a)}$$

$$S^{k\cdots}{}_{abcd\cdots}\equiv\varepsilon_{aij}T^{ijk\cdots}{}_{bcd\cdots} \qquad \text{(F. 41b)}$$

は，それぞれ $(p-1,\ q-1)$，$(p-2, q+1)$ に属するテンソルとなる．トレースレスであったり，すでに対称化されているものは，この演算で0になり，それ以上階数を

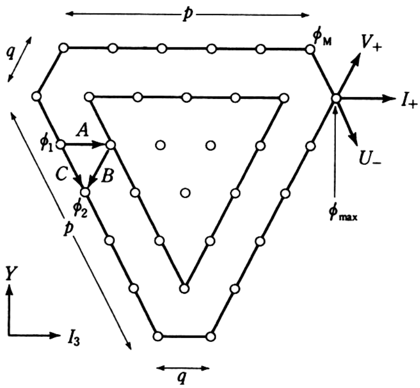


図 F.5　既約表現 $D^N(p,q)=D^{48}$ (5, 1)
辺長 p と q の不等辺六角形となる．多重度は内側にいくたびに 1 ずつ増すが，三角形になった後は増加しない．ϕ_{max} は，最大の I_3 をもつ要素 $(I_3=(p+q)/2=3)$ である．ϕ_1 から ϕ_2 へ移るとき，$\to A(=I_+)\to B(V_-)$ のルートと，$\to C(U_-)$ のルートがある．多重度が 1 のときは，ϕ_2 はルートによらず唯一に決まる．多重度が 2 以上のときは，道筋によりいきつく状態が異なる．

低くできないからそれは既約表現である．したがって，既約表現のテンソルは，上つき添字または下つき添字については，すべて対称化してあり，かつトレースレスであるようなテンソルである．すなわち

$$T^{ij\cdots}{}_{in\cdots}=0 \tag{F.42}$$

を満たす．対称化してあるから，トレースレスの条件は (F.42) 一つでよい．このテンソル空間の表現を $D^N(p,q)$ と表す．ただし N は独立な元の数で，

$$N=(p+1)(q+1)(p+q+2)/2 \tag{F.43}$$

で与えられる．

証明：上つき添字 $i\,j\cdots$ について，$\underbrace{\underbrace{11\cdots}_{a\text{個}}\ \underbrace{222\cdot}_{b\text{個}}\cdot 33\cdot}_{p\text{個}}$ のように並べると，おのおのの $a\,(0\leqq a\leqq p)$ に対して，b は $0\sim p-a$ までの，$(p-a+1)$ 通りの選び方がある．したがって，上つき添字の独立な並べ方 N_u は，

$$N_u=\sum_{a=0}^{p}(p-a+1)=(p+1)(p+2)/2$$

下つきの添字についても同じく，$N_d=(q+1)(q+2)/2$ 通りあるので，全体で，

$$N_uN_d=(p+1)(p+2)(q+1)(q+2)/4$$

通りの並べ方がある．次にトレースレスの条件は，$p\to p-1$, $q\to q-1$ とした分だ

けあるので，差し引くと，

$$N=(p+1)(p+2)(q+1)(q+2)/4-p(p+1)q(q+1)/4=(p+1)(q+1)(p+q+2)/2$$

(証明終)

いくつかの例：

$$D^1(0,0)=1,\ D^3(1,0)=3,\ D^3(0,1)=3^*,\ D^8(1,1)=8,\ D^6(2,0)=6,$$
$$D^6(0,2)=6^*,\ D^{10}(3,0)=10,\ D^{10}(0,3)=10^*,\cdots \tag{F. 44}$$

次に，ウエイト図で三角形 (p または $q=0$) の多重度が 1 であることを示そう．

$$I_3=\{n(u)+n(d)-n(\bar{u})-n(\bar{d})\}/2 \tag{F. 45a}$$
$$Y=\{n(u)+n(d)-2n(s)-n(\bar{u})-n(\bar{d})+2n(\bar{s})\}/3 \tag{F. 45b}$$
$$p=n(u)+n(d)+n(s)$$
$$q=n(\bar{u})+n(\bar{d})+n(\bar{s})$$

であるから，q (または p) が 0 のときは，p (または q)，I_3, Y を指定すれば，$n(q)$ は一義的に決まる．すなわちウエイト図上での多重度は 1 である．

カシミヤ演算子：$C_2\equiv C_2(n)=F^2=\sum_k(F_k)^2$ の求め方

F_k の代わりに，I, V, U スピンの演算子を使って書き表すと，

$$F^2=\{I_+,I_-\}/2+I_3^2+\{V_+,V_-\}/2+\{U_+,U_-\}/2+\frac{3}{4}Y^2$$
$$=(I_-I_++V_-V_++U_+U_-)+I_3^2+2I_3+(3/4)Y^2 \tag{F. 46}$$

多重項は，I_3-Y 平面で必ず凸であるので，多重項の中で最大の I_3 をもつ要素 ϕ_{MAX} (図 F.5) に対して，

$$I_+\phi_{\mathrm{MAX}}=V_+\phi_{\mathrm{MAX}}=U_{-\mathrm{MAX}}=0 \tag{F. 47}$$

ゆえに，この ϕ_{MAX} の I_3, Y がわかれば，

$$\langle F^2\rangle=\langle I_3^2\rangle+2\langle I_3\rangle+(3/4)Y^2 \tag{F. 48}$$

最大の I_3 は，p 個すべてを u, q 個すべてを $\bar{d}$ として得られるから，$I_3=(p+q)/2$ である．このとき，$Y=(p-q)/3$ であるので，

$$\langle F^2\rangle=\frac{(p^2+pq+q^2)}{3}+(p+q) \tag{F. 49}$$

例：
$$C_2(1)=\langle F^2\rangle_1(p=q=0)\qquad=0$$
$$C_2(3)=\langle F^2\rangle_3(p=1,\ q=0)=\langle F^2\rangle_{3*}=4/3$$
$$C_2(6)=\langle F^2\rangle_6(p=2,\ q=0)\qquad=10/3$$
$$C_2(8)=\langle F^2\rangle_8(p=q=1)\qquad=3$$
$$C_2(10)=\langle F^2\rangle_{10}(p=3,\ q=1)\qquad=6 \tag{F. 50}$$

F.5　ヤング図[2)]

ここで，$SU(N)$ での積表現を既約表現の和に分解する簡便な方法を証明なしに述べておく．

(1) ヤング図は，箱一つを N 次元の基本表現に，$N-1$ 個の箱を縦に並べたもの(列) をその複素共役表現 N^* に対応させる．したがって，

$SU(2)$：□＝**2** または **2***

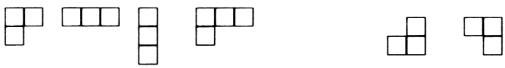
$SU(3)$：□＝**3**, □□（縦）＝**3*** (F. 51)

(2) 任意の既約表現を，縦 (列) および横 (行) に列べた n 個の箱で表す．この n 個の箱の配置は左上に向かって凸でなければならない．この意味は，第 1 行の箱の数を λ_1, 第 2 行の箱の数を $\lambda_2\cdots$，最後の第 m 行の箱の数を λ_m とするとき，

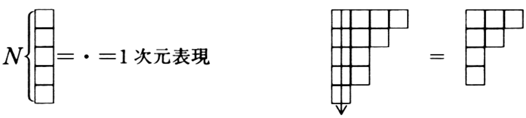
$$\lambda_1 \geqq \lambda_2 \geqq \cdots \lambda_m, \qquad \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots \lambda_m = n \tag{F. 52}$$

を意味する．

許される例　　　　禁止例

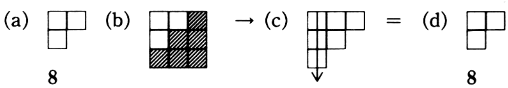


(3) 行方向の任意の要素の交換に関しては対称，列方向に対しては反対称の性質をもたせる．この要請のため，列方向の箱の最大数は $N-1$ である．なぜならば，$SU(N)$ の場合交換して反対称にできる要素の最大数は N であり，しかも N 個の要素を全反対称にできる組み合わせはただ 1 通りしかない．したがって，$m \geqq N$ 個の箱をもつ列があっても次元数は変わらないので，この列は削ってよい．この条件を $N=5$ について図示すると



(F. 53)

(4) ある表現に対して，それにつなげば $N \times N$ の配置になる表現を共役表現という．例えば $SU(3)$ の場合



(c) は (b) からわかるように，(a) の共役表現である．そして (3) の規則によって (d)＝(c) である．よって，(a) の 8 は共役表現が自身と同じの自己共役表現である (8*＝8).

表現 A と表現 B の積をつくる方法

(i) 表現 B の第 1 行の箱すべてに数字 1 を，第 2 行の箱すべてに 2 を，以下順に数字を詰めていく．

(ii) 次に，表現 B の第 1 行から順にすべての箱を，あらゆる可能なやり方で表現 A につなげる．

このとき，

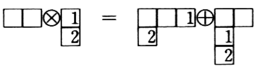
(a) 左上に凸という条件は守る．

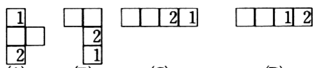
(b) 一つの行の中では，左から右へ数が小さくなってはいけない．

(c) 同じ列の中では，付加したすべての箱は違う数をもち，かつ上から下へ数が大きくならなければならない．

(d) 1行目に右から入り左端に出る．次に2行目に移り，以下全部の箱を右から左へ順に横切る線を引く．この線上の任意の点でそれまでに通過した数字 i の数を n_i とするとき，$n_i \geqq n_{i+1}$ でなければならない．

例 1　正しい処方　　　　禁止例

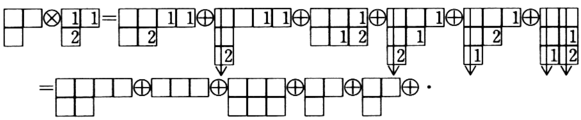




(A)　(B)　(C)　(D)

(A), (B) 図は (a) の条件，(C) は条件 (b) を満たさない．(D) は右から最初の箱で止まる線をつくると $n_1=0$, $n_2=1$ で $n_1<n_2$ となるので，条件 (d) を満たさない．

例 2　$SU(3)$ で $8\otimes 8$ をつくる．



$$\therefore \quad \mathbf{8\otimes 8=27\oplus 10\oplus 10^{*}\oplus 8\oplus 8\oplus 1} \qquad \text{(F. 54)}$$

8には同じ形のヤング図が二つあるが，数字の組み合わせ方が違うので，別の表現となる．

既約表現の多重度 D の数え方

$D=F/H$ で与えられる．

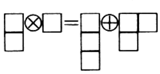
F の算出法：ヤング図の左上隅の箱に N を入れる．右にいけば1ずつ増やし ($N+1$, $N+2, \cdots$)，下にいけば順に1ずつ減らす (第2行第1列ならば $N-1$) (図 F.6 (a))．F はすべての箱の中の数の積である．

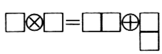
H の算出法：任意の行に右から入り，任意の箱で下に曲がって下に出る線を引く．これをカギという．一つのカギの道筋にある箱の数を h とするとき，H はすべての h の積である (F.6 (b))．

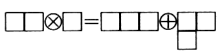
図 F.6 (c) の例では，$SU(3)$ として

$$D=\frac{3\times 4\times 2}{3\times 1\times 1}=8 \qquad \text{(F. 55)}$$

例 3：$\mathbf{3^{*}\otimes 3=1\oplus 8}$,　　$\mathbf{3\otimes 3=6\oplus 3^{*}}$,　　$\mathbf{6\otimes 3=10\oplus 8}$







例 4：$SU(4)$

4種のクォークからつくれるハドロンは，ヤング図を使えば容易に計算できて

メソン：　$\mathbf{4\otimes 4^{*}=1\oplus 15}$ 　(F. 56)

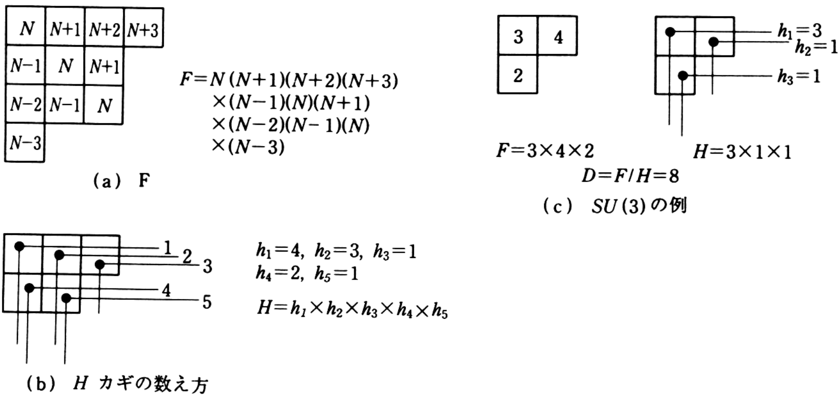


図 F.6　ヤング図，次元数 $D=F/H$ の数え方

バリオン：$\mathbf{4}\otimes\mathbf{4}\otimes\mathbf{4}=\mathbf{4}\oplus\mathbf{20}\oplus\mathbf{20}\oplus\mathbf{20}$　(F.57)

対称性：　A　MS　MA　S

であり，対称性は，$SU(3)$ の場合とまったく同じである．$SU(3)$ では 1 重項だったところが 4 重項になったのは，4 個のクォークから 3 個のクォークで全反対称の波動関数をつくる組み合わせが 4 通りあるからである．$SU(3)$ での 8 重項はチャームクォークを含むバリオンを 12 個を加え，10 重項は 10 個加えたことになる．

例 5：$SU(5)$

$$\mathbf{5}\otimes\mathbf{5}^*=\mathbf{1}\oplus\mathbf{24}$$

$$\mathbf{5}\otimes\mathbf{5}=\underset{\mathrm{A}}{\mathbf{10}}\oplus\underset{\mathrm{S}}{\mathbf{15}}$$

$$\mathbf{5}^*\otimes\mathbf{10}=\mathbf{5}\oplus\mathbf{45}$$

$$\mathbf{5}\otimes\mathbf{10}=\mathbf{40}\oplus\mathbf{10}^*$$

$$\mathbf{10}\otimes\mathbf{10}=\mathbf{5}^*\oplus\mathbf{45}^*\oplus\mathbf{50}$$

$$\mathbf{10}^*\otimes\mathbf{10}=\mathbf{1}\oplus\mathbf{24}\oplus\mathbf{75} \tag{F.58}$$

例 6：$SU(6)$

スピンの上下，香りの u, d, s 状態を基底のベクトル（$\psi^T=(u\uparrow, u\downarrow, d\uparrow, d\downarrow, s\uparrow, s\downarrow)$）とした $SU(6)$ を考えると，

メソン　：$\mathbf{6}\otimes\mathbf{6}^*=\mathbf{1}\oplus\mathbf{35}$　(F.59)

バリオン：$\mathbf{6}\otimes\mathbf{6}\otimes\mathbf{6}=\mathbf{20}\oplus\mathbf{70}\oplus\mathbf{70}\oplus\mathbf{56}$　(F.60)

対称性：　A　MS　MA　S

F. 6　反対称表現の共変微分

$SU(5)$ の $\mathbf{10}(\mathbf{5}\otimes\mathbf{5}=\mathbf{10}\oplus\mathbf{15}$ の $\mathbf{10}$，反対称表現）の共変微分を求めておく．

基本表現ベクトルを ψ^a，10 次元ベクトル ψ_{10} のテンソル表現を χ^{ab}, ψ 空間での生成演算子を $L_A{}^a{}_b$, χ 空間での生成演算子を $L_A{}^{ab}{}_{cd}$（以上すべて，$A=1\sim24$, $a, b=1\sim5$）と書く．χ^{ab} は $(\psi^a\psi^b-\psi^b\psi^a)$ のように変換するので，微小変換を考えると，

$$\psi'=(1-i(g_5/2)\varepsilon^A L_A)\psi=(\delta^a{}_b-i(g_5/2)\varepsilon^A L_A{}^a{}_b)\psi^b \tag{F.61}$$

$$\begin{aligned}\chi^{ab\prime}&=(\delta^{ab}{}_{cd}-i(g_5/2)\varepsilon^A L_A{}^{ab}{}_{cd})\chi^{cd}\\&=(1/2)[(\delta^a{}_c-i(g_5/2)\varepsilon^A L_A{}^a{}_c)(\delta^b{}_d-i(g_5/2)\varepsilon^A L_A{}^b{}_d)-(c\leftrightarrow d)]\chi^{cd}\end{aligned} \tag{F.62}$$

が成立する．これから

$$L_A{}^{ab}{}_{cd}=(1/2)(\delta^a{}_c L_A{}^b{}_d+\delta^b{}_d L_A{}^a{}_c-\delta^a{}_d L_A{}^b{}_c-\delta^b{}_c L_A{}^a{}_d) \tag{F.63}$$

が導ける．ラグランジアンの中には双 1 次形式で現れるので

$$\bar{\chi}_{ab}L_A{}^{ab}{}_{cd}\chi^{cd}=2\,\bar{\chi}_{ac}L_A{}^c{}_b\chi^{ab}=2\,\bar{\chi}_{ac}L_A{}^a{}_b\chi^{bc} \tag{F.64}$$

である．ゲージベクトル場の行列表現 $V_\mu=V^A{}_\mu L_A/\sqrt{2}$ を使えば，ラグランジアンの中の運動量項は

$$\mathscr{L}_{10}=i\bar{\chi}_{ac}\gamma^\mu\left[\delta^a{}_b\partial_\mu+\frac{i2g_5}{\sqrt{2}}(V_\mu)^a{}_b\right]\chi^{bc} \tag{F.65}$$

と書ける．

以上の議論は，$5\rightarrow N$, $10\rightarrow N(N-1)/2$ とすれば，$SU(N)$ で成立する．

参考文献

1) 例えば，P.A. Carruthers: Introduction to Unitary Symmetry, Interscience Publishers, a division of John Wiley & Sons (1966)
F.E. Close: An Introduction to Quarks and Leptons, Academic Press (1979)

2) 例えば，ジョージアイ著，九後汰一郎訳：物理学におけるリー代数，吉岡書店 (1990)

G　質量行列と T, CPT 変換

ここでは，K^0 と $\bar{K}^0$ の 2 体系の時間推移を記述する実効ハミルトニアンとしての質量行列がどのように表されるかを厳密な証明なしに直観的に導く．どれだけの近似が含まれ，どのような条件で有効かについては，原論文 1) もしくは 2) を参照してほしい．K^0 とその反粒子である $\bar{K}^0$ は，強い相互作用の固有状態であり，ストレンジネスによって区別される．強い相互作用ではストレンジネスが保存されるので，両者が混合することはない．$\bar{K}^0$ と K^0 は，CP がよい量子数であれば位相を適当に選んで，

$$|\bar{K}^0\rangle=CP|K^0\rangle,\qquad |K^0\rangle=CP|\bar{K}^0\rangle \tag{G.1}$$

のように定義できる．弱い相互作用が入ると，ストレンジネスを保存しない（$\varDelta S=1$）過程が可能であり，

$$K^0 \longleftrightarrow 2\pi, 3\pi, \pi l\nu \longleftrightarrow \bar{K}^0 \tag{G. 2}$$

などを通して混合が起こる．この過程は，弱い相互作用の少なくも2次の効果である．ハミルトニアン H を，H_S（強い相互作用）と H_W（弱い相互作用）に分けて，摂動の2次までを考えることにすれば，遷移を引き起こす S 行列は次式で与えられる．

$$S_{fi}=1-2\pi i\delta(E_i-E_f)T_{fi}$$
$$T_{fi}=\langle f|H_W|i\rangle+\Sigma\frac{\langle f|H_W|n\rangle\langle n|H_W|i\rangle}{E_i-E_n+i\varepsilon} \tag{G. 3}$$

主値積分の記号 P を使えば，

$$\frac{1}{E_i-E_n+i\varepsilon}=\frac{P}{E_i-E_n}-i\pi\delta(E_i-E_n)$$

である．$K^0, \bar{K}^0$ の2体の運動方程式は，K の静止系で，これに質量項（$\langle i|H_S|j\rangle=M_i\delta_{ij}$）を加えた質量行列 $\widetilde{M}$ によって記述できる．

$$\widetilde{M}_{ij}\equiv M_i\delta_{ij}+T_{ij}\equiv M_{ij}-\frac{i}{2}\Gamma_{ij} \tag{G. 4}$$

$$M_{ij}=M_j\delta_{ij}+\langle i|H_W|j\rangle+P\Sigma\frac{\langle i|H_W|n\rangle\langle n|H_W|j\rangle}{M_j-E_n} \tag{G. 5}$$

$$\Gamma_{ij}=2\pi\Sigma\delta(M_j-E_n)\langle i|H_W|n\rangle\langle n|H_W|j\rangle \tag{G. 6}$$

H_W がエルミートであるから，M_{ij} および Γ_{ij} もまたエルミートであるが，$\widetilde{M}_{ij}$ はエルミートではない．弱い相互作用の固有状態は，この $\widetilde{M}$ を対角化して得られ，その固有値を λ_σ，固有状態を $|\sigma\rangle$ とすれば，

$$\lambda_\sigma=m_\sigma-i\frac{\Gamma_\sigma}{2}, \qquad |\sigma(t)\rangle=|\sigma(0)\rangle e^{-i\lambda_\sigma t} \tag{G. 7}$$

となり，平均寿命 $\tau=(\Gamma_\sigma)^{-1}$ で崩壊する状態を表す．

次に，$|\alpha\rangle$ の CPT 変換した状態を $\langle\Theta\alpha|$ で表すことにすれば，CPT 不変性は，

$$\langle\alpha|H|\beta\rangle=\langle\alpha|\Theta^{-1}\Theta H\Theta^{-1}\Theta|\beta\rangle$$
$$=\langle\Theta\beta|H|\Theta\alpha\rangle \tag{G. 8}$$

と表される．$|\Theta\alpha\rangle$ は，$|\alpha\rangle$ から，粒子を反粒子に，スピン成分を反転して得られる（位相の不定性は残る．以下他のすべての変換も同じ）．K の場合は $|\Theta K\rangle=|\bar{K}\rangle$．同様に T 不変性は，

$$\langle\alpha|H|\beta\rangle=\langle\alpha|T^{-1}THT^{-1}T|\beta\rangle$$
$$=\langle T\beta|H|T\alpha\rangle \tag{G. 9}$$

であり，$|T\alpha\rangle$ は，$|\alpha\rangle$ の運動量の符号とスピン成分を逆にしたものに適当な位相因子を掛けたものである．K の静止系では，$|TK\rangle=|K\rangle$．CP 不変の場合は，

$$\langle\alpha|H|\beta\rangle=\langle\alpha|CP^{-1}CPHCP^{-1}CP|\beta\rangle$$

$$=\langle CP\alpha|H|CP\beta\rangle \tag{G.10}$$

で，$|CP\alpha\rangle$ は，$|\alpha\rangle$ から，粒子を反粒子にして，運動量の符号を変え，適当な位相因子とパリティ固有値を掛けて得られる．

CPT 変換を質量行列に適用すると，質量項および (G.3) の第 1 項は (G.8) をそのまま適用できるが，第 2 項については，

$$T_{fi}=\sum\frac{\langle f|\Theta^{-1}H_W\Theta|n\rangle\langle n|\Theta^{-1}H_W\Theta|i\rangle}{E_i-E_n+i\varepsilon}=\sum\frac{\langle\Theta n|H_W|\Theta f\rangle\langle\Theta i|H_W|\Theta n\rangle}{E_i-E_n+i\varepsilon}$$

$$=\sum\frac{\langle\Theta i|H_W|\Theta n\rangle\langle\Theta n|H_W|\Theta f\rangle}{E_i-E_n+i\varepsilon}=\langle\Theta i|T|\Theta f\rangle \tag{G.11}$$

CPT 変換はスピンの向きを変えるので，$|\Theta n\rangle\neq|n\rangle$ であるが，和をとれば差はなくなる．また $E_i=E_f$ であるので，結局

$$\langle f|\widetilde{M}|i\rangle=\langle\Theta i|\widetilde{M}|\Theta f\rangle \tag{G.12}$$

が言えたことになる．$i=f=K^0$, $\Theta K^0=\overline{K}^0$ とすれば，

$$M_{11}=M_{22},\qquad \Gamma_{11}=\Gamma_{22} \tag{G.13}$$

これから，K^0 と $\overline{K}^0$ は，同じ質量と同じ Γ (全崩壊率) をもつことがわかる．この議論は一般化できて，すべての粒子と反粒子は同じ質量，同じ寿命をもつ．$\widetilde{M}_{12}$ と $\widetilde{M}_{21}$ に関しては，CPT 保存からは何も言えないが，P 保存を適用すれば，

$$\widetilde{M}_{12}=\widetilde{M}_{21} \tag{G.14a}$$

が結論される．CP が保存すれば，

$$\widetilde{M}_{11}=\widetilde{M}_{22}\ \text{かつ}\ \widetilde{M}_{12}=\widetilde{M}_{21} \tag{G.14b}$$

である．

崩壊振幅[3]：散乱行列 S を S_0 と S_D に分ける．S_0 は弱い相互作用がないときの散乱行列であり，$|A\rangle$ をそのときの固有状態つまり安定状態とする．$|B\rangle$ を $|A\rangle$ 以外の状態とすれば，$\langle A|S_0|B\rangle=0$ が成立する．S_0, S_D ともにユニタリーであるから，

$$S_0^\dagger S_D+S_D^\dagger S_0+1=0 \tag{G.15}$$

これを，A と B の間で挟めば，

$$\langle A|S_0^\dagger|A\rangle\langle A|S_D|B\rangle+\langle A|S_D^\dagger|B\rangle\langle B|S_0|B\rangle=\langle A|S|B\rangle+\langle A|S^\dagger|B\rangle\langle B|S_0|B\rangle=0 \tag{G.16}$$

もし $|B\rangle$ が，S_0 の散乱固有状態であれば，

$$S_0|B\rangle=e^{i2\delta}|B\rangle \tag{G.17}$$

であるので，$S_{AB}=\delta_{AB}-i2\pi\delta(E_A-E_B)T_{AB}$ を使って，

$$\langle A|T|B\rangle=e^{i2\delta}\langle A|T^\dagger|B\rangle=e^{i2\delta}\langle B|T|A\rangle^* \tag{G.18}$$

CPT が保存すれば，(G.8) を入れて，

$$\langle\Theta B|T|\Theta A\rangle=e^{i2\delta}\langle B|T|A\rangle^* \tag{G.19}$$

T が保存すれば，(G.9) を入れて，

$$\langle B|T|A\rangle=e^{i2\delta}\langle B|T|A\rangle^* \tag{G.20}$$

(G.20) は，崩壊振幅が，

$$\langle B|T|A\rangle = \pm e^{i\delta}|\langle B|T|A\rangle| \quad \text{(G. 21)}$$

と書けることを示す．つまり散乱の位相を取り出した残りの崩壊振幅は，T が保存すれば（CPT が保存していれば，CP 保存則でも同じ)，実数でなければならない．

参考文献

1) E.P. Wigner and V.F. Weisskopf : *Z. Phys.*, **64** (1930) ; **65** (1930) 18
2) O. Nachtman : Elementary Particle Physics, Springer-Verlag (1989) Appendix I, p. 513
3) P.K. Cabir : The CP Puzzle ; Strange Decays of the Neutral Kaon, Academic Press (1968), Appendix C

H　フィールツ (Fierz) 変換

4-フェルミ相互作用でディラック場の順序を変える際の変換式のこと．

いま $\psi_1, \psi_2, \psi_3, \psi_4$ をディラック場とすると，4-フェルミ相互作用のラグランジアンは一般に

$$\Gamma_i = (\bar{\psi}_1 O_i \psi_2)(\bar{\psi}_3 O_i \psi_4) \quad \text{(H. 1)}$$

$$O_i = 1(S),\ \gamma^\mu(V),\ \sigma^{\mu\nu}(T),\ \gamma^\mu\gamma^5(A),\ \gamma^5(P)$$

の形をしている．これを

$$\Gamma_i = \Sigma_j C_{ij}(\bar{\psi}_1 O_j \psi_4)(\bar{\psi}_3 O_j \psi_2) \quad \text{(H. 2)}$$

の形に展開したときフィールツ変換をしたという．このように書けることを証明し，C_{ij} を求めるために Γ_i を成分で表すと，

$$\Gamma_i = \sum_{a,b,c,d} (\bar{\psi}_{1a} O_{iab} \psi_{2b})(\bar{\psi}_{3c} O_{icd} \psi_{4d}) \quad \text{(H. 3)}$$

$$= \Sigma O_{iab} O_{icd} \bar{\psi}_{1a} \psi_{2b} \bar{\psi}_{3c} \psi_{4d} = -\Sigma O_{iab} O_{icd} \bar{\psi}_{1a} \psi_{4d} \bar{\psi}_{3c} \psi_{2b}$$

$$\equiv \Sigma M_{\mathrm{ac;db}} \bar{\psi}_{1a} \psi_{4d} \bar{\psi}_{3c} \psi_{2b} \quad \text{(H. 4)}$$

a, b, c, d はすべて 1～4 までの値をとるから，a, d を固定すると $M_{ac;db}$ は 4×4 行列と見なすことができる．したがって，16 個の独立な行列 O_i で展開することができる．

$$\therefore \quad M_{ac;db} = B^S{}_{ad}(1)_{cb} + B^V{}_{\mu ad}(\gamma^\mu)_{cb} + B^T{}_{\mu\nu ad}(\sigma^{\mu\nu})_{cb} + B^A{}_{\mu ad}(\gamma^\mu\gamma^5)_{cb} + B^P{}_{ad}(\gamma^5)_{cb} \quad \text{(H. 5)}$$

B^i を求めるために，両辺に $(O_i)_{bc}$ を掛けてトレースをとる．$\Gamma_i = V$ として，まず $O_i = 1$ とすると

右辺 $= B^S{}_{ad}(1)_{bc}(1)_{cb} = 4B^S_{ad}$，他の係数 $= 0$

左辺 $= -(\gamma^\mu)_{ab}(1)_{bc}(\gamma_\mu)_{cd} = -(\gamma^\mu\gamma_\mu)_{ad} = -4\delta_{ad}$

表 H.1　フィールツ変換係数

$i\backslash j$	S	V	T	A	P
S	$-1/4$	$-1/4$	$-1/8$	$1/4$	$-1/4$
V	-1	$1/2$	0	$1/2$	1
T	-3	0	$1/2$	0	-3
A	1	$1/2$	0	$1/2$	-1
P	$-1/4$	$1/4$	$-1/8$	$-1/4$	$-1/4$

$$\therefore \quad B^{S}_{ad}=-(1)_{ad}\longrightarrow C_{21}=-1 \tag{H.6}$$

次に $O_i=\gamma^\nu$ とすると

$$右辺=B_{\mu ad}{}^{V}(\gamma^\nu)_{bc}(\gamma^\mu)_{cb}=4g^{\mu\nu}B_{\mu ad}{}^{V},\ 他の係数=0 \tag{H.7}$$

$$左辺=-(\gamma^\mu)_{ab}(\gamma^\nu)_{bc}(\gamma_\mu)_{cd}=+2(\gamma^\nu)_{ad}\longrightarrow C_{22}=1/2$$

以下同様に，すべての 16 個の係数を求めることができる．表 H.1 にこうして求めた係数 C_{ij} を示す．

$$\Gamma_i'=(\bar{\psi}_1 O_i\gamma^5\psi_2)(\bar{\psi}_3 O_i\psi_4) \tag{H.8}$$

の場合は，上の変換式で $\gamma^5\psi_2\rightarrow\psi_2'$ とおけば，

$$\begin{aligned}\Gamma_i'&=\Sigma C'_{ij}(\bar{\psi}_{1a}O_{jab}\psi_{4b})(\bar{\psi}_{3c}(O_j\gamma^5)_{cd}\psi_{2d})\\&=M'_{ac;bd}\,\bar{\psi}_{1a}\psi_{2d}\bar{\psi}_{3c}\psi_{4b}\end{aligned} \tag{H.9}$$

と書けることを使うと，同じように計算できて $C'_{ij}=C_{ij}$ を与える．表から

$$\Sigma_j C_{ij}C_{jk}=\delta_{ik} \tag{H.10}$$

が証明できるが，これは 2 回変換すれば元にもどることを考えると当然である．特別な場合として

$$(\bar{\psi}_1\gamma^\mu(1-\gamma^5)\psi_2)(\bar{\psi}_3\gamma_\mu(1-\gamma^5)\psi_4)=(\bar{\psi}_1\gamma^\mu(1-\gamma^5)\psi_4)(\bar{\psi}_3\gamma_\mu(1-\gamma^5)\psi_2) \tag{H.11}$$

I　ファインマン規則

ファインマン図とその取扱いについての詳細は，GWS 理論の W, Z に関する過程に関しては第 6 章，第 7 章を，QCD に関しては第 5 章を参照されたい．ここでは，GWS 理論のファインマン規則をまとめる．

一つの例として，$e\bar{e}\rightarrow\mu\bar{\mu}$ の散乱振幅を計算する．ファインマン図は，図 I.1 のように表され，散乱行列から

$$S_{fi}=\delta_{fi}-(2\pi)^4 i\delta^4(p_1+p_2-p_3-p_4)\mathcal{M} \tag{I.1}$$

で定義される振幅 $\mathcal{M}$ は，ファインマン規則を使って

$$\begin{aligned}&i\mathcal{M}=\bar{u}_s(p_3)(-ie)\gamma^\mu v_r(p_4)\left(\frac{-ig_{\mu\nu}}{q^2+i\varepsilon}\right)\bar{v}_n(p_2)(-ie\gamma^\nu)u_m(p_1)\\&q=p_1+p_2\end{aligned} \tag{I.2}$$

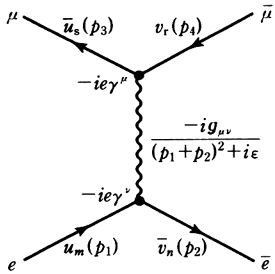


図 I. 1　$e\bar{e} \to \mu\bar{\mu}$ 対生成過程振幅をつくるためのファインマン規則

と表される．いったん散乱振幅が得られれば，微分断面積は

$$d\sigma = \frac{|\mathcal{M}|^2}{4[(p_1 \cdot p_2)^2 - m_1{}^2 m_2{}^2]^{1/2}}\, dLIPS \tag{I. 3}$$

$$dLIPS = (2\pi)^4 \delta^4(p_1 + p_2 - p_3 - p_4)\frac{d^3 p_3}{(2\pi)^3 2E_3}\frac{d^3 p_4}{(2\pi)^3 2E_4} \tag{I. 4}$$

によって計算できる．ただし，スピン偏極を見ない場合は始状態については平均を終状態については和をとる．スピンが 1，質量が 0 のゲージボソンの伝播関数は，一般的には

$$\frac{i}{k^2}\left[-g_{\mu\nu} + (1-\xi)\frac{k_{\mu\nu}}{k^2}\right]$$

であるが，通常は $\xi=1$ とおくファインマンゲージを使う．GWS理論では多くの計算に R ゲージが使われるが，本書では物理的な U（ユニタリー）ゲージに限定している．

外線，内線にはエネルギー運動量を特定する必要がある．線が交わるところ

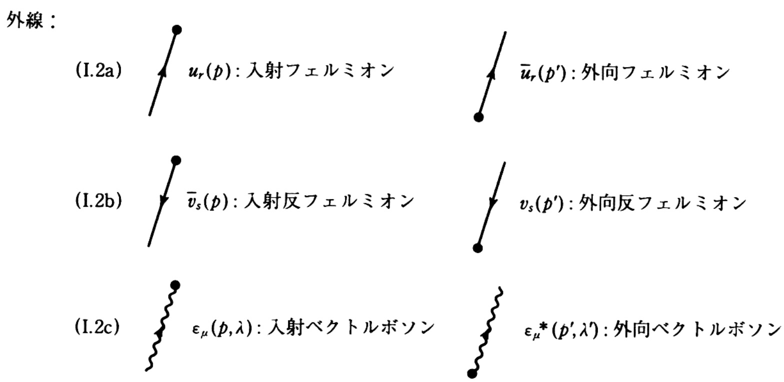
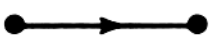


図 I. 2　外線（波動関数）に対するファインマン規則

内線：

(I.3a)  $\dfrac{-ig_{\mu\nu}}{k^2+i\varepsilon}$ フォトン

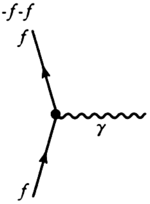
(I.3b)  $\dfrac{-i\left(g_{\mu\nu}-\dfrac{k_\mu k_\nu}{m^2}\right)}{k^2-m^2+i\varepsilon}$ 質量のあるゲージボソン (W,Z)

(I.3c)  $\dfrac{i}{\not p-m+i\varepsilon}=\dfrac{i(\not p+m)}{p^2-m^2+i\varepsilon}$ フェルミオン

(I3d)  $\dfrac{i}{k^2-m^2+i\varepsilon}$ ヒッグス粒子

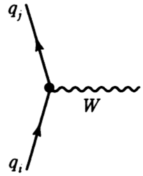
図 I. 3　内線（伝播関数）に対するファインマン規則

γ-f-f

(I.4a) 

$-ieQ_f\gamma^\mu$

W-q_i-q_j(W-l-ν)

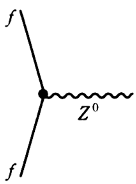
(I.4b) 

$-i\dfrac{g_W}{\sqrt{2}}V_{ji}\gamma^\mu\left(\dfrac{1-\gamma^5}{2}\right)$

$g_W=\dfrac{e}{\sin\theta_W}$

レプトンの場合 $V_{ji}=1$

Z-f-f

(I.4c) 

$-ig_Z\gamma^\mu\left[\varepsilon_L\dfrac{1-\gamma^5}{2}+\varepsilon_R\dfrac{1+\gamma^5}{2}\right]$

$=-i\dfrac{g_Z}{2}\gamma^\mu[v_f-a_f\gamma^5]$

$g_Z=\dfrac{g_W}{\cos\theta_W}=\dfrac{e}{\sin\theta_W\cos\theta_W}$

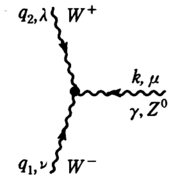
$\varepsilon_L=I_{3f}-Q_f\sin^2\theta_W,\quad \varepsilon_R=-Q_f\sin^2\theta_W$

$v_f=\varepsilon_L+\varepsilon_R=I_{3f}-2\theta_f\sin^2\theta_W,\ a_f=\varepsilon_L-\varepsilon_R=I_{3f}$

図 I. 4　ゲージボソンとフェルミオンの結合に対するファインマン規則
V_{ji} は小林-益川行列要素を表す.

（ヴァーテックス）では，エネルギー運動量が保存するように設定しなければならない．このため，外線の4元運動量を設定すれば，それにつながる内線の運動量は自動的に決まる．しかし，内線が閉じるループのところでは，内線の4元運動量は自由にとれるので積分をする必要がある．フェルミオンループの場合は，反交換性のためループの数だけ -1 を乗じなければならない．以下に各種のファインマン規則を図示する．

(I.5a)

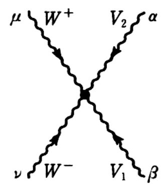


$$-i\gamma_V[g^{\nu\lambda}(q_1-q_2)^\mu+g^{\lambda\mu}(q_2-k)^\nu+g^{\mu\nu}(k-q_1)^\lambda]$$

$V=\gamma$ のとき　$\gamma_V=e$

$V=Z^0$ のとき　$\gamma_V=e\cot\theta_W$

(I.5b)

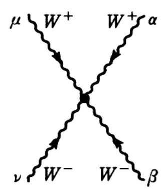


$$-i\gamma_{V_1}\gamma_{V_2}[2g^{\alpha\beta}g^{\mu\nu}-g^{\alpha\mu}g^{\beta\nu}-g^{\alpha\nu}g^{\beta\mu}]$$

$V=\gamma$ のとき　$\gamma_V=e$

$V=Z^0$ のとき　$\gamma_V=e\cot\theta_W$

(I.5c)



$$ig_W^2[2g^{\mu\alpha}g^{\nu\beta}-g^{\mu\beta}g^{\alpha\nu}-g^{\mu\nu}g^{\alpha\beta}]$$

$$g_W=\frac{e}{\sin\theta_W}$$

図 I.5 ゲージボソン同士の結合に対するファインマン規則

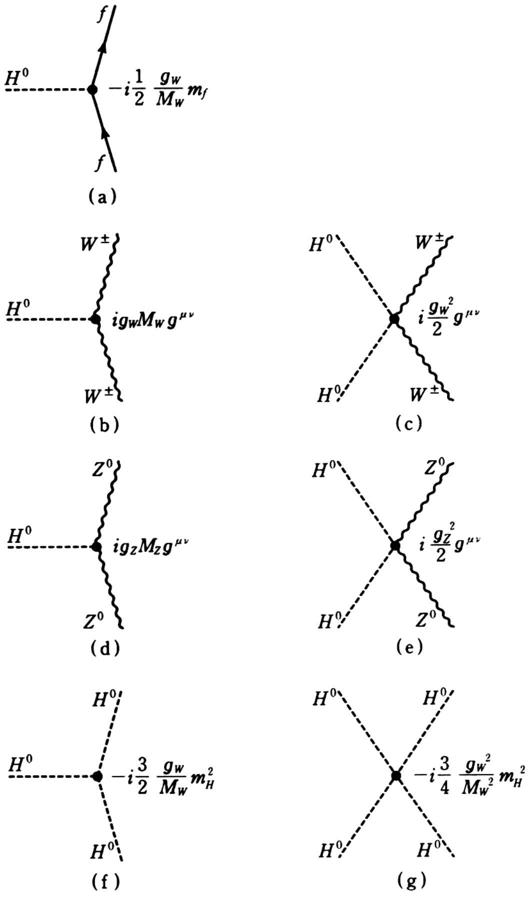


図 I. 6　ヒッグスとの結合に対するファインマン規則

J　フェルミオンループによる放射補正の計算

ここでは，ゲージボソンのフェルミオンループ補正を評価し，本文中に現れた Δr と $\hat{\Pi}_{\gamma Z}(s)$ を計算する．

J.1　ゲージボソンの伝播関数補正

ベクトルボソン V の伝播関数のループ補正は，ユニタリーゲージで

$$\frac{-i\left(g_{\rho\mu}-\frac{p_\rho p_\mu}{m_{V1}{}^2}\right)}{p^2-m_{V1}{}^2}[-i\Sigma^{\mu\nu}(p)]\frac{-i\left(g_{\nu\sigma}-\frac{p_\nu p_\sigma}{m_{V2}{}^2}\right)}{p^2-m_{V2}{}^2} \tag{J.1}$$

$$\begin{aligned}-i\Sigma^{\mu\nu}(p)=&-gg'\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}\mathrm{Tr}\left[\frac{i(\not{k}+m_1)}{k^2-m_1{}^2}i\gamma^\nu(v'-a'\gamma^5)\right.\\&\left.\times\frac{i(\not{p}+\not{k}+m_2)}{(k+p)^2-m_2{}^2}i\gamma^\mu(v-a\gamma^5)\right]\end{aligned} \tag{J.2}$$

で与えられる．g, g', v, v', a, a' は

(1)　$v_1=v_2=W^\pm$ のとき

$$g=g'=\frac{g_W}{\sqrt{2}}=\frac{e}{\sqrt{2}s_W},\qquad v=v'=a=a'=\frac{1}{2} \tag{J.3a}$$

(2)　$v_1=v_2=Z$

$$\begin{aligned}&g=g'=\frac{g_Z}{2}=\frac{e}{2s_Wc_W},\qquad v=v'=I_{3f}-2Q_fs_W{}^2,\quad a=a'=I_{3f}\\&m_1=m_2=m_f\end{aligned} \tag{J.3b}$$

(3)　$v_1=\gamma,\ v_2=Z$

$$\begin{aligned}&g'=\frac{g_Z}{2}=\frac{e}{2s_Wc_W},\qquad g=e\\&v'=I_{3f}-2Q_fs_W{}^2,\quad v=Q_f,\quad a'=I_{3f},\quad a=0\\&m_1=m_2=m_f\end{aligned} \tag{J.3c}$$

(4)　$v_1=v_2=\gamma$

$$\begin{aligned}&g=g'=e,\quad v=v'=Q_f,\quad a=a'=0\\&m_1=m_2=m_f\end{aligned} \tag{J.3d}$$

トレースを計算すると

$$\begin{aligned}\mathrm{Tr}[\ \cdot\ ]=4[&(vv'+aa')\{k^\mu(p+k)^\nu+k^\nu(p+k)^\mu-g^{\mu\nu}(k^2+(pk)\}\\&+(vv'-aa')m_1m_2g^{\mu\nu}]\end{aligned} \tag{J.4}$$

であるので，$\Sigma^{\mu\nu}$ は次の形に書ける．

$$\Sigma^{\mu\nu}=g^{\mu\nu}\Sigma_T+p^\mu p^\nu\Sigma_L=\left(g^{\mu\nu}-\frac{p^\mu p^\nu}{p^2}\right)\Sigma_T+\frac{p^\mu p^\nu}{p^2}(p^2\Sigma_L+\Sigma_T) \tag{J.5}$$

散乱行列の中では，偏極ベクトルと縮約をとるので，第2項は寄与しない．Σ_L は，

ゲージのとり方により変わる項である．物理的に意味があるのは第1項の横方向振幅 Σ_T のみであり，これはゲージによらないので，以下は Σ_T のみを考慮することにする．

$$k^2+(pk)=\frac{1}{2}\{k^2-m_1{}^2+(p+k)^2-m_2{}^2+(m_1{}^2+m_2{}^2-p^2)\} \tag{J.6}$$

を考慮すると，Σ_T を求めるには，次の形の積分を計算する必要がある．

$$-A_1=-A_0(m_1)=\int_k\frac{1}{(1)}, \qquad -A_2=-A_0(m_2)=\int_k\frac{1}{(2)} \tag{J.7a}$$

$$B_0=B_0(p^2;m_1,m_2)=\int_k\frac{1}{(1)(2)} \tag{J.7b}$$

$$p^\mu B_1(p^2;m_1,m_2)=\int_k\frac{k^\mu}{(1)(2)} \tag{J.7c}$$

$$p^\mu p^\nu B_{21}-g^{\mu\nu}B_{22}=\int_k\frac{k^\mu k^\nu}{(1)(2)} \tag{J.7d}$$

ただし，$(1)\equiv k^2-m_1{}^2+i\varepsilon$，$(2)\equiv(p+k)^2-m_2{}^2+i\varepsilon$ という省略型を使い

$$\int_k=\frac{16\pi^2}{i}\mu^{4-D}\int\frac{d^Dk}{(2\pi)^D} \tag{J.8}$$

は，これから示す次元正則化法による積分を表す．これらの式を使うと，Σ_T は，

$$\Sigma_T=(-i)\frac{i}{16\pi^2}4gg'\left[(vv'+aa')\left\{-2B_{22}+\frac{A_0(m_1)+A_0(m_2)}{2}+\frac{p^2-m_1{}^2-m_2{}^2}{2}B_0\right\}\right.$$
$$\left.+(vv'-aa')m_1m_2B_0\right] \tag{J.9}$$

と表される．

J.2　次元正則化法による積分計算

代表例として B_0 を計算する．これは，k のべきを数えれば対数発散をする積分である．そこで，積分を集束させるため，4次元から D 次元へ移ることにする．

$$k^\mu=(k^0;k^1,k^2,k^3)\longrightarrow(k^0;k^1,k^2,\cdots,k^{D-1}) \tag{J.10a}$$

$$\frac{d^4k}{(2\pi)^4}\longrightarrow\mu^{4-D}\frac{d^Dk}{(2\pi)^D} \tag{J.10b}$$

$$k^2=(k^0)^2-\sum^3{}_i(k^i)^2\longrightarrow(k^0)^2-\sum^{D-1}{}_i(k^i)^2 \tag{J.10c}$$

$$g^{\mu\nu}g_{\mu\nu}=4\longrightarrow g^{\mu\nu}g_{\mu\nu}=D \tag{J.10d}$$

ここで，μ は積分の次元を正しく保つために導入したエネルギースケールパラメーターである．$D-4<0$ であれば積分は集束する．後に明らかになるように B_0 は D の解析関数であるので，D を4より大きい整数として形式的に計算を実行し，最後に $D\to4$ の極限をとることが許される．まず，次のファインマンのパラメーター変数を導入して書き直す．

$$\frac{1}{AB}=\int_0^1 \mathrm{d}z \frac{1}{[A(1-z)+Bz]^2} \tag{J. 11}$$

積分が収束することが保証されるので，積分の順序を変えてもよい．

$$B_0=\int_k \frac{1}{(1)(2)}=\frac{16\pi^2}{i}\mu^{4-D}\int_0^1 \mathrm{d}z\int\frac{\mathrm{d}^D k}{(2\pi)^D}\frac{1}{[(k+zp)^2-M^2+i\varepsilon]^2} \tag{J. 12a}$$

$$M^2=-p^2 z(1-z)+m_1{}^2(1-z)+m_2{}^2 z \tag{J. 12b}$$

$k+zp$ を改めて k と変数変換したうえで，$\omega^2=\Sigma k^{i2}+M^2$ を導入すると，分母は

$$(k^0-\sqrt{\omega^2-i\varepsilon})(k^0+\sqrt{\omega^2-i\varepsilon}) \tag{J. 13}$$

であるから，$\omega-i\varepsilon$ と $-\omega+i\varepsilon$ に極をもつ．そこで，$k^0\to ik^0$ として，積分路を 90 度回転すれば，

$$k^0=(k^0)^2-\omega^2\to -r^2, \qquad r^2=\sum_{i=0}^{D-1}(k^i)^2 \tag{J. 14}$$

となる．r は D 次元ユークリッド空間での長さであるから，極座標を採用すれば $\int \mathrm{d}^D k$ は $D-1$ 個の角変数については積分が行えて，D 次元空間の全立体角 Ω_D を与える．

D 次元の全立体角 Ω_D は次のようにして求められる．

$\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}x\mathrm{e}^{-x^2}=\sqrt{\pi}$ を使って，

$$R=\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}x_1\cdots\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}x_D\mathrm{e}^{-x_1{}^2\cdots-x_D{}^2}=\pi^{D/2} \tag{J. 15a}$$

を極座標で計算すると，

$$\Omega_D\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-r^2}r^{D-1}\mathrm{d}r=\pi^{D/2} \tag{J. 15b}$$

であるので，Γ 関数の定義

$$\Gamma(x)=\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-t}t^{x-1}\mathrm{d}t \tag{J. 16}$$

を使えば，

$$\Omega_D=\frac{2\pi^{D/2}}{\Gamma(D/2)} \tag{J. 17}$$

を得る．(J.17) を使って，(J.12) の積分を実行すれば

$$\int\frac{\mathrm{d}^D k}{(r^2+M^2)^2}=i\Omega_D\int_0^{\infty}\frac{r^{D-1}\mathrm{d}r}{(r^2+M^2)^2}=i\frac{M^{D-4}\Omega_D}{2}B\left(\frac{D}{2},2-\frac{D}{2}\right) \tag{J. 18}$$

$$B(p,q)=\int_0^{\infty}\frac{x^{q-1}}{(1+x)^{p+q}}\mathrm{d}x=\int_0^1 t^{p-1}(1-t)^{q-1}\mathrm{d}t=\frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)} \tag{J. 19}$$

を得るので，整理すると

$$\begin{aligned}B_0&=\int_0^1\mathrm{d}z\frac{16\pi^2\mu^{4-D}M^{D-4}}{(2\pi)^D}\frac{\pi^{D/2}}{\Gamma(D/2)}\frac{\Gamma(D/2)\Gamma(2-D/2)}{\Gamma(2)}\\&=\int_0^1\mathrm{d}z\left[\frac{4\pi\mu^2}{M^2}\right]^{2-D/2}\Gamma\left(2-\frac{D}{2}\right)\end{aligned} \tag{J. 20}$$

ここで，ε を微小量とし，$4-D=\varepsilon$ とおいて

$$\Gamma(\varepsilon/2) \fallingdotseq 2/\varepsilon-\gamma_E+O(\varepsilon) \tag{J. 21a}$$

$$x^{\varepsilon/2}=e^{(\varepsilon/2)\ln x} \fallingdotseq 1+\frac{\varepsilon}{2}\ln x \tag{J. 21b}$$

を使えば（ただし，γ_E はオイラーの定数である），

$$B_0(p^2; m_1, m_2)=\Delta-\int_0^1 dz \ln(M^2)$$
$$=\Delta-\int_0^1 dz \ln[-p^2z(1-z)+m_1{}^2(1-z)+m_2{}^2z-i\varepsilon] \tag{J. 22}$$

$$\Delta \equiv \frac{2}{\varepsilon}-\gamma_E+\ln(4\pi)+\ln\mu^2 \tag{J. 23}$$

を得る．第 2 項は有限な解析関数であり，無限大に発散する部分は第 1 項の次元変数 D の極として現れることがわかる．無限大を処理する方法として，$2/\varepsilon$ のみを差し引くのが最小限引き算法 (minimal subtraction) であるが，(J.23) の第 1 項から第 3 項までは常に一体として現れるので，まとめて引き算するのが修正最小限引き算法 (modified minimal subtraction；通常 $\overline{MS}$ という記号をつけて示す) である．すなわち $\overline{MS}$ 引き算法とは

$$\Delta \longrightarrow \ln\mu^2 \tag{J. 24}$$

と置き換えることに等しい．QCD では，結合定数 $\alpha_s(\mu)$ の参照すべきエネルギースケールが不定であるので，$\overline{MS}$ 引き算法が通常使われるが，電弱相互作用のように，α, G_F が，p^2 の特定の値（例えば $p^2=0$）に対して与えられるとき，そこでの値を基準にとることができる（質量殻引き算法：on-shell scheme)．このとき，Δ は保持しておいても物理量の中には相殺して現れないようになっている．以下は $\ln\mu^2$ を状況に応じて Δ の意味にも使うことにする．

B_0 以外の他の積分も同様にして計算できる．以下，$p^2=s$ と書くことにしてまとめると[1)]

$$A_0(m)=-m^2\Delta-m^2(1-\ln m^2) \tag{J. 25a}$$

$$B_1=\frac{1}{2s}[-A_0(m_1)+A_0(m_2)-(s+m_1{}^2-m_2{}^2)B_0] \tag{J. 25b}$$

$$B_{21}=\frac{1}{3s}\left[-A_0(m_2)-2(s+m_1{}^2-m_2{}^2)B_1-m_1{}^2B_0-\frac{1}{2}\left(m_1{}^2+m_2{}^2-\frac{s}{3}\right)\right] \tag{J. 25c}$$

$$B_{22}=\frac{1}{6}\left[+A_0(m_2)-(s+m_1{}^2-m_2{}^2)B_1-2m_1{}^2B_0-\left(m_1{}^2+m_2{}^2-\frac{s}{3}\right)\right] \tag{J. 25d}$$

B_1 や B_{22} などは，(J.7 c) や (J.7 d) を $p_\mu, g_{\mu\nu}$ などと縮約して得られるが，その際

$$g_{\mu\nu}g^{\mu\nu}=D=4-\varepsilon \tag{J. 26a}$$

であり，

$$\lim_{\varepsilon\to 0}(\varepsilon B_{22})=(s-3m_1{}^2-3m_2{}^2)/6 \tag{J. 26b}$$

などは，有限な量であることに注意する必要がある．

J.3　自己エネルギー $\Sigma_T(s)$

(J.22), (J.25) を使って整理すれば,

$$\Sigma_T(s)=\frac{4gg'}{16\pi^2}\left[(vv'+aa')\left\{-2B_{22}+\frac{A_0(m_1)+A_0(m_2)}{2}+\frac{s-m_1^2-m_2^2}{2}B_0\right\}\right.$$
$$\left.+(vv'-aa')m_1m_2B_0\right]$$
$$=\frac{4gg'}{16\pi^2}\frac{1}{3}\left[(vv'+aa')\left\{\left(m_1^2+m_2^2-\frac{s}{3}\right)+A_0(m_1)+A_0(m_2)\right.\right.$$
$$\left.-\frac{m_1^2-m_2^2}{2s}(A_0(m_1)-A_0(m_2))+\left(s-\frac{m_1^2+m_2^2}{2}-\frac{(m_1^2-m_2^2)^2}{2s}\right)B_0\right\}$$
$$\left.+(vv'-aa')3m_1m_2B_0\right] \tag{J.27}$$

W や Z の自己エネルギー関数を求めるには, $g, g', v\cdots$ に具体的な値を入れればよい.

m_1, m_2 をそれぞれアイソスピン $\pm1/2$ のフェルミオンの質量とし,

$$\varDelta_j\equiv\frac{2}{\varepsilon}-\gamma_E+\ln 4\pi-\ln\frac{m_j^2}{\mu^2} \tag{J.28}$$

を定義して整理すれば次式が得られる[2]. クォークの場合はカラー因子 $N_c=3$ を乗じ, レプトンの場合 $m_1\to 0$ にもっていく.

$$\Sigma_{WW}(s)=\frac{\alpha}{4\pi s_W^2}\frac{1}{3}\Sigma\left[\frac{\varDelta_1}{2}\left(s-\frac{5}{2}m_1^2-\frac{1}{2}m_2^2\right)+\frac{\varDelta_2}{2}\left(s-\frac{1}{2}m_1^2-\frac{5}{2}m_2^2\right)\right.$$
$$+\left(s-\frac{m_1^2+m_2^2}{2}\right)\left(1-\frac{m_1^2+m_2^2}{m_1^2-m_2^2}\ln\frac{m_1}{m_2}\right)-\frac{s}{3}$$
$$\left.+\left\{s-\frac{m_1^2+m_2^2}{2}-\frac{(m_1^2-m_2^2)^2}{2s}\right\}F(s;m_1,m_2)\right] \tag{J.29}$$

$$\Sigma_{ZZ}(s)=\frac{\alpha}{4\pi s_W^2c_W^2}\frac{1}{3}\Sigma\left[(v_f^2+a_f^2)\left\{s\varDelta_f+(s+2m_f^2)F(s;m_f,m_f)-\frac{s}{3}\right\}\right.$$
$$\left.-\frac{3}{2}m_f^2\{\varDelta_f+F(s;m_f,m_f)\}\right] \tag{J.30}$$

$$\Sigma_{\gamma Z}(s)=\frac{\alpha}{4\pi s_Wc_W}\frac{2}{3}\Sigma Q_fv_f\left[s\varDelta_f+(s+2m_f^2)F(s;m_f,m_f)-\frac{s}{3}\right] \tag{J.31}$$

$$\Sigma_{\gamma\gamma}(s)=\frac{\alpha}{4\pi}\frac{4}{3}\Sigma Q_f^2\left[s\varDelta_f+(s+2m_f^2)F(s;m_f,m_f)-\frac{s}{3}\right] \tag{J.32}$$

ここに, F 関数は B_0 から得られ, 次式で定義される量である.

$$B_0(s;m_1,m_2)=B_0(0;m_1,m_2)+F(s;m_1,m_2) \tag{J.33a}$$

$$B_0(0;m_1,m_2)=\varDelta+1-\frac{m_1^2+m_2^2}{m_1^2-m_2^2}\ln\left(\frac{m_1}{m_2}\right)-\ln m_1m_2 \tag{J.33b}$$

$$F(s;m_1,m_2)=-1+\frac{m_1^2+m_2^2}{m_1^2+m_2^2}\ln\left(\frac{m_1}{m_2}\right).$$

$$-\int_0^1 dz \ln\left[\frac{-sz(1-z)+m_1^2(1-z)+m_2^2 z-i\varepsilon}{m_1 m_2}\right] \tag{J.33c}$$

F 関数は次のような性質をもつ.

$$F(0; m_1, m_2)=0 \tag{J.34a}$$

$$F(s; 0, m)=1+\left(\frac{m^2}{s}-1\right)\ln\left(1-\frac{s}{m^2}-i\varepsilon\right) \tag{J.34b}$$

$s \ll m_1^2, m_2^2$ のときは

$$F(s; m_1, m_2)=\frac{s}{(m_1^2-m_2^2)^2}\left(\frac{m_1^2+m_2^2}{2}-\frac{m_1^2 m_2^2}{m_1^2-m_2^2}\ln\frac{m_1^2}{m_2^2}\right)+\cdots \tag{J.34c}$$

$s \gg m_1^2, m_2^2$ のときは

$$F(s; m_1, m_2)=1+\frac{m_1^2+m_2^2}{m_1^2-m_2^2}\ln\frac{m_1}{m_2}-\ln\frac{|s|}{m_1 m_2}+i\pi\theta(s)+\cdots \tag{J.34d}$$

$m_1=m_2$ のときは特に簡単となり,

$$F(s; m, m)=2-\beta\ln\frac{\beta+1}{\beta-1}\fallingdotseq\begin{cases}2-\ln\dfrac{|s|}{m^2}+i\pi\theta(s)+\cdots & |s|\gg m^2\\ \dfrac{s}{6m^2}+\dfrac{s^2}{60m^4}+\cdots & |s|\ll m^2\end{cases}$$

$$y=4m^2/s, \qquad \beta=(1-y)^{1/2} \tag{J.34e}$$

J.4　Δr, $\hat{\Pi}_{\gamma Z}(s)$ の計算

まず, 次式によって Σ_{11}, Σ_{33}, Σ_{3Q}, Σ_{QQ}, $\Sigma_{VV}'(s)$ を定義しておく.

$$\Sigma_{\gamma\gamma}=(Qe)^2\Sigma_{QQ} \tag{J.35a}$$

$$\Sigma_{\gamma Z}=(Qe)g_Z(\Sigma_{3Q}-Qs_W^2\Sigma_{QQ}) \tag{J.35b}$$

$$\Sigma_{ZZ}=g_Z^2(\Sigma_{33}-2Qs_W^2\Sigma_{3Q}+Q^2s_W^4\Sigma_{QQ}) \tag{J.35c}$$

$$\Sigma_{WW}=g_W^2\Sigma_{11} \tag{J.35d}$$

$$\Sigma_{VV}(s)=\Sigma_{VV}(0)+s\Sigma_{VV}'(s) \tag{J.36}$$

$\Delta\rho$, Δr, $\hat{\Pi}_{\gamma Z}(s)$ は,

$$\Delta\rho=\mathrm{Re}\left[\frac{\Sigma_{ZZ}(0)}{m_Z^2}-\frac{\Sigma_{WW}(0)}{m_W^2}+2\frac{s_W}{c_W}\frac{\Sigma_{\gamma Z}(0)}{m_Z^2}\right]=\frac{e^2}{m_W^2 s_W^2}[\Sigma_{33}(0)-\Sigma_{11}(0)] \tag{J.37}$$

$$\Delta r=-\hat{\Pi}_W(0)=\mathrm{Re}\frac{\Sigma_{WW}(0)-\Sigma_{WW}(m_W^2)}{m_W^2}+\Pi_\gamma(0)-\frac{\delta' s_W^2}{s_W^2}$$

以下, Σ は $\mathrm{Re}\Sigma$ を意味するものとすれば,

$$=\frac{\Sigma_{WW}(0)-\Sigma_{WW}(m_W^2)}{m_W^2}+\Pi_\gamma(0)+\frac{c_W^2}{s_W^2}\left[\frac{\delta m_Z^2}{m_Z^2}-\frac{\delta m_W^2}{m_W^2}+2\frac{s_W}{c_W}\frac{\Sigma_{\gamma Z}(0)}{m_Z^2}\right]$$

$$=\Delta\alpha-\frac{c_W^2}{s_W^2}\Delta\rho+r_1 \tag{J.38a}$$

$$r_1=\Pi_\gamma(m_Z^2)-\frac{c_W^2}{s_W^2}\Sigma_{ZZ}'(m_Z^2)+\frac{c_W^2-s_W^2}{s_W^2}\Sigma_{WW}'(m_W^2)=\frac{c_W^2-s_W^2}{s_W^2}\varepsilon_2+2\varepsilon_3 \tag{J.38b}$$

ここで, $\Delta\alpha$, ε_2, ε_3 は次式で定義される量であり,

$$\Delta\alpha=-\hat{\Pi}_\gamma(m_Z^2) \tag{J. 39a}$$

$$\varepsilon_2=\frac{e^2}{s_W^2}[\Sigma_{11}'(m_W^2)-\Sigma_{33}'(m_Z^2)] \tag{J. 39b}$$

$$\varepsilon_3=\frac{e^2}{s_W^2}[\Sigma'_{3Q}(m_Z^2)-\Sigma_{33}'(m_Z^2)] \tag{J. 39c}$$

計算過程で

$$\frac{\delta m_W^2}{m_W^2}=\frac{\Sigma_{WW}(m_W^2)}{m_W^2}, \qquad \frac{\delta m_Z^2}{m_Z^2}=\frac{\Sigma_{ZZ}(m_Z^2)}{m_Z^2} \tag{J. 40a}$$

$$\Pi_\gamma(s)=\frac{\Sigma_{\gamma\gamma}(s)}{s}=\Pi_\gamma(0)+\hat{\Pi}_\gamma(s) \tag{J. 40b}$$

などを使った．同様に

$$\hat{\Pi}_{\gamma Z}(m_Z^2)=\frac{\Sigma_{\gamma Z}(m_Z^2)-\Sigma_{\gamma Z}(0)}{m_Z^2}+\frac{\delta' s_W^2}{c_W s_W}=\Sigma_{\gamma Z}'(m_Z^2)+\frac{\delta' s_W^2}{c_W s_W}=\frac{c_W}{s_W}\Delta\rho+r_2 \tag{J. 41a}$$

$$r_2=\Sigma_{\gamma Z}'(m_Z^2)+\frac{c_W}{s_W}\{\Sigma_{ZZ}'(m_Z^2)-\Sigma_{WW}'(m_W^2)\}=-\frac{c_W}{s_W}\varepsilon_2-\frac{s_W}{c_W}\varepsilon_3 \tag{J. 41b}$$

も導ける．

以下，$\Delta\alpha, \Delta\rho, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ は（したがって $\Delta r, \hat{\Pi}_{\gamma Z}(m_Z^2)$ も）発散を含まないこと，大きな寄与は $\Delta\alpha$ と $\Delta\rho$ の中にあり，$\varepsilon_2, \varepsilon_3$ は小さいことを示そう．

a. フォトンを含む項

まず，$\Sigma_{\gamma\gamma}(0)=0$ はゲージ不変性より保証されているが，フェルミオンループについては $\Sigma_{\gamma Z}(0)=0$ も成立することは，式 (J.31), (J.32) を見ればわかる．具体的に書き下ろすと

$$\Sigma_{\gamma\gamma}(0)=\Sigma_{\gamma Z}(0)=0 \tag{J. 42a}$$

$$\Pi_\gamma(0)=\frac{\alpha}{3\pi}\Sigma_f Q_f^2\Delta_f \tag{J. 42b}$$

$$\begin{aligned}\hat{\Pi}_\gamma(s)&=\frac{\alpha}{3\pi}\Sigma_f Q_f^2\left[\left(1+\frac{2m_f^2}{s}\right)F(s, m_f, m_f)-\frac{1}{3}\right]\\&\simeq\begin{cases}\dfrac{\alpha}{3\pi}\Sigma_f Q_f^2\left[\dfrac{5}{3}-\ln\dfrac{|s|}{m_f^2}+\cdots\right] & |s|\gg m_f^2\\[2ex]\dfrac{\alpha}{3\pi}\Sigma_f Q_f^2\left[\dfrac{s}{5m_f^2}+\cdots\right] & s\ll m_f^2\end{cases}\end{aligned} \tag{J. 42c}$$

$$\frac{\Sigma_{\gamma Z}(s)}{s}=\frac{1}{2s_W c_W}\Sigma_f\frac{v_f Q_f}{Q_f^2}\Pi_\gamma(s) \tag{J. 43}$$

$\hat{\Pi}_\gamma(s)$ は発散項を含まない．なお Σ の和はクォークに対してはカラーの和を含むものとする．上式から，$\hat{\Pi}_\gamma(s)$ は軽いフェルミオン ($s\gg m_f^2$) からの寄与を受けること，重いフェルミオン ($s\ll m_f^2$) の寄与は無視できる (decouple するという) ことがわかる．

$$\therefore \quad \Delta\alpha=-\hat{\Pi}_\gamma(m_Z^2)\fallingdotseq-\frac{\alpha}{3\pi}\sum_{m_f<m_Z}Q_f^2\left[\frac{5}{3}-\ln\frac{m_Z^2}{m_f^2}\right] \tag{J. 44}$$

b.　$\varDelta\rho$

次に，各世代について

$$\Sigma_{ZZ}(0)=-\frac{\alpha}{16\pi}\frac{1}{s_W^2c_W^2}[2(m_1^2\varDelta_1+m_2^2\varDelta_2)] \tag{J. 45a}$$

$$\Sigma_{WW}(0)=-\frac{\alpha}{16\pi}\frac{1}{s_W^2}\left[2(m_1^2\varDelta_1+m_2^2\varDelta_2)+(m_1^2+m_2^2)-\frac{2m_1^2m_2^2}{m_1^2-m_2^2}\ln\left(\frac{m_1^2}{m_2^2}\right)\right] \tag{J. 45b}$$

が成立するので，世代ごとの $\varDelta\rho=\varDelta\rho_g$

$$\varDelta\rho_g=\frac{\Sigma_{ZZ}(0)}{m_Z^2}-\frac{\Sigma_{WW}(0)}{m_W^2}=\frac{3\alpha}{16\pi s_W^2m_W^2}\left[(m_1^2+m_2^2)-\frac{2m_1^2m_2^2}{m_1^2-m_2^2}\ln\left(\frac{m_1^2}{m_2^2}\right)\right] \tag{J. 46a}$$

は発散項 $\varDelta$ を含まない．因子 3 はカラーの和からくる．トップの質量が圧倒的に大きいので，近似的に，

$$\varDelta\rho=\Sigma_g\varDelta\rho_g\fallingdotseq\varDelta\rho_t=\frac{3\alpha}{16\pi s_W^2}\frac{m_t^2}{m_W^2} \tag{J. 46b}$$

と表される．

c.　ε_2 と ε_3

次に，ε_2 と ε_3 が有限であることを示す．$\Pi_\gamma(0)$ の $\varDelta$ を含む部分を $\mathrm{Sing}\{\Pi_\gamma(0)\}$ のように書くと

$$\mathrm{Sing}\{\Pi_\gamma(m_Z^2)\}=\mathrm{Sing}\{\Pi_\gamma(0)\}=\frac{\alpha}{3\pi}\varDelta[Q_1^2+Q_2^2] \tag{J. 47a}$$

$$\mathrm{Sing}\{\Sigma_{\gamma Z}'(m_Z^2)\}=\frac{\alpha}{3\pi}\frac{\varDelta}{2s_Wc_W}[Q_1v_1+Q_2v_2] \tag{J. 47b}$$

$$\mathrm{Sing}\{\Sigma_{ZZ}'(m_Z^2)\}=\frac{\alpha}{3\pi}\frac{\varDelta}{4s_W^2c_W^2}[v_1^2+v_2^2+a_1^2+a_2^2] \tag{J. 47c}$$

$$\mathrm{Sing}\{\Sigma_{WW}'(m_W^2)\}=\frac{\alpha}{3\pi}\frac{\varDelta}{4s_W^2} \tag{J. 47d}$$

ここで，$v_i=I_{3i}-2Q_is_W^2$，$a_i=I_{3i}$ を入れ，

$$Q_1I_{31}+Q_2I_{32}=(1/2)(Q_1-Q_2)=1/2$$

を考慮すると，式 (J.35) から

$$\mathrm{Sing}\{\Sigma_{33}'(m_Z^2)\}=\frac{\mathrm{Sing}\{\Sigma_{ZZ}'(m_Z^2)\}|_{Q_f=0}}{g_Z^2}=\frac{\varDelta}{48\pi^2} \tag{J. 48a}$$

$$\mathrm{Sing}\{\Sigma_{3Q}'(m_Z^2)\}=\frac{\mathrm{Sing}\{\Sigma_{\gamma Z}'(m_Z^2)\}|_{v_i=I_{3i}}}{eg_Z}=\frac{\varDelta}{48\pi^2} \tag{J. 48b}$$

$$\mathrm{Sing}\{\Sigma_{11}'(m_W^2)\}=\frac{\mathrm{Sing}\{\Sigma_{WW}'(m_W^2)\}}{g_W^2}=\frac{\varDelta}{48\pi^2} \tag{J. 48c}$$

が導ける．(J.48) を使うと ε_2 と ε_3 はおのおのが有限であることがわかる．したがって，r_1, r_2 もまた有限である．

次に，$\hat{\Pi}_\gamma(m_Z^2)$ にはあった $\ln(m_Z^2/m_f^2)$ の項が，$\varepsilon_2, \varepsilon_3$ の中には存在しないことを示す．r_1, r_2 の中の軽いフェルミオン ($m_Z\gg m_f$) の寄与は

$$\Pi_\gamma(m_Z{}^2) \fallingdotseq \frac{\alpha}{3\pi}\Sigma Q_f{}^2\left(\Delta_f+\frac{5}{3}-\ln\frac{m_Z{}^2}{m_f{}^2}\right)=\frac{\alpha}{3\pi}(Q_1{}^2+Q_2{}^2)\left(\frac{5}{3}-\ln\frac{m_Z{}^2}{\mu^2}\right) \tag{J. 49a}$$

$$\Sigma_{\gamma Z}'(m_Z{}^2) \fallingdotseq \frac{\alpha}{3\pi}\frac{1}{2s_Wc_W}\Sigma v_fQ_f\left(\frac{5}{3}-\ln\frac{m_Z{}^2}{\mu^2}\right) \tag{J. 49b}$$

$$\Sigma_{ZZ}'(m_Z{}^2) \fallingdotseq \frac{\alpha}{3\pi}\frac{1}{4s_W{}^2c_W{}^2}\Sigma\left[(v_f{}^2+a_f{}^2)\left(\frac{5}{3}-\ln\frac{m_Z{}^2}{\mu^2}\right)\right] \tag{J. 49c}$$

$$\Sigma_{WW}'(m_W{}^2) \fallingdotseq \frac{\alpha}{3\pi}\frac{1}{4s_W{}^2}\left[\left(\frac{5}{3}-\ln\frac{m_Z{}^2}{\mu^2}\right)-\ln c_W{}^2\right] \tag{J. 49d}$$

となるので，$\ln m_Z{}^2$ を含む項は，常に $\ln\mu^2$（ここでは $\Delta=\ln\mu^2$ とおいた）と組になって現れる．したがって $\varepsilon_2, \varepsilon_3$ に対する $\ln m_Z{}^2$ の寄与は，Δ の係数が 0 になるのと同じ理由によって 0 となる．よって，$\varepsilon_2, \varepsilon_3$ には軽いフェルミオンからの大きな寄与はない．

$\varepsilon_2, \varepsilon_3$ への優勢な寄与はトップクォークからくる．比較のため $\Delta\rho, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ へのトップおよびヒッグスループの寄与を書き下ろすと[4]，

$$\Delta\rho=\frac{3G_Fm_t{}^2}{8\pi^2\sqrt{2}}-\frac{3G_Fm_W{}^2}{4\pi^2\sqrt{2}}\tan^2\theta_W\ln\left(\frac{m_H}{m_Z}\right) \tag{J. 50a}$$

$$\varepsilon_2=-\frac{G_Fm_W{}^2}{2\pi^2\sqrt{2}}\ln\left(\frac{m_t}{m_Z}\right) \tag{J. 50b}$$

$$\varepsilon_3=\frac{G_Fm_W{}^2}{12\pi^2\sqrt{2}}\ln\left(\frac{m_H}{m_Z}\right)-\frac{G_Fm_W{}^2}{6\pi^2\sqrt{2}}\ln\left(\frac{m_t}{m_Z}\right) \tag{J. 50c}$$

であり，$\varepsilon_2, \varepsilon_3$ の寄与は $\Delta\rho$ に比べ相対的に $\sim O(m_W{}^2/m_t{}^2)$ だけ小さい．ヒッグスループの寄与を（計算なしに）含めたのは，この近似ではもはや無視しえない項だからである．

以上を総合すればゲージボソンの真空偏極による補正は，$\Delta\alpha, \Delta\rho, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ に集約されると結論できる．このうち大きな項は $\Delta\alpha$ と $\Delta\rho$ であり，標準理論においてはこの二つを考慮すれば大抵の場合十分である．$\Delta\alpha$ には軽いフェルミオンが寄与し，$\Delta\rho$ には重いフェルミオンの寄与が効く．

$$\Delta r \fallingdotseq \Delta\alpha-\frac{c_W{}^2}{s_W{}^2}\Delta\rho+\cdots \tag{J. 51a}$$

$$\hat{\Pi}_{\gamma Z}(m_Z{}^2) \fallingdotseq \frac{c_W}{s_W}\Delta\rho+\cdots \tag{J. 51b}$$

$\varepsilon_2, \varepsilon_3$ は標準理論では小さいが，新理論の構成いかんでは優勢になる場合がある．例えば，$\Delta\rho$ はアイソスピンの破れの効果であり，質量が大きくとも多重項の中で縮退しているときは効果は小さい．このときは ε_3 にその効果が現れるので，例えばテクニカラー理論などの標準理論を越える新理論の検証に有効である．

参考文献

1) F. Jegerlehner: "Renormalizing the Standard Model" in Proc. 1990 Theoretical Advanced Study Institute in Elementary Physics, Boulder, Colorado, June, 1990. eds. M. Cvetic and P. Langacker, World Scientific
2) W.F.L. Hollik: *Fortschritte der Physik*, **38** (1990) 165-260
3) W.F.L. Hollik: Proc. XVIII Int. Meet. on Fundamental Physics and XXI G.I.F.T. Int.
Seminar on Theor. Phys., June 1990. eds., F. del' Agula, A. Me'ndez, and A, Ruiz, World Scientific, 1991
4) G. Altarelli, R. Barbieri and F. Caravaglios: *Nucl. Phys*., **B405** (1993) 3

索　　引

サ 行

タ　行

ナ 行

ハ 行

マ　行

ヤ　行

ラ　行

ワ　行

著者略歴

長島順清（ながしま よりきよ）

1938年　東京都に生まれる
1965年　東京大学大学院数物系研究科
　　　　博士課程修了
現　在　大阪大学名誉教授
　　　　理学博士

朝倉物理学大系 5
素粒子標準理論と実験的基礎　　定価はカバーに表示

1999年 3月20日　初版第1刷
2002年 4月20日　　　第2刷

著　者　長　島　順　清
発行者　朝　倉　邦　造
発行所　株式会社　朝　倉　書　店
東京都新宿区新小川町 6-29
郵便番号　162-8707
電　話　03(3260)0141
F A X　03(3260)0180
http://www. asakura. co. jp

〈検印省略〉

平河工業社・渡辺製本

ISBN 4-254-13675-7 C 3342　　Printed in Japan

千葉工大 大沼 甫・千葉工大 相川文弘・
千葉工大 鈴木 進著

はじめからの物理学

13089-9 C3042 A5判 216頁 本体2900円

大学理工系の初学年生のために高校物理からの連続性に配慮した教科書。〔内容〕物体の運動／力と運動の法則／運動とエネルギー／気体の性質と温度，熱／静電場／静磁場／電磁誘導と交流／付録：次元と単位／微分／ラジアンと三角関数／他

阪大 廣岡正彦著

物理学序説
—質点力学・熱力学—

13059-7 C3042 A5判 208頁 本体3000円

理科系教養課程の教科書〔内容〕ベクトル／ニュートンの運動法則／ガレリイの相対性原理／重力場のなかの質点の運動／仕事とエネルギー／中心力と角運動保存則／非慣性系／調和振動／連成振動／熱力学第1，第2法則／熱力学ポテンシャル

山口大 嶋村修二・山口大 萩原千聡編著

基礎物理学
—波動・光・熱—

13071-6 C3042 A5判 212頁 本体3300円

物理学の基礎としての「波動」「光」「熱」の入門テキスト。〔内容〕波／波の反射，固有振動／分散と群速度／電子波／光と波動／幾何光学／光子／熱と熱力学／熱力学第1法則／理想気体／熱力学第2法則／熱平衡状態／ミクロの世界と熱力学

英国クイーンズカレッジ K.ギッブス著
前上智大 笠 耐訳

ゆかいな物理実験

13084-8 C3042 A5判 288頁 本体3900円

30人の生徒を物理の授業に惹きつける秘訣は？「ゆかいな物理実験」を使うこと。30年間の物理の授業で体得した興味深く楽しい600のアイデアをすべての現場教師に贈る。〔内容〕一般物理学／力学／波と光／熱物理学／電磁気学／現代物理学

学習院大 江沢 洋著

現代物理学

13068-6 C3042 A5判 584頁 本体7000円

理論物理学界の第一人者が，現代物理学形成の経緯を歴史的な実験装置や数値も出しながら具象的に描き出すテキスト。数式も出てくるが，その場所で丁寧に説明しているので，予備知識は不要。この一冊で力学から統一理論にまで辿りつける！

比企能夫・仁平 猛・小澤 哲・高橋東之著

物理実験コース

13054-6 C3042 A5判 184頁 本体2900円

大学・高専学生向けの平易な解説の物理実験書。実験心得，基礎測定〔実験技術の習得〕，テーマ別実験〔実験を通して物理を理解する〕で構成。とかく無味乾燥に陥りやすい物理実験を，学生が自発的かつ目的を明確にして学べるよう工夫

東大 小柳義夫監訳 法大 狩野 覚・法大 春日 隆・
住友化学工業 善甫康成訳

計算物理学―基礎編

13086-4 C3042 A5判 320頁 本体4600円

各モデルを課題→理論→手法→プログラミング→検討の順を追って丁寧に解説。〔内容〕数値計算の誤差と不確実さ／積分／データ解析／決定理論世界のランダム現象／モンテカルロ法／微分方程式と振動／量子力学の固有値問題／非調和振動／他

東大 小柳義夫監訳 法大 狩野 覚・法大 春日 隆・
住友化学工業 善甫康成訳

計算物理学―応用編

13087-2 C3042 A5判 212頁 本体4400円

〔内容〕メモリーとCPU／並列計算とPVM／オブジェクト指向プログラミング／熱力学シミュレーション／量子経路上の汎関数積分／フラクタル／静電ポテンシャル／熱流／弦を伝わる波動／ソリトン，KdV／閉じ込められた電子波束／他

名城大 槌田 敦著

熱学外論
—生命・環境を含む開放系の熱理論—

13061-9 C3042 A5判 212頁 本体3400円

数式を極力抑えかつ章末に例題を付し，文科系学生でも読み通せるよう配慮したツチダ熱学の決定版。生命，地球環境，人間社会を熱化学機関の見地から洞察する。〔内容〕基礎編：開放系の熱学／応用編：自然環境と人間社会

I.プリゴジン／D.コンデプディ著
前日大 妹尾 学・東海大 岩元和敏訳

現代熱力学
—熱機関から散逸構造へ—

13085-6 C3042 A5判 388頁 本体6000円

ノーベル賞学者I.プリゴジンとその仲間により1999年に刊行された本格的教科書の全訳。5部構成20章で“散逸構造”に辿り着く。〔内容〕熱機関からコスモロジーへ／平衡系熱力学／ゆらぎと安定性／線形非平衡熱力学／ゆらぎによる秩序形成

前東工大 久武和夫・前東工大 岡田利弘著
理工学基礎講座 9
原子物理概論
13509-2 C3342　　A 5 判 284頁 本体4800円

原子物理学の基礎を新しい知見をもりこんでわかりやすく解説。〔内容〕古典的原子像／特殊相対論／光およびX線の性質(光量子説)／粒子の波動性／原子スペクトルと原子構造／量子力学／水素原子の量子力学／統計力学／固体／原子核

元東工大 影山誠三郎著
理工学基礎講座25
原子核物理
13526-2 C3342　　A 5 判 248頁 本体4800円

大学理工系および医学系学生のために，原子核・放射線などの基礎的な知識を平易に詳述した入門書。〔内容〕原子核の基本的性質／放射能／α・β崩壊およびγ線遷移／放射線と物質との相互作用／放射線検出器／原子核反応／加速器

前筑波大 八木浩輔著
基礎物理科学シリーズ 4
原子核物理学
13542-4 C3342　　A 5 判 352頁 本体6800円

最近の発展を十分にとり入れたユニークな教科書〔内容〕原子核の基本的性質／核力の二体問題／原子核の構造／原子核の安定性／放射線と物質との相互作用／β崩壊-弱い相互作用／γ線放射／加速器／原子核反応／原子核エネルギーの解放

帝京平成大 原　康夫・中大 稲見武夫・慶大 青木健一郎著
素粒子物理学
13082-1 C3042　　A 5 判 228頁 本体3500円

素粒子の平易な入門書。〔内容〕素粒子物理学とは／相対論的場の理論と量子力学／素粒子の世界を探る／対称性／U(1)ゲージ理論と量子電磁気学／弱い相互作用／対称性の破れ／電弱相互作用の統一理論／クォークとQCD／標準模型，他。

H.J.グレイ／A.アイザックス編
山口理科大 清水忠雄・上智大 清水文子監訳
ロングマン 物理学辞典（原書3版）
13072-4 C3542　　A 5 判 824頁 本体27000円

定評あるLongman社の“Dictionary of Physics”の完訳版。原著の第1版は1958年であり，版を重ね本書は第3版である。物理学の源流はイギリスにあり，その歴史を感じさせる用語・解説がベースとなり，物理工学・電子工学の領域で重要語となっている最近の用語も増補されている。解説も定義だけのものから，1ページを費やし詳解したものも含む。また人名用語も数多く含み，資料的価値も認められる。物理学だけにとどまらず工学系の研究者・技術者の座右の書として最適の辞典

戸田盛和・宮島龍興・長谷田泰一郎・小林澈郎編著
物理学ハンドブック（第 2 版）
13053-8 C3042　　A 5 判 648頁 本体15000円

本書は旧版以来の「高校程度の物理の知識をもとにしてこれを補い発展させて物理学の知識・基礎および実際的な応用例などを，くわしく興味ある解説をほどこす」という趣旨を徹底し，新たな最近の物理学の進歩—ソリトン，カオス，超伝導，ゲージ変換，素粒子，形状記憶合金，レーザー等—を大幅に加筆・訂正した。〔内容〕力学／変形する物体の力学／熱と熱力学／電気と磁気／光／電子と原子／物質の電気・磁気的性質／電子の利用／素粒子の世界／宇宙／学者年表，物理定数等

R.M.ベサンコン編
池田光男・大沼　甫・深井　有監訳
物理学大百科
13041-4 C3542　　B 5 判 1156頁 本体52000円

物理学の領域から350語を厳選し，アメリカ，イギリス，カナダ，日本などの著名物理学者300名によりそれぞれの専門分野の語をわかりやすく詳細に解説したユニークな事典。The Encyclopedia of Physics(第 3 版，Van Nostrand社)の邦訳。〔収録分野〕歴史／測定／記号・単位／相対論／熱学／光学／音響学／量子力学／原子・分子／素粒子・原子核／放射線／加速器／量子エレクトロニクス／エレクトロニクス／半導体／情報／統計力学／宇宙物理学／生物物理学／数理物理学／他

朝倉物理学大系

荒船次郎・江沢　洋・中村孔一・米沢富美子編集

1	解析力学 I	山本　義隆 中村　孔一 著	本体4800円
2	解析力学 II	山本　義隆 中村　孔一 著	本体4800円
3	素粒子物理学の基礎 I	長島　順清 著	本体4800円
4	素粒子物理学の基礎 II	長島　順清 著	本体4800円
5	素粒子標準理論と実験的基礎	長島　順清 著	
6	高エネルギー物理学の発展	長島　順清 著	本体6500円
7	量子力学の数学的構造 I	新井　朝雄 江沢　洋 著	本体5500円
8	量子力学の数学的構造 II	新井　朝雄 江沢　洋 著	本体5800円
9	多体問題	高田　康民 著	本体6800円
10	統計物理学	西川　恭治 森　弘之 著	本体6500円
11	原子分子物理学	高柳　和夫 著	本体7300円

価格（税別）は2002年2月現在